高等学校“十二五”规划教材

微积分

（经济类）

下册

王佳秋　陈孝国　刘彦慧　等编
朱　捷　主审

化学工业出版社

高等学校“十二五”规划教材

微积分（经济类）

下册

王佳秋　陈孝国　刘彦慧　等编

朱　捷　主审

化学工业出版社

·北京·

本书根据高等院校经济管理类本科微积分课程的教学大纲编写而成，注重从实际应用中引入基本概念、基本理论，突出微积分的基本思想和方法的介绍．本书精选了大量具有实际背景的例题和习题，以培养和提高学生的数学素质、创新意识以及运用数学工具解决实际问题的能力．本书分上、下两册，共 11 章．其中上册 6 章，内容包括：函数、极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分；下册 5 章，内容包括：多元函数的微积分、无穷级数、微分方程、差分方程、数学实验．书后附有习题参考答案及提示.

本书可作为普通高等院校经管类专业的“微积分”课程教材，也可以供相关科技人员参考.

图书在版编目（CIP）数据

微积分（经济类）下册/王佳秋，陈孝国，刘彦慧等编．—北京：化学工业出版社，2011.2
高等学校“十二五”规划教材
ISBN 978-7-122-10318-5

Ⅰ．微… Ⅱ．①王…②陈…③刘… Ⅲ．微积分-高等学校-教材 Ⅳ．O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 264266 号

责任编辑：唐旭华　袁俊红　　文字编辑：李　玥
责任校对：徐贞珍　　装帧设计：关　飞

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街 13 号　邮政编码 100011）
印　　刷：北京市振南印刷有限责任公司
装　　订：三河市宇新装订厂
710mm×1000mm　1/16　印张 11　字数 219 千字　　2011 年 2 月北京第 1 版第 1 次印刷

购书咨询：010-64518888(传真：010-64519686)　售后服务：010-64518899
网　　址：http://www.cip.com.cn
凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：25.00 元

前言

数学是开启科学大门的钥匙，是一切科学的基础．任何一门科学，只有与数学紧密结合，并且通过数学方法来表达和处理后，才能成为一门精密的科学．在过去的一个世纪中，数学理论与应用得到了极大的发展，使得数学所研究的两个重要内容，即“数量关系”和“空间形式”具有了更丰富的内涵和更广泛的外延．数学作为一门工具，几乎在所有的学科中大展身手，产生了前所未有的推动力．

经管类微积分与通常的高等数学课程相比有其特殊性，需要正确认识经济与数学的关系．将数学用于经济学，揭示仅靠定性分析难以阐明的现代经济错综复杂的相互关系及其变动趋势，并把握经济决策的方向．将数学用于经济学，并不是用数学取代经济学，而是利用数学分析为经济分析服务．本书很好地把握了经管类微积分课程的定位和发展，既保持本课程教学体系的合理性和教学内容的系统性，又体现经济概念的严谨性，体现了“数学为体，经济为用”的经济数学特点．

本书根据高等院校经济管理类本科微积分课程的教学大纲编写而成，遵循循序渐进的原则，深入浅出．从典型的自然科学与经济分析中的实际例子出发，从直观的几何现象出发，引出微积分的基本概念，如极限、导数及积分．再从理论上进行论证，得到一些有用的方法和结果，然后再利用它们解决更多的自然科学和经济分析中的实际问题．这样从特殊到一般，再从一般到特殊，从具体到抽象，再从抽象到具体，将微积分和经济分析的有关内容有机地结合起来，为学生将来利用数学分析的方法讨论更深入的经济问题打下良好的基础．

作为一门数学基础课，本书不仅保持了数学学科的科学性和系统性，也较好地体现了“实用、有效”的原则．在教材体系设计及知识介绍方法上我们进行了必要的尝试，淡化了运算上的一些技巧，降低了一元函数的极限与连续的理论要求，从简处理了一些公式的推导和一些定理的证明．在保证教学要求的同时，让教师容易组织教学，学生容易理解接受，并突出数学思想的介绍、数学方法的应用．本书扩大了经济应用实例的范围，让学生更多地了解应用数学知识、数学方法解决经济管理类问题的实例，增强他们的应用意识和能力．注重对学生数学素质、计算及应用能力、创新意识的培养，介绍了 Matlab 软件在高等数学中的应用，并适度嵌入了与“高等数学”密切相关的数学实验课题，通过使用 Matlab 软件进行各种运算、绘制图形和完成实验课题，能够体验该软件的强大功能，大大拓宽了高等数学的应用范围，过去由于计算技术的局限“望洋兴叹”的问题，如今可以通过数学实验轻松解决．教材在加强应用能力培养、提高综合分析能力和创新能力方面为学生奠定了良好的数学基础．根据编者多年来在经管类微积分教学方面积累的经验，编写中

充分考虑了公共数学基础课程的系统性，注意到了时代的特点，同时也注意到与后续课程的衔接，本着加强基础、强化应用、整体优化、注意后效的原则，力争做到科学性、系统性和可行性的统一.

本书可作为普通高等院校经济管理类各专业的“微积分”课程教材，也可以供相关科技人员参考.

本书分上下两册. 上册内容为一元函数的微积分，下册内容包括多元函数的微积分、无穷级数、微分方程、差分方程、数学实验. 书中带“*”的部分较难，可选学. 下册由王佳秋、陈孝国、刘彦慧、张丽娟、杜广环、王春、孙璐、徐秀艳、李炎、张亚平、于海姝等人参与编写，全书由朱捷审定.

在本书的编写过程中，宋作忠教授、母丽华教授和徐静副教授都提出了许多宝贵建议，在此表示感谢.

由于水平有限，书中的不妥之处恳请广大读者批评指正，以期不断完善.

编　者

2010 年 10 月

目　录

第7章　多元函数的微积分

7.1　空间解析几何基本知识

我们已经研究了一元函数微积分，但在实际应用中，往往要面对一个变量依赖于多个变量的情形，即多元函数．本章我们先介绍空间解析几何的基础知识，为多元函数的研究提供几何背景，然后讨论多元函数微积分学．本书主要讨论二元函数，其理论及方法不难向更一般的多元函数推广．

7.1.1　空间直角坐标系

7.1.1.1　空间直角坐标系的建立

（1）**坐标系**

公共原点 O，三条互相垂直的数轴 Ox 轴（横轴），Oy 轴（纵轴）、Oz 轴（竖轴），符合右手规则.

点 O 叫做**坐标原点**，数轴 Ox,Oy,Oz 统称为**坐标轴**．xOy,yOz,zOx 为三个**坐标面**．三个坐标面将空间分成八个部分，每一部分称为一个**卦限**，如图 7.1.1 所示.

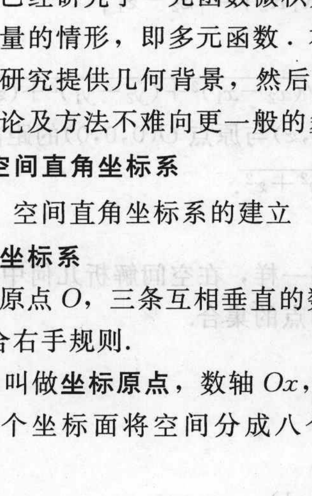

图 7.1.1

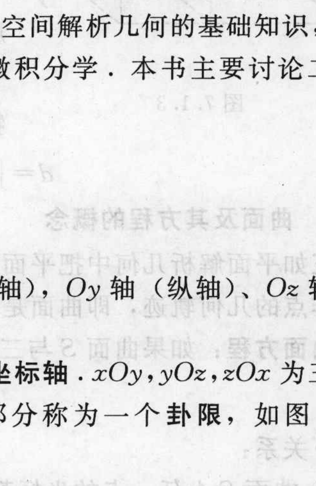

图 7.1.2

（2）**点的坐标**

设 M 为空间中一点，过 M 点作三个平面分别垂直于三条坐标轴，它们与 x 轴、y 轴、z 轴的交点依次为 P,Q,R，如图 7.1.2 所示．设 P,Q,R 三点在三个坐标轴的坐标依次为 x,y,z. 于是，空间一点 M 就唯一地确定了一个有序数组 (x,y,z) 称为 M 的**直角坐标**，x,y,z 分别称为点 M 的**横坐标**、**纵坐标**和**竖坐标**，记为 $M(x,y,z)$.

7.1.1.2　两点间的距离

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$为空间两点，我们可用两点的坐标来表达它们间的距离 d.

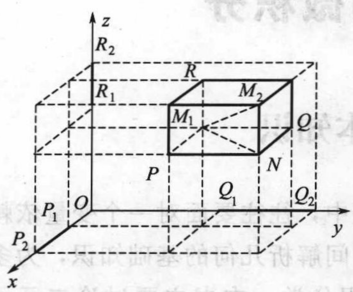

图 7.1.3

将 M_1,M_2的坐标画出，如图 7.1.3 所示，有

$$d^2=|M_1M_2|^2=|M_1N|^2+|NM_2|^2$$
$$=|M_1P|^2+|M_1Q|^2+|M_1R|^2.$$

由于$|M_1P|=|P_1P_2|=|x_2-x_1|$，

$|M_1Q|=|Q_1Q_2|=|y_2-y_1|$，

$|M_1R|=|R_1R_2|=|z_2-z_1|$，

所以

$$d=|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

特别地，$M(x,y,z)$与原点 $O(0,0,0)$的距离为

$$d=|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

7.1.2　曲面及其方程的概念

正如平面解析几何中把平面看作动点的轨迹一样，在空间解析几何中，把曲面也看作点的几何轨迹，即曲面是具有某种性质的点的集合.

曲面方程：如果曲面 S 与三元方程

$$F(x,y,z)=0 \tag{7.1.1}$$

有如下关系：

① 曲面 S 上任一点的坐标都满足方程（7.1.1）；

② 不在曲面上的点的坐标都不满足方程（7.1.1）.

那么，方程（7.1.1）就叫做**曲面 S 的方程**，而曲面 S 就叫做**方程**（7.1.1）**的图形**. 如图 7.1.4 所示.

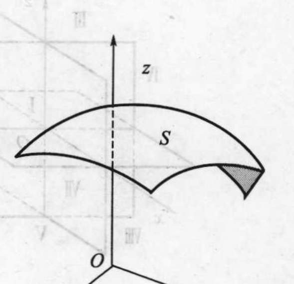

图 7.1.4

如果方程对 x,y,z 是一次的，所表示的曲面称为**一次曲面**，平面是一次曲面. 如果方程是二次的，所表示曲面称为**二次曲面**.

7.1.3　几种常见的曲面及其方程

7.1.3.1　平面及其方程

例如，三元一次方程$\frac{x}{1}+\frac{y}{4}+\frac{z}{3}=1$所决定的图形就是一个与 x 轴、y 轴、z 轴的交点分别为 $P(1,0,0)$，$Q(0,4,0)$，$R(0,0,3)$的平面. 如图 7.1.5 所示.

一般的三元一次方程

$$Ax+By+Cz+D=0$$

表示空间中的一个平面，其中 A,B,C 不全为零，称为**平面的一般方程**.

① $D=0$ 时，方程为 $Ax+By+Cz=0$，显然过原点.

② $C=0$ 时，方程为 $Ax+By+D=0$，这是平行于 z 轴的平面.

③ $C=0$，$D=0$ 时，方程为 $Ax+By=0$，该平面既平行于 z 轴又过原点，从而是经过 z 轴的平面.

④ $A=0$，$B=0$ 时，方程为 $Cz+D=0$，即 $z=z_0$，该平面既平行于 x 轴又平行于 y 轴，从而平行于 xOy 面. 该平面过 z 轴上的点 $(0,0,z_0)$，特别地，$z_0=0$ 时，就是 xOy 面.

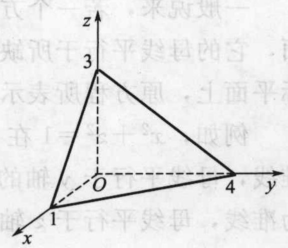

图 7.1.5

7.1.3.2　球面

空间中与一个定点距离相等的点的集合叫做**球面**，定点叫做**球心**，定距离叫做**半径**. 若球心为 $Q(a,b,c)$，半径为 R，设点 $P(x,y,z)$ 为球面上任一点，由于 $|PQ|=R$，我们有

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}=R,$$

消去根式，得球面方程

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2. \tag{7.1.2}$$

将球面方程（7.1.2）展开

$$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+(a^2+b^2+c^2-R^2)=0.$$

即方程具有

$$x^2+y^2+z^2+2Ax+2By+2Cz+D=0$$

的形式. 反之，经过配方

$$(x+A)^2+(y+B)^2+(z+C)^2+D-(A^2+B^2+C^2)=0.$$

当 $A^2+B^2+C^2-D>0$ 时，表示球心在 $(-A,-B,-C)$，半径为 $\sqrt{A^2+B^2+C^2-D}$ 的球面；

当 $A^2+B^2+C^2-D=0$，表示一点；当 $A^2+B^2+C^2-D<0$，没有轨迹.

7.1.3.3　柱面

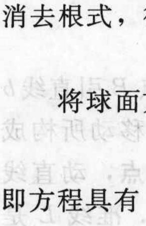

图 7.1.6

如图 7.1.6 所示，设空间任一曲线 L，过 L 上的一点引一条直线 b，直线 b 沿 L 作平行移动所形成的曲面叫做**柱面**. 曲线 L 叫**准线**. 动直线的每一位置，叫做柱面的**一条母线**. 准线 L 是直线的柱面为平面，是圆的柱面叫做圆柱面. 若母线 b 与准线圆所在的平面垂直，这个柱面叫做**正圆柱面**.

如果柱面的母线平行于 z 轴，并且柱面与坐标面 xOy 的交线 L 方程为 $f(x,y)=0$，则柱面上的其它点也满足该方程，因此，以 L 为准线，母线平行于 z 轴的柱面的方程就是 $f(x,y)=0$，如图 7.1.7 所示. 同理，$g(y,z)=0$ 和 $h(z,x)=0$ 分别表示母线平行于 x 轴和 y 轴的柱面.

一般说来，若一个方程中缺少一个坐标，则这个方程所表示的轨迹是一个柱面，它的母线平行于所缺少的那个坐标的坐标轴，它的准线就是在与母线垂直的坐标平面上，原方程所表示的平面曲线．

例如，$x^2+z^2=1$ 在 zOx 平面上表示一个圆，而在空间中则表示一个以此圆为准线，母线平行于 y 轴的柱面，如图 7.1.8 所示．又如 $y-x^2=0$ 表示以此抛物线为准线，母线平行于 z 轴的抛物柱面，如图 7.1.9 所示．

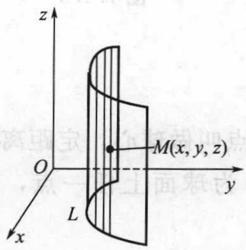

图 7.1.7

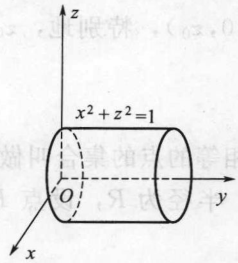

图 7.1.8

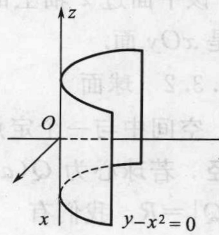

图 7.1.9

7.1.3.4　锥面

设 L 为一条已知平面曲线，B 为 L 所在平面外的一个固定点，过点 B 引直线 b 与 L 相交，直线 b 绕点 B 沿 L 移动所构成的曲面叫做**锥面**，点 B 称作**顶点**，动直线叫做**锥面的母线**，L 叫做**准线**．准线 L 是圆的锥面叫做**圆锥面**，如图 7.1.10. 若圆锥顶点 B 与准线的中心 O 的连线 OB 与准线所在的平面垂直，这个圆锥面就叫做**正圆锥面**.

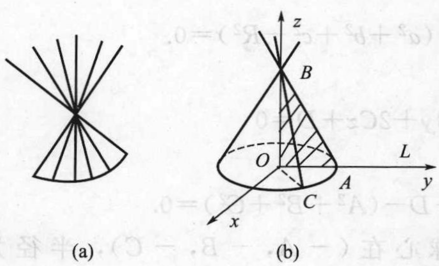

图 7.1.10

7.1.3.5　旋转曲面

（1）定义

以一条平面曲线 L 绕平面上一定直线旋转所成的曲面叫做**旋转曲面**，定直线叫做旋转曲面的轴，曲线 L 的每一位置叫做该旋转曲面的一条母线．如图 7.1.11 所示.

（2）方程

yOz 面上一条曲线 L 的方程为 $\begin{cases} f(y,z)=0, \\ x=0. \end{cases}$ 这条曲线绕 z 轴旋转，就得到一个以 z 轴为轴的旋转曲面.

设 $P_1(0,y_1,z_1)$ 为曲线 L 上任一点，如图 7.1.12 所示，则 $f(y_1,z_1)=0$，当曲线 L 绕 z 轴旋转时，点 P_1 也绕 z 轴旋转到另一点 $P(x,y,z)$，这时 $z=z_1$ 保持不变，且 P 与 z 轴的距离恒等于 $|y_1|$，即 $\sqrt{x^2+y^2}=|y_1|$，因此，$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$.

同理，曲线 L 绕 y 轴旋转所成的旋转曲面的方程为：$f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0$.

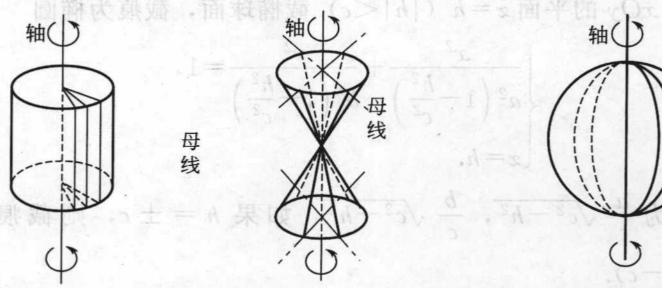

图 7.1.11

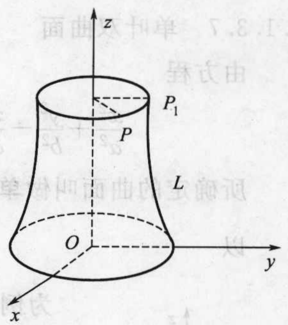

图 7.1.12

例 7.1.1　求椭圆$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1,\\ z=0\end{cases}$绕 x 轴 z 轴旋转所成的曲面方程.

解　该椭圆绕 x 轴旋转所成的曲面方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{b^2}=1.$$

若同一椭圆绕 z 轴旋转，则所成的曲面方程为

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1.$$

例 7.1.2　求抛物线$\begin{cases}y^2=2pz,\\ x=0\end{cases}$绕 z 轴旋转所成的曲面的方程.

解　曲线绕 z 轴旋转所成的曲面的方程为

$$x^2+y^2=2pz.$$

7.1.3.6　椭球面

由方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{7.1.3}$$

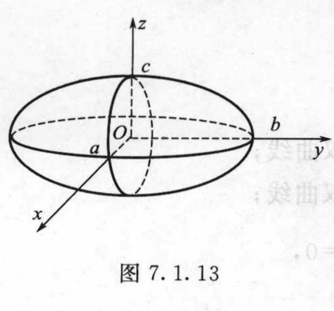

图 7.1.13

所确定的曲面叫做**椭球面**．这里 a,b,c 都是正数，如图 7.1.13 所示.

椭球面的性质：

① 对称性：椭球面对于坐标平面、坐标轴和坐标原点都对称.

② 椭球面被三个坐标面 xOy,yOz,zOx 所截的截痕各为椭圆（切截法）

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ z=0.\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ x=0.\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ y=0.\end{cases}$$

用平行于坐标面 xOy 的平面 $z=h$（$|h|<c$）截椭球面，截痕为椭圆

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2\left(1-\dfrac{h^2}{c^2}\right)}+\dfrac{y^2}{b^2\left(1-\dfrac{h^2}{c^2}\right)}=1,\\ z=h.\end{cases}$$

此椭圆的半轴为 $\dfrac{a}{c}\sqrt{c^2-h^2}$，$\dfrac{b}{c}\sqrt{c^2-h^2}$，如果 $h=\pm c$，则截痕缩为两点：$(0,0,c)$与$(0,0,-c)$.

至于平行于其它两个坐标面的平面截此椭球面时，所得到的结果完全类似.

③ 如果 $a=b=c\neq 0$，则方程（7.1.3）表示一个球面.

7.1.3.7　单叶双曲面

由方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

所确定的曲面叫做**单叶双曲面**，其中 a,b,c 均为正数，叫做双曲面的半轴.

以

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{7.1.4}$$

为例，如图 7.1.14 所示.

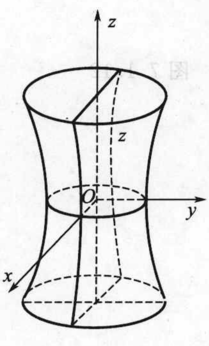

图 7.1.14

显然，它对于坐标面、坐标轴和坐标原点都是对称的.

① 用平行于坐标面 xOy 的平面 $z=h$ 截曲面（7.1.4），其截痕是一椭圆

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1+\dfrac{h^2}{c^2},\\ z=h.\end{cases}$$

半轴为$\dfrac{a}{c}\sqrt{c^2+h^2}$，$\dfrac{b}{c}\sqrt{c^2+h^2}$. 当 $h=0$ 时（xOy 面），半轴最小.

② 用平行于坐标面 xOz 的平面 $y=h$ 截曲面（7.1.4）的截痕是

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{h^2}{b^2},\\ y=h.\end{cases}$$

若$|h|<b$，则为实轴平行于 x 轴，虚轴平行于 z 轴的双曲线；

若$|h|>b$，则为实轴平行于 z 轴，虚轴平行于 x 轴的双曲线；

若$|h|=b$，则上述截痕方程变成$\begin{cases}\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right)\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right)=0,\\ y=h.\end{cases}$

这表示平面 $y=\pm b$ 与曲面（7.1.4）的截痕是一对相交的直线，交点为$(0,b,0)$和$(0,-b,0)$.

③ 坐标面 yOz 和平行于 yOz 的平面截曲面（7.1.4）的截痕与②类似.

④ 若 $a=b$，则曲面（7.1.4）变成**单叶旋转双曲面**.

7.1.3.8　双叶双曲面

由方程 $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$，$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$，$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ 确定的曲面叫**双叶双曲面**，这里 a,b,c 为正数.

我们只讨论

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1. \tag{7.1.5}$$

① 对于坐标面、坐标轴和原点都对称，它与 xOz 面和 yOz 面的交线都是双曲线

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1\\ y=0\end{cases}，\text{和}\begin{cases}\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1\\ x=0.\end{cases}，$$

② 用平行于 xOy 面的平面 $z=h$（$|h|\geqslant c$）去截它，当 $|h|>c$ 时，截痕是一个椭圆 $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}-1,\\ z=h.\end{cases}$ 它的半轴随 $|h|$ 的增大而增大. 当 $|h|=c$ 时，截痕是一个点；$|h|<c$ 时，没有交点. 显然双叶双曲面有两支，位于坐标面 xOy 两侧，无限延伸. 如图 7.1.15 所示.

7.1.3.9　椭圆抛物面

由方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z \tag{7.1.6}$$

确定的曲面叫做**椭圆抛物面**.

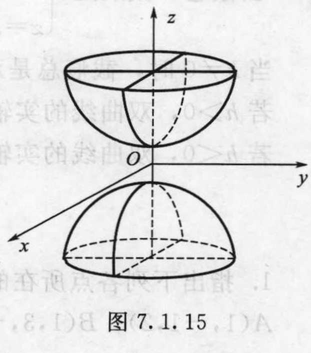

图 7.1.15

它对于坐标面 xOz 和坐标面 yOz 对称，对于 z 轴也对称，但是它没有对称中心，它与对称轴的交点叫顶点，因 $z\geqslant 0$，故整个曲面在 xOy 面的上侧，它与坐标面 xOz 和坐标面 yOz 的交线是抛物线 $\begin{cases}x^2=a^2z,\\ y=0\end{cases}$ 和 $\begin{cases}y^2=b^2z,\\ x=0.\end{cases}$ 这两条抛物线有共同的顶点和轴.

用平行于 xOy 面的平面 $z=h$（$h>0$）去截它，截痕是一个椭圆

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=h,\\ z=h.\end{cases}$$

这个椭圆的半轴随 h 增大而增大，如图 7.1.16 所示.

7.1.3.10　双曲抛物面

由方程
$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z \tag{7.1.7}$$
确定的曲面叫做**双曲抛物面**.

它对于坐标面 xOz 和 yOz 是对称的，对 z 轴也是对称的，但是它没有对称中心，它与坐标面 xOz 和坐标面 yOz 的截痕是抛物线，如图 7.1.17 所示.

$$\begin{cases}x^2=-a^2z,\\ y=0\end{cases} \text{和} \begin{cases}y^2=b^2z,\\ x=0.\end{cases}$$

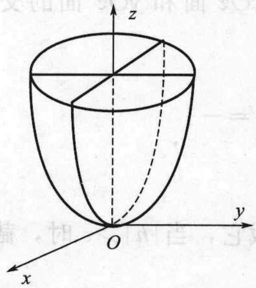

图 7.1.16

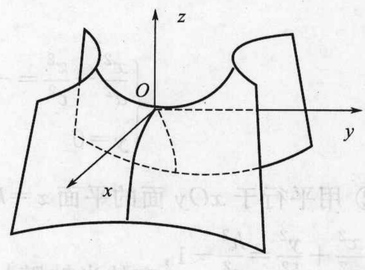

图 7.1.17

这两条抛物线有共同的顶点和轴，但轴的方向相反. 用平行于 xOy 面的平面 $z=h$ 去截它，截痕是 $\begin{cases}-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=h,\\ z=h.\end{cases}$

当 $h\neq 0$ 时，截痕总是双曲线；

若 $h>0$，双曲线的实轴平行于 y 轴；

若 $h<0$，双曲线的实轴平行于 x 轴.

习题 7.1

1. 指出下列各点所在的卦限：

$A(1,-1,2)$；$B(1,3,-1)$；$C(1,-4,-2)$；$D(-2,-4,2)$.

2. 求点 $P(2,-1,-3)$关于（1）各坐标面；（2）各坐标轴；（3）坐标原点的对称点的坐标.

3. 写出下列曲线绕指定轴旋转所生成的旋转曲面的方程：

（1）xOz 面上的抛物线 $z^2=5x$ 绕 x 轴旋转；

（2）yOz 面上的圆 $y^2+z^2=9$ 绕 z 轴旋转；

（3）xOy 面上的双曲线 $4x^2-9y^2=36$ 分别绕 x 轴和 y 轴旋转.

4. 方程 $x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z=0$ 表示什么曲面？

5. 指出下列平面的特殊位置：

（1）$3x-2y-6=0$；　（2）$x-z=1$；　（3）$5x+4y-z=0$.

6. 指出下列方程在平面解析几何与空间解析几何中表示的几何图形：

（1）$x=1$；　（2）$x^2+y^2=9$；

（3）$x^2-y^2=1$；　（4）$y=x+1$.

7. 画出下列各方程所表示的曲面：

（1）$\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\dfrac{a}{2}\right)^2$；　（2）$-\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$；

（3）$4x^2+y^2-z^2=4$；　（4）$y^2-z=0$.

7.2　多元函数的基本概念、极限和连续

7.2.1　平面区域

在一元函数的讨论中，我们用到了区间的概念，基于对多元函数讨论的需要，我们引进区域等概念.

7.2.1.1　邻域

设 $P_0(x,y)$ 是平面上任一点，则平面上以 P_0 为中心，以 δ 为半径的圆的内部所有点的集合称为 P_0 的 **(圆形) δ 邻域**，记为 $U(P_0,\delta)$，即

$$U(P_0,\delta)=\{P\mid |PP_0|<\delta\}=\{(x,y)\mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}.$$

称 $\mathring{U}(P_0,\delta)=\{P\mid 0<|PP_0|<\delta\}=\{(x,y)\mid 0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}$ 为 P_0 的**去心 δ 邻域**。

7.2.1.2　区域

① 点的分类：设 E 是平面的一个子集，P_0 是平面上一点，若存在 $U(P_0,\delta)$，使得 $U(P_0,\delta)\subset E$，则称 P_0 是 E 的**内点**．若 P_0 的任何邻域内既有点属于 E，又有点不属于 E，则称 P_0 是 E 的**边界点**．E 的边界点的集合，称为 E 的**边界**.

② 开集：若 D 的每一点都是内点，则称 D 是平面的一个**开集**.

③ 连通的：若 D 的任意两点都能用含于 D 的折线连接起来，则称 D 是**连通的**.

④ 开区域：若 D 既是连通的，又是开集，则称 D 为**开区域**.

⑤ 闭区域：开区域加上它的边界，称为**闭区域**.

若一区域中各点到坐标原点的距离都小于某个正数 M，则称区域是**有界区域**，否则称为**无界区域**.

例如，$\left\{(x,y)\mid 1<\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{4}\leqslant 5\right\}$ 就是有界区域，而 $\{(x,y)\mid x+y>1\}$ 是无界区域.

7.2.1.3　n 维空间

设 $n\in\mathbf{N}^+$，定义有序的 n 元实数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的全体为 **n 维空间**，记作

$\mathbf{R}^n$，即

$$\mathbf{R}^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in\mathbf{R},i=1,2,\cdots,n\}.$$

每个实数组$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$称为$\mathbf{R}^n$中的一个点，x_i称为该点的第i个坐标．显然，$\mathbf{R}^1$，$\mathbf{R}^2$，$\mathbf{R}^3$分别是实数轴、平面、立体空间的点的全体.

$\mathbf{R}^n$中的点$P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$与$Q(y_1,y_2,\cdots,y_n)$间的距离记作$\rho(P,Q)$，规定

$$\rho(P,Q)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}.$$

显然，$n=1,2,3$时，上述规定与数轴上、直角坐标系下平面及空间中两点间的距离一致.

7.2.2　多元函数的定义

在客观世界和经济管理中许多现象和实际问题中，许多变量都不是孤立存在的，它们相互依赖、相互作用．例如圆柱体的体积V与底半径r及高度h有关，所以V是两个变量r和h的函数，即V是二元有序组(r,h)的函数．又如某商品的社会需求量Q与该商品的价格P、消费者人数L及消费者的收入水平R有关，所以Q就是三个变量P,L,R的函数．或者说Q是三元有序组(P,L,R)的函数，这种依赖于两个或更多变量的函数就是多元函数.

定义 7.1　设D是$\mathbf{R}^2$的一个非空子集，如果按照某个对应法则f，对于D中的每个点(x,y)，都能得到唯一的实数z与这个点对应，则称这个对应f为定义在D上的**二元函数**，记为$z=f(x,y)$，$(x,y)\in D$.

定义域　D称为函数$z=f(x,y)$的**定义域**；

值域　函数值的集合，记为$R(f)$，即

$$R(f)=\{f(x,y)\mid(x,y)\in D\};$$

$z=f(x,y)$的**图像**，记为$G(f)$，即

$$G(f)=\{x,y,f(x,y)\mid(x,y)\in D\}.$$

例 7.2.1　设三角形底为x，高为y，则三角形的面积z可表示为x，y的函数$z=\frac{1}{2}xy$，该函数有实际意义，所以函数的定义域是$x>0$，$y>0$，即

$$D=\{(x,y)\mid x>0,y>0\}，函数的值域是(0,+\infty).$$

例 7.2.2　函数$z=\dfrac{1}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$，其定义域为$R^2-x^2-y^2>0$，即

$$x^2+y^2<R^2,$$

所以函数定义域为平面上以坐标原点为中心、半径为R的圆的内部，即

$$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2<R^2\}，函数的值域是\left[\frac{1}{R},+\infty\right).$$

例 7.2.3　设函数$f(x,y)=\arcsin x$，则函数对y没有要求，$x\in[-1,1]$，因此，其定义域是平面上的带形区域

$$\{(x,y)\mid -1\leqslant x\leqslant 1,-\infty<y<+\infty\}.$$