

教师专业素养
提升丛书

教育数学基础

JIAOYU
SHUXUE JICHU

汪一敏 著



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

教育数学基础

汪一敏 著



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS

浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

教育数学基础 / 汪一敏著. —杭州: 浙江大学出版社, 2015. 12
ISBN 978-7-308-15147-4

I. ①教… II. ①汪… III. ①小学数学课—教学研究 IV. ①G623.502

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2015) 第 223868 号

教育数学基础

汪一敏 著

责任编辑 何 瑜 (wsheyu@163.com)

责任校对 余梦洁

封面设计 杭州林智广告有限公司

出版发行 浙江大学出版社

(杭州市天目山路 148 号 邮政编码 310007)

(网址: <http://www.zjupress.com>)

排 版 杭州林智广告有限公司

印 刷 浙江省良渚印刷厂

开 本 710mm×1000mm 1/16

印 张 15

字 数 277 千

版 印 次 2015 年 12 月第 1 版 2015 年 12 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-308-15147-4

定 价 38.00 元

版权所有 翻印必究 印装差错 负责调换

浙江大学出版社发行部联系方式: (0571) 88925591; <http://zjdxcs.tmall.com>

序

杭州师范大学初等教育学院是一所百年老院,有着悠久的办学历史和教育传统。学院小学教育专业为全国最早开始培养本科学历层次小学教师的院校之一,为国家级特色专业、浙江省首批重点专业和优势专业。“小学教师专业提升”丛书由《小学语文教学技能实训》(吕映主编)、《小学数学教学技能实训》(李红、李国强主编)、《教育数学基础》(汪一敏著)、《课程与教学:新手教师的视角》(袁德润主编)、《儿童发展心理学》(刘瑛主编)五本教材组成。本丛书的编写成员均为小学教育专业建设项目团队成员,长期从事小学教育专业的相关课程的教学与研究。

大家经过历时两年的研讨认为,本科层次的小学教育专业自1998年办学至今,各级各类教材繁多,但是,许多都只是加了小学教育案例而已,针对小学教育专业师范生教与学技能与素养的教材还是有些欠缺,本丛书正是基于这种专业建设的现实需求,本着不求大而全,但求有需要、有特色的指导思想编写出版的,希望对小学教育专业的教材体系做出必要的补充和尝试创新。

本丛书定位于提高四年制本科小学教育专业师范生的教与学的技能与素养。通过本丛书前两本教材的学习,能够掌握作为未来的小学教师所必需的小学语文、小学数学学科的备课、上课、听课、说课、评课和教研技能,形成小学语文、数学教学的实际能力。通过丛书后三本教材的学习,能够提升未来小学教师所必需的心理素养、课程与教学素养、数学素养。而后三本教材是前两本小学语文、小学数学学科技能实训的基础,反之,前两本教材是后三本心理、课程与教学、数学素养的具体体现,五本教材在培养小学教育专业师范生教与学的技能与素养方面,相辅相成,互为促进。

在教材编写过程中,作者力求凸显以下几个特点。

1. 鲜明的时代特色。随着时代的发展,对于小学语文教师、小学数学教师的教

学技能提出了许多新的要求。特别是2011年《语文课程标准》、《数学课程标准》的修订和颁布,又提出了一系列新的课程理念,要求教师转变课程观念,形成、掌握新的教学技能。本丛书针对时代对于语文教师、数学教师的新要求,依据新课程标准的精神,重新建构小学语文、小学数学教学技能结构体系,培养适应时代需求的新型小学语文和小学数学教师。

2. 整合的理论基础。小学教师需要综合的知识结构和理论素养,所以,本丛书在突破单一学科体系、整合小学教师所需的理论知识方面做了有益的尝试。例如,《教育数学基础》将作为一个小学数学教师所需的数学知识进行了整合,这里所讲的数学知识,以往是作为纯数学知识而授的,这里是作为一种“教育数学”而强调的,突出了它们在数学教学中的地位与作用。《课程与教学:新手教师的视角》对课程与教学论的系统理论进行修剪,从历史的角度梳理课程与教学发展的脉络和追求,给读者提供一条理性看待和理解课程与教学问题的线索,并从新手教师专业发展需求的视角出发安排教材内容。《儿童发展心理学》的编排内容,按照儿童在不同领域的发展来划分章节,这与大多数同类教材按儿童的年龄阶段分章节有所区别,有利于相关知识的整合。

3. 明确的实践取向。本丛书体现了鲜明的实践取向,通过鲜活的教学案例的分析,帮助师范生和新手教师掌握各项教学技能,并通过有针对性的应用练习使师范生和新手教师逐步形成教学设计能力、实施能力和评价能力。

4. 优化指导的体例导向。本丛书编写体例完整有序,体现优化指导自学的原则。每一章前面有内容提要、关键问题,后面有案例评析、应用练习,并安排有拓展阅读,引导学生由课内向课外拓展延伸。这样的编写体例,便于教师教学,更便于学生学习,有利于学生的自主学习、探究学习和拓展学习,在“教材”向“学材”的转变方面做了新的尝试。

在本丛书教材编写、出版过程中,始终得到了杭州师范大学攀登工程“人文振兴计划”项目和“本科教学创一流”项目的大力支持,得到了浙江大学出版社的领导、编辑的悉心指导和帮助,在此表示衷心地感谢!

徐丽华

目 录



绪论 数学教师的数学素养	1
第一章 数的起源和发展	17
第一节 自然数	17
第二节 分数和小数	22
第三节 负数	27
第四节 有理数和数域	29
第五节 整数的表示和进位制	34
第六节 无理数和实数	37
第七节 复数和二元数	41
第八节 四元数	45
第九节 数集的无限性及其基数	48
第二章 数学推理的基础	55
第一节 公理化	56
第二节 概念	64
第三节 定义	72
第四节 命题	76
第五节 推理	86

第三章 代数关系	106
第一节 集合	107
第二节 映射	115
第三节 关系	118
第四节 代数运算和运算律	128
第五节 同态和同构	134
第六节 群、环、域简介	139
第四章 数学习题	156
第一节 数学习题的功能	157
第二节 数学习题的分类	165
第三节 数学习题的科学性	180
第四节 数学习题的选择和改编	193
参考文献	227
附录一 圆周率是用什么方法获得证明的	229
附录二 勾股定理的别名	232

绪论 数学教师的数学素养

作为一个数学老师,你有没有想过“数学是什么?”对于这个问题,也许没有标准答案,但每一位老师都会有他自己的理解。

有一位数学老师是这样理解的:

数学是一个大宝库,我要领着我的学生在那里汲取知识的养分;

数学是空间,我要让我的学生想象丰富,头脑能装得下整个宇宙;

数学是图形,我要让我的学生明白数、形是一家,形是数的化身,数是形的灵魂;

数学是一座艺术宫殿,我和学生一起在这里享受形式美、对称美、方法美、奇异美……接受美的熏陶;

数学是故事,欧几里得、阿基米德、祖冲之、高斯……每个故事都让人遐想联翩,给人无限启迪;

数学是游戏,七巧板、幻方、二十四点、一笔画……孩子们快乐地游戏于数学乐园中;

数学是问题,我要让我的学生成为像牛顿、瓦特一样喜欢问“为什么”的好孩子;

数学是历史,我要告诉学生勾股定理、《九章算术》、圆周率……让他们知道我国曾有着辉煌的昨天;

数学是一把金钥匙,我要让我的学生用这把金钥匙去打开人生旅途上每一扇通向成功的大门……^①

这个理解与数学家对数学的理解完全不同,例如有的数学家是这样理解数学的:

“数学不是别的东西,而只是从定义和公理推导出来的一组结论,而这些定义

^① http://wenku.baidu.com/link?url=1AkCftX7NwX81dUqkLVGWSp0tqTH5OlkbP4GfiW_tSnn9RSedigj8kwotUmjPfiNONMdIxFl3XUbGwmNz-6sWSX_VFocD2sDcgGcQf5ZDVmK.

和命题除了必须不矛盾外,可以由数学家根据他们的意志随意创造”^①。

“数学不仅是一种重要的‘工具’或‘方法’,也是一种思维模式,即‘数学方式的理性思维’;数学不仅是一门科学,也是一种文化,即‘数学文化’;数学不仅是一些知识,也是一种素质,即‘数学素质’”^②。

“数学有四个显著的特点:高度的抽象性、体系的严谨性、应用的广泛性、发展的连续性”。

“抽象并不是数学独有的,它是人类认识世界的重要方法,因而有着广泛的应用。例如,物理中的刚体、质点等概念和各种理想状态都是抽象出来的,化学中的化学键、天文学中的天体模型也都是抽象出来的。然而,数学中的抽象却有更‘高’的层次,表现在内容、方法和度量上。首先,数学研究的对象是抽象的,而且这种抽象逐渐递增。如最早‘数’的概念,从自然数到分数和整数,再到整个实数、复数,甚至四元数、八元数等,每一步都是更高一层的抽象;其次,数学的理论可以有多种解释,每一个解释都是一个自然科学、社会科学或其他科学的理论;第三,数学研究只能依据相应的定义进行演绎推理,而不能靠直观、实验或归纳、类比,数学的这种逻辑建构形成系统,成为有别于其他学科方法的公理体系;第四,数学抽象还表现在度量上,通俗地说就是可分为不同的层次。如认识到自然数 $1, 2, 3$ 后,可以得到自然数的无限序列: $1, 2, 3, \dots, n, n+1, \dots$,即自然数集。后者已失去直观意义,是纯粹理性思维的产物,是更高层次的抽象”^③。

“数学是历史的科学,是由历史成果累积而成的”。这是由于数学是连续发展的,“数学发展的连续性主要指数学的发展仅仅是方法的改变,而并无实质上的改变,对此德国数学家汉克尔(H. Hankel, 1839—1873)有过一段精彩的描述:‘在大多数学科里,一代人的建筑往往被下一代人所摧毁;一代人的创造被另一代人所破坏;唯独数学,每一代人都在古老的大厦上添加一层楼’”^④。

实际上人们对数学的理解,无一例外地都只强调了数学的一个或几个侧面,但这也恰好说明了数学内涵的丰富性。本书强调的是:如何从教育的角度来理解数

① [美]R. 柯朗, H. 罗宾. 什么是数学[M]. 增订版. 左平, 张饴慈, 译. 上海: 复旦大学出版社, 2005: 第二版序言.

② 数学与统计学教学指导委员会. 数学学科专业发展战略研究报告[J], 中国大学教学, 2005.

③ 王青建. 数学史简编[M]. 北京: 科学出版社, 2004: 177.

④ Moritz R. E. Menmorabilia mathematica[M]. New York: The Macmillan Company, 1914, 14(31): 121-191.

学——教育数学。

一个从师范院校毕业的新数学老师,往往只具备在学校所学的知识基础和在教学实习中积累的有限经验,其中的知识基础主要是数学各分支的知识和数学教学法。虽然数学教学法涵盖了对课程、方法和物质条件的研究,对学习和学习者的研究(要建立数学学习的理论),对教学和教师的研究等方面,但在教学实践中,受制于各方面的条件和学生的经验,该课程往往只成为教学生如何备、上数学课的一门课。由于缺乏衔接数学各分支知识和数学教学法两者的课程,新数学教师的知识结构在这一点上形成了事实上的断层,这当然不利于新教师的成长。

为了消除这个断层,从教育的角度考虑,应当挖掘数学各科知识中对数学教育、教学起方法论、工具性等带有指导作用的数学理论知识,本书称之为教育数学。教育数学以以下专题内容为背景。

一、数学素养

毫无疑问,数学教育的目的之一就是培养学生的数学素养。

1. 数学素养的内涵

对数学素养的理解,有的从心理学方面探索,王子兴(2002)认为:数学素养是数学科学所固有的内蕴特性,是在人的先天生理基础上通过后天严格的数学学习活动获得的、融于身心中的一种比较稳定的状态……是一种心理品质。他接着说,数学素养涵盖创新意识、数学思维、数学意识、用数学的意识理解和欣赏数学的美学价值等五个要素。^①有的从应用层面来讲,朱德全(2002)认为:数学素养的生成是个体在已建立数学经验基础之上对数学感悟、反思和体验的结果。^②教育部高等学校“数学与统计学教学指导委员会”在2005年4月发布的《数学学科专业发展战略研究报告》中对“数学素养”的阐述算是一个权威的说法:

报告总结了优秀学生应具备十种基本的数学能力和五种基本数学素养。其中五种基本的数学素养是:主动探寻并善于抓住数学问题的背景和本质的素养;熟练地用准确、简明、规范的数学语言表达自己数学思想的素养;具有良好的科学态度和创新精神,合理地提出新思想、新概念、新方法的素养;对各种问题以“数学方式”的理性思维,从多角度探寻解决问题的道路的素养;善于对现实世界中的现象和过程进行合理的简化和量化,建立数学模型的素养。

① 王子兴.论数学素养[J].数学通报,2002.

② 朱德全.数学素养构成要素探析[J].中国教育学刊,2002:49-51.

在初等教育中,我们认为数学素养的内涵是:数学素养是“确定、理解和运用数学的能力,以及数学在每个人的现实生活中所起的良好判断能力”。

数学素养依赖于对数学的理解和对知识、技能的综合熟练程度。具体地说,一个具有“数学素养”的人在他的认识世界和改造世界的活动中,常常表现出以下特点:

- (1) 在讨论问题时,习惯于强调定义(界定概念),强调问题存在的条件;
- (2) 在观察问题时,习惯于抓住其中的(函数)关系,在微观(局部)认识基础上进一步做出多因素的全局性(全空间)考虑;
- (3) 在认识问题时,习惯于将已有的严格的数学概念如对偶、相关、随机、非线性、周期性等概念广义化,用于认识现实中的问题。比如,可以用拓扑的观点去研究网络的结构等。

数学素养还包括现代社会所必需的进行数学式的思维和工作能力,这些能力包括:数学问题的提出、理解和评价选择表达数学情景的方式、数学论证,等等。

2. 数学素养的构成要素

数学素养养成的核心是培养学生的问题意识,即在提出、形成和解决数学问题中,使学生能够用数学术语解释新形成的问题,能够处理复杂的信息,简化各种量之间的关系,积极地、创造性地解决数学问题,即使在不熟悉的情境中也能确定和应用相关的数学工具和知识,发现合适的解题方法,并形成分析、推理和交流的能力。在这个过程中,我们可以归纳出数学素养的以下五个要素。

(1) 数学知识素养

数学素养不论从心理层面看还是从应用层面看,都离不开数学知识。数学知识是人类智慧的结晶,是形成数学文化的基础,所以数学知识素养是数学素养的本体性素养。数学素养扎根于数学知识之中,学生在学习数学知识以及应用数学知识的过程中他们的数学素养才得以生长。没有数学知识,数学素养就是无源之水、无本之木。

(2) 数学应用素养

数学应用素养是指主体在现实情境中应用数学知识和技能处理问题的能力,是最直观地反映数学素养的重要方面,个体数学素养的其他方面都是通过在现实情境中对数学的应用而体现的。

数学的产生源于现实的需要,所以数学发展起来了。数学研究的理论也一定要应用于生活实际,否则它就难以发展,例如虚数理论就是这样,诞生之初很不招人待见,得到应用以后得以迅速发展。所以在数学学习过程中,学生就懂得了他所学

的东西并不是乌托邦式的,也不是柏拉图式的,而是可应用于我们身边之事的科学知识;懂得了适当地熟识它对生活是大有用处的,并使他的智性变得敏锐、精确性得到增长。但如果一个人在数学学习中,不关注数学的应用,那么就如杜威所说,“如果仅仅‘懂得’数学上的定义、法则、公式等,就像懂得一个机器的各部分的名称而不懂得它们有什么用处一样”,因此杜威认为:“一个人必须懂得数学概念发生作用的那些问题和数学概念在研究这些问题中的特殊用处,才能说是有数学概念知识的人。”这里“有数学概念知识的人”,显然是指有数学应用能力的人。

(3) 数学思维素养

不同的学科常常有不同的思维方式。

匈牙利著名的数学家路莎·彼得在她的名著《无穷的玩艺》中把数学中常用的化归思维方式作了一个生动的比喻,她写道:“假设在你面前有煤气灶、水龙头、水壶和火柴,现在的任务是要烧水,你应当怎样去做?”正确的回答是:“在水壶中灌上水,点燃煤气,再把水壶放到煤气灶上。”接着路莎又提出第二个问题:“假设所有的条件都不变,只是水壶中已有了足够的水,这时你应该怎样去做?”对此,人们往往回答说:“点燃煤气,再把壶放到煤气灶上。”但路莎认为这并不是最好的回答,因为“只有物理学家才这样做,而数学家则会倒去壶中的水,并且声称我已经把后一问题化归成先前的问题了。”

无独有偶,伊恩·斯图尔特在《现代数学的观念》中也讲述了一个与数学思维有关的故事:一个天文学家、一个物理学家和一个数学家正在苏格兰度假,当他们从飞驰的火车车厢向外眺望时,看到田野里有一只黑色的羊。天文学家说:“多么有趣,所有苏格兰羊都是黑色的。”物理学家不同意:“不!某些苏格兰羊是黑色的。”数学家则慢条斯理地说:“在苏格兰至少存在着一块田地,至少有一只羊,这只羊至少有一侧是黑色的。”数学家的说法体现的是数学思维的严谨性。

思维素养的生成是当代教育家的共识。美国教育家贝斯特(Bester)认为:“学校的存在总要教些什么东西,这个东西就是思维能力。”英国教育哲学家赫斯特强调:“教育的中心目的是向学生传授主要的思维形式。”杜威说:“教育在理智方面的任务是形成清醒的、细心的、透彻的思维习惯。”

数学思维素养可以追溯到古希腊,例如公理化思想的确立,数学成为一门严谨的演绎学科,此后数学就沿着这条路发展至今。我们在学习数学的过程中,受此影响必定养成这种数学独有的思维方式,并能进行数学地思维。美国的舍费尔德教授曾就他1985年出版的《数学解题》一书说过这样一段话:“我现在认识到这一书名的选用不很恰当,我所考虑的单纯的问题解决的思想过于狭隘了。我所希望的并非

仅仅是教会我的学生解决问题——特别是别人提出的问题,而是要帮助他们学会数学地思维。不用说,问题解决构成了数学思维的一个重要部分,但这并非是全部的内容。在我看来,数学地思维意味着:①用数学家的眼光去看待世界,即具有数学化的倾向;构造模型、符号化、抽象,等等;②具有成功地实行数学化的能力。”

(4) 数学思想方法素养

数学思想方法素养表现为主体对数学中蕴含的科学方法和数学特有的方法的掌握和在现实情境中的应用能力。

数学知识本身就是一种重要的方法,这样说的依据是一些数学学科的建立完全依赖于数学方法的成功应用,比如用字母代替数的符号方法,使得代数从算术中脱颖而出,成为独立的数学分支。

张奠宙教授将数学方法分为四个层次^①:第一,基本的和重大的数学思想方法,如模型化方法、微积分方法、概率统计方法、拓扑方法、计算方法等。它们决定一个大的数学学科方向,构成数学的重要基础。第二,与一般科学方法相应的数学方法,如类比联想、综合分析、归纳演绎等一般的科学方法。第三,数学中特有的方法,如数学等价、数学表示、公理化、关系映射反演、数形转换。第四,数学中的解题技巧。

在义务教育阶段,常用的数学思想方法有演绎、归纳、类比、比较、观察、实验、分析、综合、化归、数学模型等。

在具体的问题解决中,数学思维方式就转化表现为数学方法。在数学地思维中,抽象、推理、模型是三个重要的环节,其中抽象最为核心。抽象,从现实生活中得到数学的概念和运算法则;推理,探求未知,得到问题各量之间的内在联系;模型,建立数学与现实世界的联系,为解决同类问题提供数学手段。

(5) 数学精神素养

数学精神包括一般的科学精神、人文精神和数学特有的精神。通常把近代以来科学发展积淀形成的独特的意识、理念、气质、品格、规范和传统等称为科学精神。科学精神的具体内涵主要体现在:①求真精神,②实证精神,③怀疑和批判精神,④创新精神,⑤宽容的精神,⑥社会关怀精神。人文精神是指以人为本、以人为中心的精神,体现在揭示人的生存意义、体现人的价值和尊严、追求人的完善和自由发展的精神。人文精神包括:自由精神、自觉精神、超越精神和人的价值观等。在数

^① 张奠宙,过伯祥,等.数学方法论稿[M].修订版.上海:上海教育出版社,2013,第一章:第三节.

学教育中科学的人文精神包括：严谨、朴实；理智、自律；诚实、求是；勤奋、自强；开拓、创新；宽容、谦恭；等等。

实际上，科学精神和人文精神是不可分割的，只有将两者结合起来才能使其走向良性发展。数学精神就是这两种精神的一种很好的结合。侯维民认为：“数学精神是人们在数学活动中形成的价值观念和行为规范。数学精神的内涵十分丰富，主要有数学理性精神、数学求真精神、数学创新精神、数学合作与独立思考精神等。”王健吾认为，“数学运用一切推理手段，力求获得对世界逻辑本质的理解”，因而“数学精神就是人们客观地、精确地寻找世界逻辑关系的精神”。

日本数学家米山国藏的观点，可认为是对数学特有的精神的很好的概括，他说：“贯穿在整个数学中的精神包括活动于实际问题中的数学精神；数学的精神活动的诸方面，包括充满在整个数学中的应用化的精神；充满在整个数学中的扩张化、一般化的精神；充满在整个数学中的组织化、系统化的精神；遍及在整个数学中的研究的精神；致力于发明发现的精神；充满在整个数学中的统一的建设的精神；充满在整个数学中的严密化的精神；充满在整个数学中的‘思想的经济化’的精神。”

结合数学的发展和人类对数学的追求，我们可归纳数学精神的两个侧面，即数学中的科学精神：应用化精神，扩张化、一般化精神，组织化、系统化精神，统一建设精神，严密化精神，最优化精神，等等。数学中的人文精神：自我激励、自我完善精神，求实探索、致力发现精神，质疑、求美精神，唯物辩证、创新进取精神，无私奉献、团结协作精神，等等。

数学精神对人类生活的影响，正如美国应用数学家克莱因在《西方文化中的数学》中所说：“数学精神激发、促进、鼓舞并驱使人类的思维得以运用到最完善的程度，也正是这种精神，试图决定性地影响人类的物质、道德和社会生活；试图回答人类自身存在提出的问题；努力去理解和控制自然；尽力去探求和确立已经获得知识的最深刻和最完美的内涵。”

二、数学教师的数学素养

作为一个合格的教师，需要具备多种素养，例如专业知识素养、文化素养、语言素养、情感素养、方法论素养，等等。不过在这一专题里，我们仅对数学教师的数学素养作以下几方面的讨论。

1. 了解数学知识间的相通性

数学教师的数学知识主要是在师范院校读数时积累的，但是学过一些数学专

业知识课程,并不等于就此了解了数学,只有当他了解并掌握了数学各专业知识的内在联系,他在对数学的认识上才算上了一个台阶。例如,已经成为数学分支的解析几何,就是代数学与几何学知识内在相通性的体现。又例如,从微积分到实变函数到函数空间,这是分析学的学习路径,从行列式到矩阵到向量空间,这是线性代数学习的路径,但它们最后都可归结为研究定义了一些运算并符合一定运算律的集合的性质,这是抽象代数的研究范畴。认识到这一点,我们才能体会到数学的高度抽象性和联系的广泛性,这也是一个教师具有扎实的数学功底的表现。

2. 善于从教育的角度把握数学本质

从教育的角度说,把握数学本质,就是看是否把握住了数学素养的内涵。当今世界上数学教学大致有两种模式:一种是认知心理学模式,是指向数学理解的模式;另一种是社会文化模式,它通过让学习者成为一名数学实践共同体的成员,帮助其进行思维。这种模式在教学中强调超越“对数学的结构、概念、程序和事实性知识的掌握”,注重“数学实践共同体解决问题过程中所包含的‘心理习惯’:架构问题、寻找解决方案、表述猜想、将数学逻辑和数学推理作为自己进行推理的依据,注重通过对数学共同体的话语方式、价值观和规范的逐步掌握而成为数学的识知者、评价者、应用者和制造者”^①。社会文化模式的教学要培养的不仅是数学思维,更有实践中的数学思维。^②

我国目前数学教学的模式受各方面条件的限制,更接近于认知心理学模式。但这不妨碍我们的数学老师在适当的时机,用合适的内容实践第二种教学模式,只要我们的老师真正理解了数学素养的内涵。

以下案例体现了这种尝试。

在一次数学课上,介绍一元二次方程的韦达定理后,作为老师的我向学生简要说明一元三次方程 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ 也有韦达定理:(通常的数学教学首先是介绍一元二次方程的韦达定理,紧接着就是关于韦达定理各种变式的练习题,为学生的再创造奠定基础。这位老师的“简要说明”走出了教材的限制,为学生的“再发现”提供了机会,如果学生自己提出:“一元三次方程”是否有韦达定理将更有价值。这种不局限教材引领而提出问题对学生数学素养生成极为重要。)

① Stein, M. K., In: Brophy, J.. Subject-specific instructional: methods and activities [M]. Elsevier Science Ltd, 2001.

② Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M. A., Silver, E. A. 实施初中数学课程标准的教学案例[M]. 李忠如,译. 上海:上海教育出版社,2001.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a}, \\ x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a} \end{cases}$$

同时和学生一起探索如何利用韦达定理理解一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$,

设 $x_1 > x_2$, 由
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1x_2 = \frac{c}{a} \end{cases},$$

可得 $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = \frac{b^2}{a^2} - \frac{4c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{a^2},$

当 $b^2 - 4ac \geq 0$ 时, 可得 $x_1 - x_2 = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a}$ (或 $-\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a}$),

解方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 - x_2 = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a} \end{cases}, \text{得} \begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{cases}.$$

这样, 由求根公式可得到韦达定理, 再由韦达定理求得求根公式, 学生对两者及其联系都有了深刻的理解。课后, 有个学生跑过来问我, 能不能由三次方程的韦达公式来求它的求根公式? (表明学生有数学探索精神以及有了数学类比思想方法) 我当时并没在意, 因为三次方程求根公式很复杂, 对一个初中学生来说可能是无法解决的, 但又不能打击他的积极性, 于是轻描淡写地说了一句: 那你试试看吧。(一句“你试试看吧”给学生提出了挑战, 激发了学生的探究的欲望!) 没想到, 第二天他拿了厚厚一叠草稿纸来找我, 说: “我本想把韦达定理变形为

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = A \\ x_1 + x_2 - x_3 = B \\ x_1 - x_2 - x_3 = C \end{cases}$$

的形式, 然后解方程组, 但没有成功, 不过我把韦达定理变形为

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = A \\ x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = B \\ x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = C \end{cases}$$

的形式。如果这个方程组解出了, 那我就解出了三次方程。可是, 这个方程组我也解

不出,但我觉得它的形式很漂亮(这个过程使学生体验了数学发现的过程以及数学美的欣赏)。”^①

我们的老师还可以创造条件,引领学生发现现实生活中的数学关系。相信学生在具有真实情境的问题中,会进行不同方案的抉择、质疑、反思、联想等,而不是像解题那样追求唯一正确的答案。

3. 了解数学发展的动因

有人认为一个数学教师应当要了解一些基本的数学史,这是对的。但是他们了解数学史的目的是为了在课堂上通过讲述“几何学来源于古代埃及土地面积的测量,三角学来源于古希腊的天文测量,勾股定理来源于中国古代测量工具——勾股的制作和在实际测量中的使用,等等”,把书上干巴巴的数学内容丰满起来。这里我们暂且不说了解了数学发展史,可以通过讲授古今中外著名数学家的执着追求、辛勤付出和伟大成就,激发学生的学习兴趣,激励学生努力学习、立志成才。这里我们仅说教师学习数学史,更重要的是了解数学(知识)发展的动因。在义务教育阶段,学生的数学知识从无到有、从有到多,在一定程度上就像人类数学知识的建立和发展。教师应当把握数学发展的脉动,并将此渗透到数学教学之中,将知识点讲透。

例如我们讲授弧度制,如果我们只是就事论事地讲授,学生肯定印象不深,只能囫囵吞枣。但如果我们能从数学(知识)发展的角度设计教学,从角的大小的度量的度、分、秒制讲起,过程中不断进行比较对照,相信学生的印象就会深刻得多。

数学史知识赋予数学课堂教学的启示是:新的知识点应当而且可以从知识的本源讲起。

4. 数学地关注教材、组织教学

有一句俗语说得好,“外行看热闹,内行看门道”。数学教师面对数学教材,应当全力领会教材的编排意图,并有自己的见解。在教学中能时时处处考虑如何培养学生的数学素养,讲授时(有条件时)总是从具体到抽象,深入浅出,具有把数学思维过程在课堂教学中表现出来的本领。

例如,关于三角形概念。

三角形概念无论小学教材还是中学教材,都给出了一个说法。中学浙教版(2013)八年级上册给出的是:“由不在同一条直线上的三条线段首尾顺次相接所组

^① 杨芳芳,林龙英,王保燕.教学论数学素养[EB/OL]. http://wenku.baidu.com/link?url=HbvV7UenENRkoV2dkImdL4ogkc_cGnLHg_jNgsojqYmq1AJKdjfy0g3fj2t3FfjAnB_m5CYP19aQMxV8ai4PsaV5F5c2kzBJt4SsVhxU6Oe.