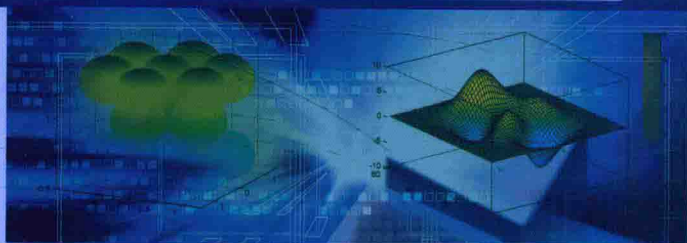


群智能算法 及化工优化问题



◎ 莫愿斌 著

 **北京理工大学出版社**
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

国家自然科学基金 (21466008) 资助出版

群智能算法及化工 优化问题

莫愿斌 著



北京理工大学出版社

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 摘 要

数学建模方法是研究化工过程的一种有效方法,由于化工过程影响因素多、波动大、反应机理复杂,因此,所建立的模型大多比较复杂,用传统的数学方法很难求解,而人工智能在该领域大有用武之地。诸如高炉炼铁和石油裂解等融进各种优化模型的专家系统很早就出现在了化工冶金企业中,人工智能优化正在为这些领域带来新的发展动力。

通过数学建模方法分析化工过程所得到的优化方案可以直接由生产过程检验,因而上马容易,见效迅速,且通过对参数的调整可以不必改进设备。因此,该领域是研究的热点。该领域内容丰富,发展迅猛,本书仅是抛砖引玉。

本书可供化学工程、计算智能工作者,科研人员及大学生有关专业高年级学生、研究生、教师使用。

版权专有 侵权必究

图书在版编目(CIP)数据

群智能算法及化工优化问题 / 莫愿斌著. —北京: 北京理工大学出版社, 2015. 12

ISBN 978 - 7 - 5682 - 1620 - 3

I. ①群… II. ①莫… III. ①电子计算机 - 算法理论 - 应用 - 化工过程 - 高等学校 - 教材 IV. ①TQ02

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2015) 第 296014 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司

社 址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号

邮 编 / 100081

电 话 / (010) 68914775 (总编室)

(010) 82562903 (教材售后服务热线)

(010) 68948351 (其他图书服务热线)

网 址 / <http://www.bitpress.com.cn>

经 销 / 全国各地新华书店

印 刷 / 北京富达印务有限公司

开 本 / 710 毫米 × 1000 毫米 1/16

印 张 / 9

字 数 / 146 千字

版 次 / 2015 年 12 月第 1 版 2015 年 12 月第 1 次印刷

定 价 / 69.00 元

责任编辑 / 梁铜华

文案编辑 / 孟祥雪

责任校对 / 周瑞红

责任印制 / 马振武

图书出现印装质量问题, 请拨打售后服务热线, 本社负责调换

序 言

自戴维斯提出 Chemical Engineering 的概念以来，化学工业得到了很大的发展。目前，化学工业已成为国民经济的支柱产业。随着社会与科学的发展，化学工业的自动化程度、规模等都发生了很大的变化，化工过程更为复杂、过程控制要求更为精密，特别是在当今注重效益与资源环境保护结合的情况下，对投入更要求精打细算，且在对环境影响方面的控制也更加苛刻。数学的模拟能为化工过程的分析提供途径，既可以节省实际的投入，又可以减少对环境的影响。同时，计算机的发展也为此种分析方式的顺利进行提供了工具的保障。化工过程的建模与优化已成为化工过程的重要组成部分。

群智能算法是近年来发展起来的一类算法，该类算法对目标函数没有特殊的要求，算法设计过程中不涉及目标函数的解析性质，适合于模拟与求解复杂化工过程的模型优化。该类算法每年都在提出新的算法模型，算法的精度在不断提高，算法的设计与计算的复杂性也在不断优化。因此，将化工优化与智能算法结合起来研究更具实际意义。

前 言

通过建立数学模型求解化工优化问题，是研究化工过程的一种可行的方法，越来越受到重视；但化工过程影响因素多、波动大、反应机理复杂，利用传统的数学方法去求解的不足性日益显现；各种智能算法的提出为该领域的研究注入了新的动力，人工智能在该领域大有用武之地。全书主要包括以下几个方面：

(1) 阐述优化问题的发展历史和一些经典算法，分析各种算法的优缺点。

(2) 分析了优化问题求解的历史演变，以及各种求解优化方法的优缺点。

(3) 从信息的角度分析了算法设计的实质。一方面分析信息在优化算法设计中的作用；另一方面探讨优化算法中群体搜索的特性，以及在群体搜索中如何利用信息、传输信息、交换信息，以达到全局搜索。

(4) 给出了群智能算法的定义，以及群智能算法的一些特征与原理，具体分析了四种新兴的智能算法，给出了各算法的生物背景、数学计算式的含义及计算步骤。

(5) 针对化工过程的多目标优化模型和目前求解多目标优化问题的主要策略与方法及这些方法存在的主要困难与不足，提出了多目标优化问题的理想有效解，即求解多目标优化问题的另一种妥协方案；提出对粒子群优化算法的适当改进，使其适合快速求解多目标优化问题，并取得良好效果。

(6) 针对化工动态优化问题求解的实际困难与算法自身存在的不足，基于数学背景与函数的性质提出相应的改进策略，测试效果良好。

(7) 针对高维优化问题的现实意义，提出以共轭方向法改进的粒子群算法求解高维优化问题；同时针对现实中的二进制优化问题，把粒子群优化算法用二进制的形式表示。最后将这两种改进算法分别用于解决实际问题。

(8) 讨论了布谷鸟算法在化工优化问题中的应用。

通过本书的撰写，作者深感求解化工优化问题的困难，随着社会的发展，考虑的因素越来越多，要求越来越精细，因此，建立的模型越来越复杂，对算法的优化性能要求越来越高。这促使了算法研究的不断改进，也促进了群智能算法与化工优化结合的边缘学科的发展。粒子群优化算法、人工鱼群算

法、人工萤火虫算法与蝙蝠算法都是近几年新提出的优化算法，本书只是在一定程度上就这些算法的理论进行了分析，更多的是就这些算法的一些不足提出了一些改进的策略，并用之求解实际的化工优化模型，但没有就理论问题进行深入的探讨。

本书是作者这些年在化工研究方面的一些经验总结，在编写过程中得到了多位恩师的帮助、支持与指点，并且提出了不少好的意见、改正了不少错误。在这里我表示衷心的感谢。

本书的出版得到了国家自然科学基金（21466008）的资助，我深表感谢。希望本书的出版，能进一步加强智能算法研究与化工优化问题研究的有机结合，也希望能为将来的研究提供一定帮助。

由于水平有限，书中不足在所难免，希望能得到读者的批评和帮助，以便改正。

莫愿斌

2015 年 8 月

目 录

概 论	1
第一章 化工优化模型	8
1.1 数学模型	8
1.2 化工问题的数学模型	9
1.3 化工优化问题的数学模型	10
1.4 本章小结	11
第二章 优化问题的回顾与分析	12
2.1 优化问题的概论	12
2.1.1 概述	12
2.1.2 优化问题的数学模型	13
2.1.3 优化问题的分类	14
2.2 优化问题的求解	14
2.2.1 优化问题的全局最优解与局部最优解	14
2.2.2 全局最优解与局部最优解的关系	14
2.2.3 求解全局最优解的困难所在	15
2.2.4 优化问题的求解方法	16
2.3 优化问题及求解方法的演变分析	20
2.4 全局优化算法的分类	21
2.5 传统优化算法的不足	23
2.6 本章小结	24
第三章 信息原理与群搜索	25
3.1 引言	25
3.2 信息	26
3.3 信息方法	26

3.3.1	信息方法的含义	27
3.3.2	信息方法的步骤	27
3.4	信息融合	28
3.5	基于信息方法的优化算法	28
3.5.1	遗传算法	29
3.5.2	蚁群算法	30
3.5.3	粒子群算法	31
3.6	搜索	31
3.6.1	搜索的相关概念	31
3.6.2	单点搜索	32
3.6.3	群搜索	33
3.6.4	群搜索算法研究解决的问题及其发展前景	34
3.6.4.1	算法设计及改进研究	34
3.6.4.2	算法的应用研究	35
3.7	本章小结	35
第四章	群智能优化算法及其收敛研究	36
4.1	引言	36
4.2	粒子群算法的产生背景及基本模式	36
4.3	粒子群算法的拓扑结构和邻域结构	38
4.3.1	影响拓扑结构的主要因素	39
4.3.2	邻域结构和迭代式之间的对应关系	39
4.3.3	几种典型的拓扑结构	39
4.3.4	不同拓扑结构的效果比较	41
4.4	粒子的运动分析	42
4.4.1	PSO 的 Gbest 粒子运动分析	43
4.4.2	PSO 的 Pbest 粒子运动分析	46
4.4.3	PSO 的 Common 粒子运动分析 ^[89]	48
4.4.4	PSO 分析	50
4.5	人工鱼群算法	51
4.6	人工萤火虫算法	52
4.6.1	GSO 算法	53
4.6.1.1	算法的数学描述与分析	53
4.6.1.2	算法流程	54

4.6.2	FA 算法	54
4.6.2.1	算法的数学描述与分析	54
4.6.2.2	算法步骤	55
4.7	蝙蝠算法	56
4.7.1	蝙蝠算法的原理与数学描述	56
4.7.2	蝙蝠算法基本流程	57
4.8	本章小结	58
第五章	粒子群优化算法求解多目标优化问题	59
5.1	引言	59
5.2	多目标优化问题的数学描述与一般的求解法	60
5.2.1	多目标优化问题的数学描述	60
5.2.2	多目标优化问题的解法	60
5.2.2.1	基于单目标的多目标求解方法	60
5.2.2.2	基于进化计算的多目标求解方法	63
5.3	粒子群优化算法求解多目标优化问题的理想有效解	64
5.3.1	多目标优化问题的理想有效解	64
5.3.2	粒子群优化算法求多目标优化问题的理想有效解	65
5.3.2.1	算法的基本思想	65
5.3.2.2	算法流程	66
5.3.2.3	算法的测试	67
5.3.2.4	算法性能分析	68
5.4	粒子群优化算法求解多目标优化问题的应用	68
5.5	本章小结	69
第六章	改进粒子群算法求解动态优化问题	70
6.1	引言	70
6.2	动态优化的数学描述与分类	70
6.2.1	动态优化的数学描述	70
6.2.2	动态优化的分类	71
6.3	动态优化的一般解析方法	71
6.3.1	变分法或基于极大值原理的解法	72
6.3.2	基于最优原理的动态规划方法	72
6.4	求解动态优化问题的现行数值方法	73

6.4.1	梯度法	73
6.4.2	动态规划方法	73
6.5	改进的粒子群算法求解动态优化问题	75
6.5.1	混沌粒子群算法求解边值不确定的动态优化问题	75
6.5.2	混沌在求解优化问题中的应用	77
6.5.3	混沌粒子群优化算法	78
6.5.4	混沌粒子群算法求解动态优化问题的一般步骤	78
6.5.5	混沌粒子群算法求解动态优化问题的应用	79
6.5.6	粒子群优化法求解边值给定的动态优化问题	80
6.6	本章小结	82
第七章	共轭粒子群优化算法与二进制粒子群优化算法	83
7.1	引言	83
7.2	粒子群算法的数学分析	83
7.3	共轭粒子群优化算法	85
7.3.1	共轭方向法 (Method of Conjugate Direction, CD)	85
7.3.2	共轭方向粒子群算法 (Method Conjugate Direction Particle Swarm Optimization, CDPSO)	85
7.3.3	算法的性能测试	86
7.3.4	算法的性能分析	88
7.4	共轭粒子群算法的应用	88
7.4.1	PSO 与 CDPSO 对模型参数的估计	88
7.4.2	结果分析	89
7.5	二进制表示的粒子群优化算法	89
7.5.1	二进制粒子群优化算法提出的原理	89
7.5.2	二进制粒子群优化算法的基本步骤	90
7.5.3	二进制粒子群优化算法的性能测试与分析	91
7.6	BPSO 在求解换热网络优化问题 (HEN problem) 中的应用	92
7.7	本章小结	92
第八章	自适应布谷鸟算法及其在化工优化中的应用	93
8.1	引言	93
8.2	动态优化问题的描述	94

8.3	变步长自适应 CS 算法	94
8.3.1	基本 CS 算法	94
8.3.2	变步长策略	95
8.3.3	变步长自适应 CS (VSACS) 算法流程	96
8.4	函数测试	96
8.4.1	标准测试函数	96
8.4.2	测试结果	99
8.5	变步长自适应布谷鸟搜索算法 (VSACS) 在化工动态优化中的 应用	107
8.5.1	批式反应器	107
8.5.2	管式反应器	107
8.5.3	Park - Ramirez 生物反应器 (PR - b)	108
8.5.4	实验结果及讨论	108
8.6	本章小结	113
符号说明		115
参考文献		116

概 论

随着经济和科学的发展,优化算法已经成为现代科技中比较独立的一门技术,在设计、生产、规划、管理与控制中有广泛的应用。从学科上讲,它既是应用数学的一个分支,也是系统工程的重要内容。所谓最优化就是如何使成本更低、规划更合理。本章主要介绍优化的基础知识,为以后各章的学习奠定基础。

优化方法和问题概述

一、化工领域中最优化问题

在实际化工领域中,开发、设计、生产、管理、控制、规划等方面都广泛存在化工优化问题,现简要介绍如下。

1. 研究开发方面

- (1) 化工单元、流程结构。
- (2) 化工过程参数的确定。
- (3) 化工系统的可行性分析。
- (4) 最佳实验方案的确定。

2. 过程运行、管理和控制方面

- (1) 系统节能、降耗。
- (2) 过程的计算机控制。
- (3) 污染物的排放与最佳治理。
- (4) 技改的投资分析与最优控制。

3. 化工发展战略方面

- (1) 区域化工“投入—产出”模型的建立、分析和最优决策。
- (2) 区域性化工与环境治理的最优规划等。

二、化工优化问题实例

1. 化工过程数学模型的参数估计

在化工过程数学模型的参数确定中，常需要通过一组实测数据来确定经验模型中的待定参数，使模型值与实测值有最好的吻合。这类问题常可用平方和函数的最优化方法予以解决。

例如 某种流体流经某段管路时，摩擦阻力系数 λ 和雷诺数 Re 的实验数据如表 0-1 所示。

表 0-1 实验数据

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
Re_i	4 658	5. 820	6 525	7 400	9 045	10 350	11 050	11 820	12 850	13 840	...
λ_{ei}	0. 039 9	0. 038 6	0. 036 8	0. 036 2	0. 034 9	0. 033 9	0. 034 1	0. 032 3	0. 032 4	0. 032 1	...

根据实验点在坐标上的分布，阻力系数 λ 和雷诺数 Re 之间的函数形式大致为：

$$\lambda = a (Re)^b + c$$

试按这有限的 10 个实验点确定阻力系数公式中的 3 个参数 a, b, c 。

令 $x_1 = a, x_2 = b, x_3 = c$ ，并记 λ_{ei} 为阻力系数值，那么，将每一实验点的雷诺数 Re_i 代入公式后，就会有

$$\lambda_{ci} = x_1 Re_i^{x_2} + x_3 \quad (i = 1, 2, \cdots, 10)$$

与实验值 $\lambda_{ei} \ (i = 1, 2, \cdots, 10)$ 相对应。

可以这样来确定阻力系数公式中的 3 个参数 x_1, x_2, x_3 ：设计一个平方和函数，使计算值 λ_{ci} 与实验值 λ_{ei} 的残差平方和为最小。如

$$\sum_{i=1}^{10} (\lambda_{ci} - \lambda_{ei})^2 \rightarrow \min$$

即

$$\min f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^{10} (x_1 Re_i^{x_2} + x_3 - \lambda_{ei})^2$$

根据这一要求确定出 x_1^* , x_2^* , x_3^* , 并认为此时阻力系数计算公式的计算值与实验所得到的点拟合得最好。

2. 生产计划的优化问题

例如 某化工厂生产 A、B 两种产品, 它们需要经过三种设备的加工, 其工时如表 0-2 所示。设备 I、II 和 III 每天可使用的时间分别不超过 12 小时、10 小时和 8 小时。产品 A 和 B 的利润随市场的需要有所波动, 如果预测未来某个时间内 A 和 B 的利润分别为 4 000 元/吨和 3 000 元/吨, 问在哪个时期内, 每天生产产品 A 和 B 各多少吨, 才能使工厂获得最大利润? 有关数据如表 0-2 所示。

表 0-2 参考数据

设备	I	II	III
产品 A/(小时·吨 ⁻¹)	3	3	4
产品 B/(小时·吨 ⁻¹)	4	3	2
设备每天工作时数限额/h	12	10	8

设每日应生产 A 和 B 分别为 x_1 和 x_2 吨, 则总的利润为

$$f(\mathbf{x}) = 4x_1 + 3x_2$$

且 x_1 与 x_2 必须满足如下约束条件

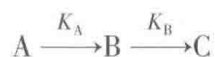
$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ 3x_1 + 3x_2 \leq 10 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

该优化问题可归结为: 在上述的约束条件下, 求目标函数 $f(\mathbf{x})$ 的最大值。

3. 化工连续系统优化问题

例如 管式反应器的最优温度分布。

假设在一个长度为 L 的理想置换管式反应器内进行下一级串联反应



其中

$$K_A = k_{A0} \exp[-E_A/RT(L)]$$

$$K_B = K_{B0} \exp[-E_B/RT(L)]$$

反应速度方程为

$$\begin{cases} \frac{dx_A(L)}{dL} = -K_A x_A(L) \\ \frac{dx_B(L)}{dL} = K_A x_A(L) - K_B x_B(L) \\ x_A(0) = x_A^{(0)}, x_B(0) = x_B^{(0)} \end{cases}$$

求使反应器出口处目的产物浓度 $x_{(B)}(L)$ 最大的轴向温度分布 $T(L)$ 。即

$$\max J(T(L)) = \max \int_0^L \frac{dx_B(L)}{dL} dL$$

$$\begin{cases} \frac{dx_A(L)}{dL} = -K_A x_A(L) \\ \frac{dx_B(L)}{dL} = K_A x_A(L) - K_B x_B(L) \\ x_A(0) = x_A^{(0)}, x_B(0) = x_B^{(0)} \end{cases}$$

这就变成在微分等式约束条件下的目标泛函的极大问题。

三、最优化方法的分类

最优化方法可以按不同标准进行分类：

(1) 按照要求优化的目标是一个还是多个，可以分为单目标优化方法和多目标优化方法。

(2) 按照处理过程中是否含有随机变量和对象系统是否具有模糊性，可以分为确定型优化方法、随机型优化方法和模糊型优化方法。

(3) 按照变量的取值是否有约束，可以分为无约束优化与有约束优化。

(4) 按照变量的多少，可以分为单变量优化与多变量优化。

(5) 按照求解过程是否使用迭代算法和数值逼近的方法，可以分为解析法和数值搜索法。

四、优化算法的数学基础

(1) 如果函数 $f(x)$ 的一阶导数存在，则 x^* 为极值点的必要条件为

$$f'(x^*) = 0$$

但使导数为 0 的点不一定是极值点。

(2) 函数 $f(x)$ 有二阶导数，且有 $f'(x^*) = 0$, $f''(x^*) < 0$ ，则 x^* 为极大值点，若 $f'(x^*) = 0$, $f''(x^*) > 0$ ，则 x^* 为极小值点。

(3) 对于 n 元函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 具有一阶偏导, $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ 是 n 元函数极值点的必要条件是: $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 关于任何一个变量的偏导数在 $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ 的值都为 0。即:

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) = \left(\frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_n} \right) = 0$$

(4) 对于 n 元函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 具有二阶连续偏导, $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ 是 n 元函数极值点的充分条件是:

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) = \left(\frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_n} \right) = 0$$

同时

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

正定, 则 $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ 是极小值点;

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

负定, 则 $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ 是极大值点;

H 不定时, 则 $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ 不是极值点。

五、迭代算法

算法的分类

1) 古典微分算法

对于极小化问题

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

这种方法首先利用极值存在的必要条件 $\nabla f(x) = 0$ ，求出稳定点 x^* ，然后利用函数极值存在的充分条件及凸性条件判别 x^* 是否为问题的极小点。然而，这种方法在处理实际问题时，大多情况下是不适用的。原因如下：

- (1) 实际优化问题中相当多的目标函数 $f(x)$ 不具有解析性，无法求偏导；
- (2) 即使可以求偏导，通过方程 $\nabla f(x) = 0$ ，求稳定点 x^* 也不容易；
- (3) 即使求出稳定点 x^* ，也很难判定该点是否为极值点。鉴于此，通常对实际问题建立的模型多采用迭代法。

2) 迭代法

迭代法是一种数值计算方法，当最优问题的数学模型没有解析式，或虽有解析式但十分复杂时，迭代法是一种可以考虑的方法。

步骤：先给定一个初值，按照某种规则找出使目标函数值有所下降的方向，以合适的步长沿着这个方向进行搜索，逐步向目标函数值的极小点逼近，直至达到要求的精度为止。这种迭代法，根据目标函数解析性的好坏，可以分为两类：一类是直接法，即构造迭代时仅用到 $f(x)$ 的函数值；另一类是利用了 $f(x)$ 的相关解析性质，如一阶导数（偏导数）、二阶导数（偏导数）等。

计算步骤：

- (1) 给定初始点 $x^{(0)}$ ；
- (2) 置 $k=0$ ；
- (3) 计算搜索方向 $p^{(k)}$ ；
- (4) 确定步长 $a^{(k)}$ ；
- (5) 迭代计算 $x^{(k+1)} = x^{(k)} + a^{(k)} p^{(k)}$ ；
- (6) 检查终止条件，若 $x^{(k+1)}$ 达到收敛的精度，则停止迭代，输出 $x^* = x^{(k+1)}$ ，否则值 $k=k+1$ ，转(3)。

不同的迭代算法就是选择搜索方向 $p^{(k)}$ 和步长 $a^{(k)}$ 的不同。搜索方向和步长完全决定了一个迭代算法。

现今提出的各种不同智能算法还有一个特点，就是初始点不唯一，有多个初始点，形成了种群。群智能算法的优点在于，比单个初始点能更好地克服陷入局部极值。

六、算法的收敛性和收敛速度

某种算法所产生的点列 $\{x^{(k)}\}$ 能够在有限迭代步数成为问题的最优解 x^* ，获序列 $\{x^{(k)}\}$ 有极限点 x^* ，则称算法为收敛算法。