普通高等教育"十一五"规划教材

大学数学

——线性代数

主编 谢寿才 陈渊

科学出版社

大 学 数 学

——线性代数

主　编　谢寿才　陈　渊
副主编　邓丽洪　雷开泉

科 学 出 版 社
北　京

内 容 简 介

本书以矩阵为主线. 首先介绍矩阵及其运算, 而将行列式作为方阵的行列式的运算来处理. 在此基础上, 介绍矩阵的初等变换、矩阵的秩, 通过矩阵的初等变换来解线性方程组. 本书分为五章. 第1章介绍矩阵; 第2章讲述矩阵的初等变换与线性方程组; 第3章介绍向量组的线性相关性; 第4章介绍矩阵的特征值与特征向量; 第5章介绍二次型的相关知识. 全书注重各个知识点的衔接问题, 例题、习题的配置适中, 讲述合理, 遵循学习规律, 符合学生学习习惯.

本书适合普通高等教育师范类院校的一年级学生和相关人员参考使用.

图书在版编目(CIP)数据

大学数学——线性代数/谢寿才, 陈渊主编. —北京: 科学出版社, 2010
ISBN 978-7-03-029418-0

Ⅰ.大… Ⅱ. ①谢… ②陈… Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教材②线性代数-高等学校-教材 Ⅳ. ①O13②O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2010) 第 214746 号

责任编辑: 张中兴 杨 然 / 责任校对: 郭瑞芝
责任印制: 张克忠 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

骏杰印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011年1月第 一 版 开本: B5(720×1000)
2011年1月第一次印刷 印张: 8 1/2
印数: 1—4 500 字数: 165 000

定价: 18.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前　　言

本书根据高等学校非数学专业大学数学——线性代数的教学大纲与考研大纲编写而成. 为保证本书的适用性, 在编写过程中, 我们对传统的《线性代数》教材, 从内容安排上进行了一定的调整, 力求例题、习题的配置更合理, 更具代表性. 全书以“矩阵”为主线, 突出“矩阵方法”, 将矩阵的初等变换作为课程内容的主要运算工具. 鉴于目前“线性代数”课教学学时的普遍减少, 本书在保证理论的完整性的前提下, 略去了一些非重点内容的定理证明.

本书第 1 章由陈渊、雷开泉编写, 第 2、3 章由邓丽洪编写, 第 4、5 章由谢寿才编写, 全书由谢寿才、陈渊统稿定稿.

全书共 5 章, 授课学时约为 36 学时.

本书的出版得到科学出版社的大力支持, 在此特别感谢科学出版社数理分社的张中兴老师为本书出版付出的大量心血.

由于编者水平有限, 书中疏漏和不当之处在所难免, 敬请读者批评指正, 以期完善.

编　者

2010 年 11 月

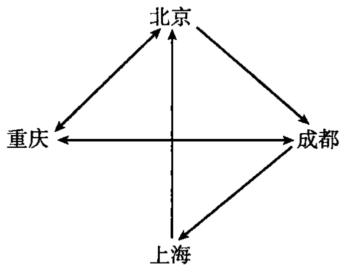
目　录

第 1 章　矩　　阵

1.1　矩阵的概念

1.1.1　引例

引例 1　某航空公司有下面 4 个城市之间的航线图:



为了方便, 常用下面的数表表示. 其中“1”表示有航班,“0”表示没有航班. 得到下面一个数表, 这个数表反映了 4 个城市之间交通的连接情况.

$$\begin{array}{c} \\ \text{重庆} \\ \text{北京} \\ \text{成都} \\ \text{上海} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{重庆} & \text{北京} & \text{成都} & \text{上海} \end{array} \\ \left\{ \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right\} \end{array}$$

引例 2　线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

的系数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$, $b_i(i=1,2,\cdots,m)$ 按原来的位置构成一个数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

这个数表决定了线性方程组是否有解, 解是什么等问题. 因此, 研究这样的数表很有必要.

1.1.2 矩阵的概念

定义 1.1 由 $m \times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 m 行 n 列的数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

称其为一个 m 行 n 列矩阵, 简称为 $m \times n$**矩阵**. 矩阵通常用 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 等来表示. 记为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$, 其中 a_{ij} 为第 i 行第 j 列交叉位置上的元素.

元素 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 都为实数的矩阵称为**实矩阵**; 元素 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 中有复数的矩阵称为**复矩阵.**

例如, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ -9 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ 是一个 2×4 实矩阵, $\begin{pmatrix} 13 & 6 & 2\mathrm{i} \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ 是一个 3×3 复矩阵.

元素全为零的矩阵称为**零矩阵**, $m \times n$ 零矩阵记作 $\boldsymbol{O}_{m\times n}$.

在矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 中, 当 $m=1$ 时, 称为**行矩阵**; 当 $n=1$ 时, 称为**列矩阵**; 当 $m=n$ 时, 称为 n 阶**方阵**, 简记为 $\boldsymbol{A}_n$.

若矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的行数相同, 列数也相同, 则称 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为**同型矩阵.**设矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是同型矩阵, 如果对一切 i,j, 都有 $a_{ij}=b_{ij}$, 则称矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 相等, 记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

[注] 零矩阵不一定是相等的. 例如, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1.1.3 几种特殊的矩阵

1. 对角矩阵

称方阵

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

为**对角矩阵**,记为 $\boldsymbol{\Lambda}$ 或 $\operatorname{diag}(a_1, a_2, \cdots, a_n)$. 其特点是: 除从左上角到右下角 (称为**主对角线**) 上的元素以外, 其余元素都为零.

2. **数量矩阵**

若对角矩阵的主对角线上的元素全为非零常数 k, 即

$$\begin{pmatrix} k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k \end{pmatrix}_{n\times n},$$

则称该矩阵为**数量矩阵**(**或标量矩阵**), 记为 $k\boldsymbol{E}$.

3. **单位矩阵**

若对角矩阵的主对角线上的元素全为 1, 即

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{n\times n},$$

称其为 n 阶**单位矩阵**, 记为 $\boldsymbol{E}_n$ 或 $\boldsymbol{E}$.

4. **三角阵**

主对角线上 (下) 方元素全为 0 的方阵, 称为**下 (上) 三角阵**. 如

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为**下三角阵**, $\boldsymbol{B}$ 为**上三角阵**.

1.2 矩阵的运算

1.2.1 矩阵的线性运算

定义 1.2 设矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij}), \boldsymbol{B} = (b_{ij})$ 都是 $m \times n$ 矩阵, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$

的和记为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$, 规定

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

[注]　只有当两个矩阵是同型矩阵时, 才能进行加法运算.

设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$, 记 $-\boldsymbol{A}=(-a_{ij})$, 称 $-\boldsymbol{A}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**负矩阵**.这样, 矩阵的减法可定义为

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B}).$$

显然

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}.$$

定义 1.3　数 λ 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的乘积, 记作 $\lambda\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{A}\lambda$, 规定为

$$\lambda\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\lambda=(\lambda a_{ij})=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

数与矩阵的乘积运算称为**数乘运算**. 特别地, $1\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$, $(-1)\cdot\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{A}$.

矩阵加法和数乘两种运算, 统称为矩阵的**线性运算**. 矩阵的线性运算满足以下运算律 (设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都为 $m\times n$ 矩阵, λ,μ 都为数):

(1) **加法交换律**　$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$;

(2) **加法结合律**　$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$;

(3) **数乘结合律**　$\lambda(\mu\boldsymbol{A})=\mu(\lambda\boldsymbol{A})=(\lambda\mu)\boldsymbol{A}$;

(4) **数乘矩阵的分配律**　$(\lambda+\mu)\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A}$,

$$\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\lambda\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}.$$

例 1.1　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) 求 $4\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{B}$; (2) 已知 $4\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{X}=3\boldsymbol{B}$, 求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

解 (1) $$4\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{B}=4\begin{pmatrix}1&7&-1\\4&2&3\\2&0&1\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1&0&-1\\4&0&3\\-3&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}4&28&-4\\16&8&12\\8&0&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&0&-3\\12&0&9\\-9&0&3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&28&-1\\4&8&3\\17&0&1\end{pmatrix}.$$

(2) $$\boldsymbol{X}=\frac{1}{2}(4\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{B})=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&28&-1\\4&8&3\\17&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&14&-\frac{1}{2}\\2&4&\frac{3}{2}\\\frac{17}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

1.2.2 矩阵的乘法

定义 1.4 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是一个 $m\times s$ 矩阵, $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 是一个 $s\times n$ 矩阵, 规定矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的乘积是一个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})$, 其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj},\quad i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n.$$

记作 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$, 常读作 **$\boldsymbol{A}$左乘$\boldsymbol{B}$或$\boldsymbol{B}$右乘$\boldsymbol{A}$**.

例 1.2 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&4\\1&-5\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0\\-3&-6\end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$.

解 $$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}-2&4\\1&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\-3&-6\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-2\times2+4\times(-3)&-2\times0+4\times(-6)\\1\times2+(-5)\times(-3)&1\times0+(-5)\times(-6)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-16&-24\\17&30\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}2&0\\-3&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&4\\1&-5\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2\times(-2)+0\times1&2\times4+0\times(-5)\\-3\times(-2)+(-6)\times1&-3\times4+(-6)\times(-5)\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & 8 \\ 0 & 18 \end{pmatrix}.$$

例 1.3 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & -8 & 0 & 2 \\ 10 & 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$, $B = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求 AB.

解 $AB = AE = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & -8 & 0 & 2 \\ 10 & 1 & 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & -8 & 0 & 2 \\ 10 & 1 & 3 & 7 \end{pmatrix} = A.$

矩阵乘法满足以下运算规律:

(1) 结合律 $(AB)C = A(BC)$;

(2) 分配律 $A(B+C) = AB + AC$, $(B+C)A = BA + CA$;

(3) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$, 其中 λ 为数;

(4) 设矩阵 $A_{m\times n}$, 则 $AE_n = E_m A = A$.

[注] 由例 1.2 知, 矩阵乘法不满足交换律, 即 $AB = BA$ 不一定成立.

定义 1.5 若矩阵 A 与矩阵 B 满足 $AB = BA$, 则称矩阵 A, B**可交换**, 否则称为**不可交换**. 显然, 可交换的矩阵一定是方阵.

例 1.4 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, 判断矩阵 A 与矩阵 B, 矩阵 C 与矩阵 D 是否可交换.

解 因 $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$, $AB \neq BA$, 因此, 矩阵 A 与 B 不可交换;

因 $CD = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, $DC = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, 即 $CD = DC$, 因此, 矩阵 C 与矩阵 D 可交换.

[注] 矩阵乘法也不满足消去律, 即由 $AB = AC, A \neq O$ 不能推出 $B = C$. 例如, 若 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, 有

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = AC,$$

但 $B \neq C$. 特别地, 由 $AB = O$ 不能得出 $A = O$ 或 $B = O$.

例 1.5 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 7\\ 4 & 2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 4 & -22\end{pmatrix}$, 求满足 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 的矩阵 $\boldsymbol{X}$.

解 设 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, 则

$$\boldsymbol{AX}=\begin{pmatrix}1 & 7\\ 4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+7c & b+7d\\ 4a+2c & 4b+2d\end{pmatrix},$$

所以

$$\begin{cases} a+7c=1,\\ b+7d=1,\\ 4a+2c=4,\\ 4b+2d=-22.\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} a=1,\\ b=-6,\\ c=0,\\ d=1.\end{cases}$$

因此, $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1 & -6\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

定义 1.6 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 阶方阵, 记

$$\boldsymbol{A}^1=\boldsymbol{A},\quad \boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A},\cdots,\quad \boldsymbol{A}^{k+1}=\boldsymbol{A}^k\cdot\boldsymbol{A},$$

其中 k 为正整数, 称 $\boldsymbol{A}^k$ 为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 **k次幂**, 也就是 k 个 $\boldsymbol{A}$ 的连乘积. 规定 $\boldsymbol{A}^0=\boldsymbol{E}$. 容易验证方阵的幂运算满足以下运算律:

$$\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}^l=\boldsymbol{A}^{k+l},\quad \left(\boldsymbol{A}^k\right)^l=\boldsymbol{A}^{kl},$$

其中 k, l 都为正整数.

若多项式 $f(x)=a_kx^k+a_{k-1}x^{k-1}+\cdots+a_1x+a_0$ ($a_k,a_{k-1},\cdots,a_0$ 均为实数) 中的 x 以方阵 $\boldsymbol{A}$ 代替, 得

$$f(\boldsymbol{A})=a_k\boldsymbol{A}^k+a_{k-1}\boldsymbol{A}^{k-1}+\cdots+a_1\boldsymbol{A}+a_0\boldsymbol{E},$$

称其为**方阵$\boldsymbol{A}$的多项式**.

可以验证, 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵, 则有 $f(\boldsymbol{A})\cdot\varphi(\boldsymbol{A})=\varphi(\boldsymbol{A})\cdot f(\boldsymbol{A})$, 其中 $f(\boldsymbol{A}),\varphi(\boldsymbol{A})$ 都为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的多项式.

因矩阵的乘法不满足交换律, 因此, 一般情况下 $(\boldsymbol{AB})^k\neq\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^k,\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2\neq(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})$, $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2\neq\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$, 等等.

1.2.3　矩阵的转置

定义 1.7　设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$, 把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行换成同序数的列, 得到新矩阵 $\boldsymbol{B}=(a_{ji})_{n\times m}$, 称矩阵 $\boldsymbol{B}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**转置矩阵**, 记作 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

例如, $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&2\\4&5&8\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&4\\2&5\\2&8\end{pmatrix}$.

矩阵的转置也是一种运算, 并且满足以下运算律:

(1) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$;

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$;

(3) $(\lambda\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=\lambda\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$;

(4) $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

(2) 和 (4) 可推广到有限个的情形:

$$(\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2+\cdots+\boldsymbol{A}_k)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A}_2^{\mathrm{T}}+\cdots+\boldsymbol{A}_k^{\mathrm{T}};$$
$$(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_k)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{k-1}^{\mathrm{T}}\cdots\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}.$$

例 1.6　已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&3&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&3&-1\\4&2&0\\2&0&1\end{pmatrix}$, 求 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}$.

解　因 $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3&-1\\4&2&0\\2&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&3&-2\\13&9&-1\end{pmatrix}$, 所以 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}-1&13\\3&9\\-2&-1\end{pmatrix}$.

或 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&4&2\\3&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&3\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&13\\3&9\\-2&-1\end{pmatrix}$.

设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵, 如果 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$, 即对一切的 $i,j(1\leqslant i,j\leqslant n)$, 有

$$a_{ij}=a_{ji},$$

则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为**对称矩阵**.

设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵, 如果 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$, 即对一切的 $i,j(1\leqslant i,j\leqslant n)$, 有

$$a_{ij}=-a_{ji},$$

则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为**反对称矩阵**. 当 $i=j$ 时, 由 $a_{ii}=-a_{ii}$, 得 $a_{ii}=0$. 因此, 反对称矩阵的主对角线上的元素都为 0.

例如, $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}13&2&-3\\2&-1&0\\-3&0&1\end{pmatrix}$ 为 3 阶对称矩阵, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&-2&3\\2&0&0\\-3&0&0\end{pmatrix}$ 为 3 阶反对称矩阵.

例 1.7 设矩阵 $\boldsymbol{B}_{m\times n}$, 证明 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 都是对称矩阵.

证明 因 $(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$, 所以 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$ 为对称阵; 同样, $(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 也是对称阵.

1.2.4 共轭矩阵

设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为复 (数) 矩阵, 称矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}=(\overline{a_{ij}})$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**共轭矩阵**, 其中 $\overline{a_{ij}}$ 表示 a_{ij} 的共轭复数.

共轭矩阵满足以下运算律:

(1) $\overline{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}=\overline{\boldsymbol{A}}+\overline{\boldsymbol{B}}$;

(2) $\overline{\lambda\boldsymbol{A}}=\overline{\lambda}\,\overline{\boldsymbol{A}}$;

(3) $\overline{\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}}=\overline{\boldsymbol{A}}\cdot\overline{\boldsymbol{B}}$;

(4) $\overline{\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}}=(\overline{\boldsymbol{A}})^{\mathrm{T}}$,

其中 λ 是复数.

1.3 方阵的行列式

2 阶方阵 $\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$ 的行列式为 $\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$.

3 阶方阵 $\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$ 的行列式为

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

为了研究 n 阶方阵的行列式的定义, 下面先介绍全排列及其逆序数.

1.3.1 排列与逆序

定义 1.8 将自然数 $1,2,\cdots,n$ 排成一列称为这 n 个自然数的一个**全排列**. n 个数的不同排列有 $n!$ 个, 我们规定按数的大小次序, 由小到大的排列称为**自然排列**.

定义 1.9 在一个排列中, 若某个较大的数排在某个较小的数前面, 就称这两个数构成一个**逆序**, 一个排列中出现的逆序的总数称为这个排列的**逆序数**,通常记为 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$.

逆序数为奇数的排列称为**奇排列**, 逆序数为偶数的排列称为**偶排列**.

例 1.8 求全排列 3 2 5 1 4 的逆序数.

解 在排列中,

第一个数 3, 排在首位, 没有逆序, 其逆序数为 0;

第二个数 2, 比 2 大排在 2 的前面有 1 个数, 构成 1 个逆序, 其逆序数为 1;

第三个数 5, 5 是这个排列中最大的数, 没有逆序, 其逆序数为 0;

第四个数 1, 比 1 大排在 1 的前面有 3 个数, 构成 3 个逆序, 其逆序数为 3;

第五个数 4, 比 4 大排在 4 的前面有 1 个数, 构成 1 个逆序, 其逆序数为 1;

所以, 全排列 3 2 5 1 4 的逆序数为

$$\tau(32514) = 0 + 1 + 0 + 3 + 1 = 5,$$

为奇排列.

定义 1.10 在排列中, 将任意两个元素对调, 其余元素不动, 称为一次**对换**. 将相邻两个元素对调, 称为**相邻对换**.

定理 1 对换改变排列的奇偶性.

证明 先考虑相邻对换.

对排列 $a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m$ 中的相邻元素 a,b 作对换, 除 a,b 外其他元素的逆序数没有改变.

当 $a<b$ 时,

$$\tau(a_1\cdots a_l bab_1\cdots b_m) = \tau(a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m) + 1;$$

当 $a>b$ 时,

$$\tau(a_1\cdots a_l bab_1\cdots b_m) = \tau(a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m) - 1.$$

因此, 相邻对换改变排列的奇偶性.

再考虑一般情形.

对于排列 $a_1\cdots a_l ab_1\cdots b_m bc_1\cdots c_n$, 对换 a,b 相当于先将元素 a 与 $b_1,b_2,\cdots,b_m$ 逐一作相邻对换, 施行了 m 次相邻对换; 再将元素 b 与 $a,b_m,\cdots,b_2,b_1$ 逐一作相邻对换, 施行了 $m+1$ 次相邻对换, 共施行 $2m+1$ 次相邻对换得到排列 $a_1\cdots a_l bb_1\cdots b_m ac_1\cdots c_n$. 施行一次相邻对换, 改变一次排列的奇偶性; 施行 $2m+1$ 次相邻对换, 排列的奇偶性改变奇数次. 因此, 将一个排列中任意两个元素对换, 排列的奇偶性改变.

定理 2 自然数 $1\sim n(n\geqslant 2)$ 的全排列中, 奇偶排列各占一半, 各为 $\frac{n!}{2}$ 个.

证明 设 $1\sim n(n\geqslant 2)$ 这 n 个自然数的全排列中, 奇排列有 p 个, 偶排列有 q 个, 则 $p+q=n!$. 对 p 个奇排列, 施行同一对换, 由定理 1, 得到 p 个偶排列 (而且是 p 个不同的偶排列). 因为总共有 q 个偶排列, 所以 $p\leqslant q$.

同样, 对 q 个偶排列作类似处理, 得 $q\leqslant p$.

所以, $p=q=\frac{n!}{2}$.

1.3.2 n 阶方阵的行列式的定义

定义 1.11 由 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n^2 个元素组成如下形式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称为 n **阶行列式**, 记为 $|\boldsymbol{A}|$ 或 $\det \boldsymbol{A}$. 也可用 D 来表示. 它等于 $n!$ 项的代数和, 其中每一项都是取自不同行、不同列的 n 个元素的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$, 并赋予符号 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$. 这里, $j_1j_2\cdots j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的某个全排列, $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 为该排列的逆序数, 即

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

例如, 6 阶方阵的行列式由 6! 项组成的代数和, 对于含 $a_{12}a_{23}a_{35}a_{41}a_{54}a_{66}$ 的项, 由于 $\tau(235146)=4$, 所以其符号为正.

特别地, 当 $n=1$ 时,$|A|=|a_{11}|=a_{11}$, 此处行列式 $|a|$ 不是 a 的绝对值, 如行列式 $|-1|=-1$.

例 1.9 计算方阵的行列式

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

解 在乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$ 中, 只有当 $j_1=4, j_2=3, j_3=2, j_4=1$ 时, 才不