高等教育自学考试全国统一命题考试
历年试卷完全详解

高等数学（工本）

朝华出版社

梯田自考真题解析系列

高等教育自学考试全国统一命题考试

历年试卷完全详解

高等数学（工本）

主编 苗新河
滕桂兰
尹剑

朝华出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等教育自学考试全国统一命题考试高等数学(工本)历年试卷完全详解/苗新河,滕桂兰,尹剑主编. —北京:朝华出版社,2003.11

ISBN 7-5054-0849-6

Ⅰ.高… Ⅱ.①苗…②滕…③尹… Ⅲ.高等数学—高等教育—自学考试—解题 Ⅳ.013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 082211 号

高等数学(工本)

主　　编	苗新河　滕桂兰　尹　剑		
责任编辑	王　磊　凌舒昉		
特约编辑	吴伶芝		
封面设计	朱　珊		
责任印制	赵　岭		
出版发行	朝华出版社		
社　　址	北京市车公庄西路 35 号	**邮政编码**	100044
电　　话	(010)68433166 (010)68413840/68433213(发行部)		
传　　真	(010)88415285		
印　　刷	北京高岭印刷有限公司		
经　　销	全国新华书店		
开　　本	16 开	**字　　数**	150 千字
印　　数	0—10000	**印　　张**	6
版　　次	2003 年 11 月第 1 版第 1 次印刷		
装　　别	平		
书　　号	ISBN 7-5054-0849-6/G.0285		
定　　价	12.00 元		

Introduction 说 明

梯田品牌自考系列丛书，由于其独具的特点和卓越的品质深得全国各省、市教委、学校和广大自考师生的好评和认可，全国每年约有800万人次的考生使用本品牌，销量居全国同类书之榜首，被誉为最受欢迎的自考辅导丛书。

梯田自考真题解析系列——《历年试卷完全详解》丛书涉及公共课程共13门，每门课程汇集了从新教材启用时的全国统考试卷，并对每套试卷加以详尽的分析和解答。

本丛书的宗旨是：在临考冲刺阶段内，考生通过对历届试卷的大量强化训练提高自己的解题技巧、实战应试能力，同时强化已经学过的知识要点、考核重点，从而在最短的时间内取得理想的成绩。

本丛书具有如下特点：

1. 以每年统考的时间为序进行编写，对于每套试卷不仅给出了参考答案，而且提供了每道试题的详细分析及解题思路，解析过程精炼、针对性强，以攻克难点、突出考点为主，从而帮助考生全面掌握考试重点。

2. 以考题为线索，在解析过程中对重要知识点及考点进行了归纳总结，重在培养考生掌握和灵活运用考核知识点的能力。

3. 解答过程详细，并对每道试题探索多种解法，重在提高考生解题能力，拓宽解题思路。

4. 考生在临考阶段使用本书，可较好地进行自我考核、自我评估以及自我调整复习的方向，有利于提高考生的自信心与实战应试能力，从而成功地通过全国自学统一考试。

5. 人性化处理模式。精心进行了版式设计，采用国际流行开本，同时采用双色印刷，利于考生翻阅学习。

本套丛书的编者都是长期从事高等教育自学考试的一线教学工作的权威专家，具有丰富的自考辅导经验，所辅导的学生的单科通过率均在90%以上，受到广大考生的赞誉和推崇。我们相信本丛书的出版发行会对广大考生顺利通过考试起到积极的推动作用。我们预祝每一位考生在考试中取得理想的成绩。

编 者

2003年 11月

CONTENTS 目 录

2000年上半年高等教育自学考试全国统一命题考试

高等数学(工本)试卷

第一部分　选择题(共40分)

一、单项选择题(本大题共20小题，每小题2分，共40分)在每小题列出的四个选项中只有一个选项是符合题目要求的，请将正确选项前的字母填在题后的括号内。

1. $y = x\sin x$

A. 在 $x \to \infty$ 时为无穷大

B. 在 $(-\infty, +\infty)$ 内为有界函数

C. 在 $(-\infty, +\infty)$ 内为单调函数

D. 在 $(-\infty, +\infty)$ 内为无界函数　【　】

2. 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，且 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$，$\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = +\infty$，则在 (a,b) 内，$f(x)$ 必然

A. 没有零点　　B. 只有一个零点

C. 至少有一个零点　　D. 只有两个零点　【　】

3. $f(x)$ 在 $x = x_0$ 可导是 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 可微的

A. 充分非必要的条件　　B. 充分且必要的条件

C. 必要非充分的条件　　D. 既非充分又非必要的条件　【　】

4. 设 $f(x) = x(x+1)(x+2)(x+3)$，则 $f'(x) = 0$ 的正根个数为

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3　【　】

5. 下列极限中可用罗必塔法则求出其极限的是

A. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+\cos x}{x}$　　B. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{x}$

C. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{\sin x}$　　D. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x\cos x}{x^3}$　【　】

6. 由定积分的定义知 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{n}(\sin\dfrac{\pi}{n} + \sin\dfrac{2\pi}{n} + \cdots + \sin\dfrac{n-1}{n}\pi) =$

A. 2　　B. 0　　C. $\dfrac{2}{\pi}$　　D. 1　【　】

7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_0^x \cos t^2\, dt}{x} =$

A. 1　　B. 0　　C. 2　　D. ∞　【　】

8. $\int_1^e \dfrac{1+\ln x}{x} dx =$

A. $\dfrac{3}{2}$　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. 2　　D. $\dfrac{2}{e}$　【　】

9. 极坐标方程 $r = 2a\cos\theta (a > 0)$ 表示的平面曲线所围成的图形的面积等于

A. $\dfrac{3}{2}\pi a^2$　　B. πa^2　　C. $\dfrac{1}{2}a^2$　　D. $\dfrac{1}{2}\pi a^2$　【　】

10. 在 xoy 坐标面上，设 $\boldsymbol{e}$ 为单位向量，$\mathbf{0}$ 为零向量，则

A. $\boldsymbol{e}\cdot\mathbf{0}=0$　　B. $\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{e}=\boldsymbol{e}$

C. $\boldsymbol{e}\times\mathbf{0}=\mathbf{0}$　　D. $\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{e}=\boldsymbol{e}$　　【　】

11. 在三维直角坐标系中 $x+y=1$ 表示的图形是

A. 直线　　B. 曲线　　C. 平面　　D. 点　　【　】

12. 设 $f(x+y,xy)=x^2+y^2$，则 $f(x,y)=$

A. x^2-2xy　　B. y^2-2x

C. y^2-2xy　　D. x^2-2y　　【　】

13. 设 D 是矩形域：$a<x<b,c<y<d$，则 $\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma=$

A. $a+b+c+d$　　B. $abcd$

C. $(a-b)(d-c)$　　D. $(b-a)(d-c)$　　【　】

14. 设 Ω 为球形域：$x^2+y^2+z^2\leqslant 1$，$I_1=\iiint\limits_\Omega \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}v$，$I_2=\iiint\limits_\Omega x^2+y^2+z^2\,\mathrm{d}v$，则

A. $I_1\leqslant I_2$　　B. $I_1>I_2$

C. $I_1<0$　　D. $I_2>100$　　【　】

15. 设 $P(x,y)$、$Q(x,y)$ 在单连域 D 内具有一阶连续偏导数，则 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$ 在 D 内恒成立是在 D 内沿任何分段光滑的简单闭曲线 L 的线积分 $\oint P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$ 的

A. 充分非必要的条件　　B. 必要非充分的条件

C. 充分且必要的条件　　D. 既非充分又非必要的条件　　【　】

16. 设 L 为取逆时针方向的圆周 $x^2+y^2=54$，则 $\oint_L (x\cos x-y)\mathrm{d}x+(x+y\sin y)\mathrm{d}y=$

A. 54π　　B. -54π　　C. 108π　　D. -108π　　【　】

17. 级数 $-1+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{3^3}-\dfrac{1}{3^4}+\cdots$

A. 发散　　B. 收敛于 $-\dfrac{3}{4}$

C. 收敛于 0　　D. 收敛于 $-\dfrac{3}{2}$　　【　】

18. 函数 $f(x)=x^2e^{x^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内展成的 x 的幂级数是

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$　　B. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{n+2}}{n!}$

C. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2(n+1)}}{n!}$　　D. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{n!}$　　【　】

19. 微分方程 $y''-2y'+y=0$ 的通解为

A. $y=C_1x+C_2$　　B. $y=(C_1x+C_2)e^x$

C. $y=(C_1+C_2x)e^{-x}$　　D. $y=C_1e^x+C_2e^{-x}$　　【　】

20. 微分方程 $y'=y$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=2$ 的特解是

A. $y=e^x+1$　　B. $y=2e^x$

C. $y=2e^{2x}$　　D. $y=e^{2x}$　　【　】

第二部分　非选择题(共 60 分)

二、填空题(本大题共 10 小题,每小题 2 分,共 20 分)

21. 函数 $y = \arcsin\sqrt{x^2 - 1}$ 的定义区间为__________.

22. $\dfrac{\ln x}{x}dx = d$ __________.

23. 函数 $f(x) = 2x - 5x^2$ 的最大值为__________.

24. $\int 2^x 5^{3x} dx =$ __________.

25. $\int \arctan x dx =$ __________.

26. 设 $\boldsymbol{a} = \{1,2,3\}, \boldsymbol{b} = \{4,5,6\}$,则$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) =$ __________.

27. 设 $u = f(x,xy,xyz), f(u,v,w)$ 有一阶连续偏导数,则$\dfrac{\partial u}{\partial x} =$ __________.

28. 设连续函数 $f(x,y,z)$ 在空间闭区域 Ω 上的三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz$ 可化为 $\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{100} f(x,y,z)dz$,则空间闭区域 Ω 为__________.

29. 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{x}{3}\right)^n$ 的收敛半径为__________.

30. 微分方程 $e^{-x}dy + e^{-y}dx = 0$ 的通解是__________. 3

三、计算题(本大题共 5 小题,每小题 5 分,共 25 分)

31. 设$\begin{cases} x = (t+1)e^t \\ y = t^2 e^t \end{cases}$,求$\dfrac{d^2 y}{dx^2}$.

32. 求 $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2} - 0} (\tan x)^{2x-\pi}$.

33. 求积分$\int \dfrac{dx}{(2x+1)^{2/3} - (2x+1)^{1/2}}$.

34. 若可微函数 $f(u)$ 满足 $f'(u) + f(u) = e^{-u}$,试计算$\dfrac{\partial}{\partial x}[e^{xy} f(xy)]$.

35. 求微分方程 $y'' - y' = 0$ 满足初始条件$y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = 1$ 的特解.

四、应用和证明题(本大题共 3 小题,每小题 5 分,共 15 分)

36. 求星形线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} (a > 0)$ 的全长.

37. 设一物体以速度 $v(t) = 10t - t^2$ 作直线运动,求:

    (1) 物体从开始运动到任一时刻 $t(0 \leqslant t \leqslant 10)$ 所经过的路程;

    (2) 当物体到达加速度为零时所经过的路程.

38. 证明曲线 $xy = 1(x > 0)$ 上任一点的切线与 x 轴和 y 轴所围成的三角形的面积恒为常数.

2000年上半年高等自学考试全国统一命题考试

高等数学(工本)试卷完全详解

一、单项选择题

1.【解析】 当 $x \to \infty$ 时,y 是无穷大是指对任给正数 M,存在 $\mathscr{X} > 0$,当 $|x| > \mathscr{X}$ 时,$|y| > M$;函数 $y = f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内无界,是指对任给正数 M,都存在一点 x_0 使 $|f(x_0)| > M$.

因为 $y|_{x=2k\pi+\frac{\pi}{2}} = \left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)\sin\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$,即对任给 $M > 0$,存在 k_0 使 $2k_0\pi + \frac{\pi}{2} > M$. 又 $y|_{x=k\pi} = k\pi\sin(k\pi) = 0$ 即对任意 x,不论 $|x|$ 多大,总存在 k,使 $|k| > |x|$,$y|_{x=k\pi} = 0$. 故 $y = x\sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内无界,但不是无穷大量,即应选 D.

【答案】 选 D.

2.【解析】 利用连续函数的介值定理即可.

$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$,所以当 x 充分接近于 a 时 $f(x) < 0$,即存在 $\delta > 0$,使 $f(a+\delta) < 0$,同理 $f(b-\delta) > 0$. 又 $f(x)$ 在 $[a+\delta, b-\delta]$ 上连续且两端点处函数值异号,由介值定理,$f(x)$ 必在该区间内取得零值,即 $f(x)$ 在 (a,b) 内至少有一个零点,故选 C.

【答案】 选 C.

4 3.【解析】 由可导与可微的关系即得此结论.

【答案】 选 B.

4.【解析】 凡考查 $f'(x) = 0$ 的根的个数即 $f'(x)$ 零点的个数可以考虑使用罗尔定理.

因为 $f(x)$ 在 $[-1,0]$ 上连续,在 $(-1,0)$ 内可导,$f(-1) = f(0) = 0$,从而根据罗尔定理,在 $(-1,0)$ 内至少有一点 C_1 使 $f'(C_1) = 0$,即 $x = C_1$ 是 $f'(x) = 0$ 的一个根. 同理在 $(-2,-1)$ 和 $(-3,-2)$ 内 $f'(x)$ 也各分别至少有一个根 C_2, C_3,又 $f(x)$ 为四次多项式,所以 $f'(x)$ 为三次多项式,即 $f'(x) = 0$ 是三次方程,由代数学知识,三次方程最多有三个实根,因此 $f'(x) = 0$ 只有这三个实根,$x_1 = C_1 < 0, x_2 = C_2 < 0, x_3 = C_3 < 0$,故 $f'(x) = 0$ 正根的个数为 0,所以选 A.

【答案】 选 A.

5.【解析】 仅当极限 $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ 是 $\frac{“0”}{0}$ 或 $\frac{“\infty”}{\infty}$ 且 $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在或为 ∞ 时,才能使用罗必塔法则.

D 中极限为 $\frac{“0”}{0}$ 型,且 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos x + x\sin x}{3x^2}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x\sin x}{3x^2} = \frac{1}{3} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{3}.$$

而 A 中极限为 $\frac{“\infty”}{\infty}$ 型,但

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x + \cos x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \sin x}{1} = \lim_{x\to\infty}(1 - \sin x),$$

由于极限 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(x+\cos x)'}{(x)'} = \lim\limits_{x\to\infty}(1 - \sin x)$ 不存在,故不能使用罗必塔法则,事实上

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x + \cos x}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\cos x\right) = 1.$$

B 中极限，由于 $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$，$\lim\limits_{x\to 0^+}x=0$，即 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{x}$ 不是 $\dfrac{\text{“}0\text{”}}{0}$ 或 $\dfrac{\text{“}\infty\text{”}}{\infty}$，故不能使用罗必塔法则，同理，由于 $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$，故 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{\sin x}$ 也不是 $\dfrac{\text{“}0\text{”}}{0}$ 或 $\dfrac{\text{“}\infty\text{”}}{\infty}$ 型未定式，从而也不能使用罗必塔法则，因此应选 D.

【答案】 选 D.

6.**【解析】** 由定积分定义求一个 n 项和的极限，关键要把这个和式表示成某函数在给定区间上的定积分，通过计算该定积分的值得出此和的极限.

因为
$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n-1}{n}\pi\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n-1}{n}\pi+\sin\frac{n}{n}\pi\right)\end{aligned}$$

令 $f(x)=\sin(\pi x)$，考察 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的定积分，将区间 $[0,1]$ 分成 n 等分，在每个小区间 $[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}]$，$(i=1,2,\cdots,n)$ 上取右端点作乘积的和式，即

$$\begin{aligned}&\sin\frac{\pi}{n}\cdot\frac{1}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}\cdot\frac{1}{n}+\cdots+\sin\frac{n-1}{n}\pi\cdot\frac{1}{n}+\sin\frac{n}{n}\pi\cdot\frac{1}{n}.\\&=\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n-1}{n}\pi\right)\end{aligned}$$

从而
$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n-1}{n}\pi\right)\\&=\int_0^1\sin\pi x\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{\pi}\cos\pi x\Big|_0^1=\frac{2}{\pi}.\end{aligned}$$

故选 C.

【答案】 选 C.

7.**【解析】** 注意到 $\lim\limits_{x\to 0}\int_0^x\cos t^2\,\mathrm{d}t=0$，且 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x\cos t^2\,\mathrm{d}t=\cos x^2$ 即可得所求结果.

因为
$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x\cos t^2\,\mathrm{d}t}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\int_0^x\cos t^2\,\mathrm{d}t)'}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x^2}{1}=\cos 0=1,$$

故选 A.

【答案】 选 A.

8.**【解析】** 利用牛顿一莱布尼兹公式即得所求结果.

因为
$$\int_1^e\frac{1+\ln x}{x}\mathrm{d}x=(\ln x+\frac{1}{2}\ln^2 x)\Big|_1^e=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2},$$

故选 A.

【答案】 选 A.

9.**【解析】** 利用极坐标系中的面积公式：
$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

由于方程 $r=2a\cos\theta$ 表示直角坐标系下圆心在点 $(a,0)$，半径为 a 的圆，故所围成的面积为 πa^2（圆的面积公式）.

【答案】 选 B.

10.【解析】 因为 $|\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{0}|=|\boldsymbol{e}|\cdot|\boldsymbol{0}|\sin(\widehat{\boldsymbol{e},\boldsymbol{0}})=0$,由定义(模为零的向量称为零向量).

故$\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$,故选 C.

注意 $|\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{e}|=|\boldsymbol{e}|\cdot|\boldsymbol{e}|\sin(\widehat{\boldsymbol{e},\boldsymbol{e}})=0$,所以 $\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{e}=\boldsymbol{e}$ 是错误的,另外两个向量的数量积是一个数量,从而 $\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{e}=\boldsymbol{e}$ 都是错误的,即 A、B、D 都不正确.

【答案】 选 C.

11.【解析】 因为在三维直角坐标系中,任何一个三元一次方程都表示一个平面,而方程 $x+y=1$ 是三元一次方程,由于在该方程中缺少未知量 z,故该方程表示平行于 z 轴的平面,故选 C.

【答案】 选 C.

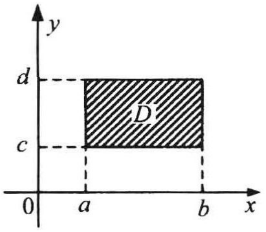
12.【解析】 因为 $f(x+y,xy)=x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$,

故 $f(x,y)=x^2-2y$,从而选 D.

【答案】 选 D.

13.【解析】 利用二重积分的几何意义,

$\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma = D$ 的面积,即可得所求结论.



积分域 D 如右图所示,

即 D 的面积为 $S=(b-a)(d-c)$,故

$$\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma=(b-a)(d-c),$$

因此应选 D.

【答案】 选 D.

14.【解析】 利用三重积分的性质:若在 Ω 上,$f(x,y,z)\geqslant g(x,y,z)$,则

$$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}v\geqslant\iiint\limits_\Omega g(x,y,z)\mathrm{d}v.$$

因为 $\Omega: x^2+y^2+z^2\leqslant 1$,从而 $\sqrt{x^2+y^2+z^2}\geqslant x^2+y^2+z^2$,

且当 $x^2+y^2+z^2=1$ 时,$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=x^2+y^2+z^2$,

故
$$\iiint\limits_\Omega \sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}v>\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v,$$

即 $I_1>I_2$.因此应选 B.

【答案】 选 B.

15.【解析】 见教材第 256 页定理.

【答案】 选 C.

16.【解析】 形如$\oint\limits_L X\mathrm{d}x+Y\mathrm{d}y$ 的积分,首先考察$\dfrac{\partial X}{\partial y}$ 与$\dfrac{\partial Y}{\partial x}$ 是否相等.

若相等,则当 L 是某单连域 B 内一闭曲线且 X、Y、$\dfrac{\partial X}{\partial y}$、$\dfrac{\partial Y}{\partial x}$ 在域 B 内连续时,$\oint\limits_L X\mathrm{d}x+Y\mathrm{d}y=0$;

若$\dfrac{\partial X}{\partial y}\neq\dfrac{\partial Y}{\partial x}$,则当$\dfrac{\partial Y}{\partial x}-\dfrac{\partial X}{\partial y}$ 比较简单时,考虑使用格林公式将此曲线积分化为 L 所围成域上的二重积分.

因为 $X=x\cos x-y, Y=x+y\sin y$ 且

$$\frac{\partial X}{\partial y}=-1,\frac{\partial Y}{\partial x}=1,$$

故由格林公式得

$$\int_L (x\cos x-y)\mathrm{d}x+(x+y\sin y)\mathrm{d}y=\iint_B(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y})\mathrm{d}\sigma$$

$$=\iint_B[1-(-1)]\mathrm{d}\sigma=2\iint \mathrm{d}\sigma$$

$$=2\times 54\pi=108\pi(\text{其中 }B:x^2+y^2\leqslant 54).$$

即选 C.

【答案】 选 C.

17.**【解析】** 该级数是公比 $q=-\frac{1}{3}$ 的等比级数，且 $|q|=\frac{1}{3}<1$，故该级数收敛，且和为

$$S=\frac{-1}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=-\frac{3}{4},$$

因此选 B.

【答案】 选 B.

18.**【解析】** 要把 $f(x)$ 展开为 x 的幂级数，只需将 e^{x^2} 展开为 x 的幂级数即可，又

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},(-\infty,+\infty),$$

将 x 用 x^2 替换即可得 e^{x^2} 的展开式：

所以 $$e^{x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x^2)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!},(-\infty,+\infty).$$

故 $$f(x)=x^2e^{x^2}=x^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2(n+1)}}{n!},(-\infty,+\infty).$$

故选 C.

【答案】 选 C.

19.**【解析】** 利用二阶常系数线性齐次方程的通解公式即得所求结果.

该方程的特征方程为

$$\rho^2-2\rho+1=0,\text{它的根为 }\rho_1=\rho_2=1,$$

所以该方程的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^x$，故选 B.

【答案】 选 B.

20.**【解析】** 该方程为可分离变量的方程，分离变量，得

$$\frac{1}{y}\mathrm{d}y=\mathrm{d}x,\qquad \int\frac{1}{y}\mathrm{d}y=\int\mathrm{d}x,$$

$$\ln y-\ln C=x,\qquad y=Ce^x,$$

由 $y|_{x=0}=2$，得 $C=2$，故所求特解是 $y=2e^x$，从而选 B.

注 该题为选择题，通过观察就能直接得此结论.

【答案】 选 B.

二、填空题

21.【解析】 由$\begin{cases}x^2-1\geqslant 0\\x^2-1\leqslant 1\end{cases}$， 解得 $|x|\geqslant 1$ 且 $|x|\leqslant\sqrt{2}$.

故该函数的定义域为$[-\sqrt{2},-1]\cup[1,\sqrt{2}]$.

【答案】 $[-\sqrt{2},-1]\cup[1,\sqrt{2}]$.

22.【解析】 因为 $\left(\frac{1}{2}\ln^2 x+C\right)'=\frac{\ln x}{x}$,

故 $$\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}\ln^2 x+C\right).$$

【答案】 $\frac{1}{2}\ln^2 x+C$.

23.【解析】（方法 1） $f(x)=2x-5x^2$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$，且

$f'(x)=2-10x$， 令 $f'(x)=0$， 得惟一驻点 $x=\frac{1}{5}$，

$f''\left(\frac{1}{5}\right)=-10<0$，所以 $f\left(\frac{1}{5}\right)=\frac{2}{5}-\frac{5}{25}=\frac{1}{5}$ 为 $f(x)$ 的极大值，由极值的惟一性知该极大值必为 $f(x)$ 的最大值，从而 $f(x)$ 的最大值为$\frac{1}{5}$.

（方法 2） 因 $f(x)=2x-5x^2=\frac{1}{5}-5\left(x-\frac{1}{5}\right)^2$，

所以 $f(x)$ 的最大值为 $f\left(\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{5}$.

【答案】 $\frac{1}{5}$.

24.【解析】 $\int 2^x 5^{3x}\mathrm{d}x=\int(2\cdot 5^3)^x\mathrm{d}x=\int 250^x\mathrm{d}x=\frac{250^x}{\ln 250}+C$.

【答案】 $\frac{250^x}{\ln 250}+C$.

25.【解析】 $\int\arctan x\mathrm{d}x=x\arctan x-\int\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$.

【答案】 $x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$.

26.【解析】 因为$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$垂直于$\boldsymbol{a}$，也垂直于$\boldsymbol{b}$，所以

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=0,\quad(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=0,$$

从而 $$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=0.$$

【答案】 0.

27.【解析】 利用多元复合函数的求导法则可得所求结果.

【答案】 $\frac{\partial u}{\partial x}=f'_u+yf'_v+yzf'_w$.

28.【答案】 $0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1,0\leqslant z\leqslant 100$.

29.【解析】 幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|.$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{3^n}}{\frac{1}{3^{n+1}}} = 3$，所以 $R = 3$.

【答案】 3.

30.**【解析】** 由 $e^{-x}dy + e^{-y}dx = 0$， 分离变量得 $e^y dy = -e^x dx$，
两边积分得 $e^y = -e^x + C$， 即 $e^x + e^y = C$.

【答案】 $e^x + e^y = C$.

三、计算题

31.**【解析】** 应用参数方程确定的函数的求导公式即得所求结果.

【答案】

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2te^t + t^2e^t}{e^t + (t+1)e^t} = \frac{(t^2+2t)e^t}{(t+2)e^t} = \frac{t(t+2)}{t+2} = t,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt}(t)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{(t+2)e^t}.$$

32.**【答案】**
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\tan x)^{2x-\pi} = e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(2x-\pi)\ln\tan x} = e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\ln\tan x}{\frac{1}{2x-\pi}}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}-\frac{\frac{1}{\tan x}\cdot\sec^2 x}{\frac{2}{(2x-\pi)^2}}} = e^{-\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\frac{1}{\tan x\cdot\cos^2 x}}{\frac{2}{(2x-\pi)^2}}} = e^{-2\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{(2x-\pi)^2}{\sin 2x}}$$

$$= e^{-2\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{4(2x-\pi)}{2\cos 2x}} = e^0 = 1.$$

33.**【解析】** 这是简单无理函数的积分，通过变量替换将此积分化为有理函数积分，由于被积函数中含有 $\sqrt[3]{(2x+1)^2}$ 和 $\sqrt{2x+1}$，要同时将这两个根号去掉，令 $\sqrt[6]{2x+1} = t$ 即可.

【答案】 令 $\sqrt[6]{2x+1} = t$，得 $x = \dfrac{t^6-1}{2}$，$dx = 3t^5dt$. 于是

$$\text{原积分} = \int\frac{1}{(2x+1)^{2/3} - (2x+1)^{1/2}}dx = \int\frac{3t^5}{t^4-t^3}dt$$

$$= 3\int\frac{t^2}{t-1}dt = 3\int\left(t+1+\frac{1}{t-1}\right)dt = 3\left(\frac{t^2}{2}+t+\ln|t-1|\right)+C$$

$$= \frac{3}{2}t^2 + 3t + 3\ln|t-1| + C$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt[3]{2x+1} + 3\sqrt[6]{2x+1} + 3\ln|\sqrt[6]{2x+1}-1| + C.$$

34.**【答案】**
$$\frac{\partial}{\partial x}[e^{xy}f(xy)] = \frac{\partial}{\partial x}(e^{xy})\cdot f(xy) + e^{xy}\cdot\frac{\partial}{\partial x}[f(xy)]$$

$$= ye^{xy}f(xy) + e^{xy}\cdot yf'(xy)$$

$$= ye^{xy}[f(xy) + f'(xy)],$$

因为 $f'(u)+f(u)=e^{-u}$,故 $\dfrac{\partial}{\partial x}[e^{xy}f(xy)]=ye^{xy}\cdot e^{-xy}=y$,

所以 $f'(xy)+f(xy)=e^{-xy}$.

35.**【解析】** 该方程可以看作是二阶常系数齐次微分方程,故可用特征根法求出此方程的通解,进一步可求出其满足初始条件的特解.

另一方面该方程也可以看作是可降阶的微分方程,从而采用降阶求解法.

〈方法 1〉 特征方程为 $\rho^2-\rho=0$,它的根为 $\rho=0,\rho=1$.

故该方程的通解为 $y=C_1+C_2e^x$,

由 $y|_{x=0}=0$, 得 $C_1+C_2=0$,

又 $y'=C_2e^x$ 由 $y'|_{x=0}=1$ 得 $C_2=1$,

即 $\begin{cases}C_1+C_2=0\\C_2=1\end{cases}$ 解得 $C_1=-1,C_2=1$,

从而所求特解为 $y=e^x-1$.

〈方法 2〉 令 $y'=P,y''=P'$ 于是原方程可化为 $P'-P=0$, $\dfrac{dP}{P}=dx$.

两边积分得 $P=C_1e^x$,

即 $y'=C_1e^x$,由 $y'|_{x=0}=1$ 得 $C_1=1$,

所以 $y'=e^x$,于是 $y=e^x+C_2$,

由 $y|_{x=0}=0$ 得 $0=e^0+C_2=1+C_2$ 得 $C_2=-1$

10 故所求特解为 $y=e^x-1$.

四、应用和证明题

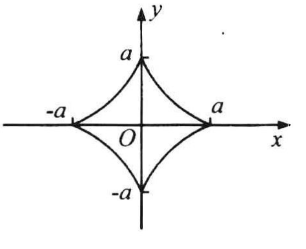
36.**【解析】** 应用曲线弧长公式:

在直角坐标系下,曲线方程为 $y=f(x),a\leqslant x\leqslant b$,则弧长 $S=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}dx$.

若曲线由参数方程表示:$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$,$\alpha\leqslant t\leqslant\beta$,

则 弧长 $S=\int_\alpha^\beta\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt$.

【答案】 所给星形线的图形如右图所示,由图形的对称性知该星形线的全长 $S=4S_1$,其中 S_1 是该星形线位于第一象限中的一段.



〈方法 1〉将方程 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 两边对 x 求导得

$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}\cdot y'=0,$$

$$y'=-\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

$$S=4S_1=4\int_0^a\sqrt{1+y'^2}dx=4\int_0^a\sqrt{1+[-\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}]^2}dx=4\int_0^a\sqrt{1+\frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}}dx$$

$$=4\int_0^a\sqrt{\frac{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}}dx=4\int_0^a\sqrt{\frac{a^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}}dx$$

$$= 4\int_0^a a^{\frac{1}{3}} \cdot x^{-\frac{1}{3}} \mathrm{d}x = 4a^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} \Big|_0^a = 4a^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{3}{2} a^{\frac{2}{3}} = 6a.$$

〈方法 2〉星形线在第一象限中一段的参数方程为

$$x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t, \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

$$S = 4S_1 = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-3a\cos^2 t\sin t)^2 + (3a\sin^2 t\cos t)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(3a)^2\cos^2 t\sin^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t)}\,\mathrm{d}t$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a\cos t\sin t\,\mathrm{d}t = 12a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\,\mathrm{d}(\sin t) = 12a \cdot \frac{1}{2}\sin^2 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 6a.$$

37.**【答案】**

(1)$S(t) = \int_0^t v(t)\mathrm{d}t = \int_0^t (10t - t^2)\mathrm{d}t = \left(5t^2 - \frac{1}{3}t^3\right)\Big|_0^t = 5t^2 - \frac{1}{3}t^3.$

(2) 加速度 $a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 10 - 2t.$

当 $a = 0$ 时,即 $10 - 2t = 0, t = 5$,

故所求路程为 $S(5) = 5 \times 5^2 - \frac{1}{3} \times 5^3 = \frac{2}{3} \times 5^3 = \frac{250}{3}.$

38.**【证明】** 设(x_0, y_0)为双曲线 $xy = 1(x > 0)$ 上任一点,由 $xy = 1$ 得

$$y = \frac{1}{x}, \quad y'\big|_{x=x_0} = -\frac{1}{x_0^2},$$

从而双曲线在(x_0, y_0)处的切线方程为

$$y - y_0 = -\frac{1}{x_0^2}(x - x_0),$$

令 $x = 0$ 得此切线在 y 轴上的截距为

$$y = y_0 + \frac{1}{x_0} = \frac{x_0 y_0 + 1}{x_0} = \frac{2}{x_0},$$

令 $y = 0$ 得此切线在 x 轴上的截距为

$$x = x_0^2 y_0 + x_0 = x_0(x_0 y_0) + x_0 = x_0 + x_0 = 2x_0,$$

于是此切线与两坐标轴所围成的三角形的面积为

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2x_0 \cdot \frac{2}{x_0} = 2,$$

由(x_0, y_0)的任意性知曲线 $xy = 1(x > 0)$ 上任一点处的切线与 x 轴和 y 轴围成的三角形的面积都等于 2,即为一常数.

2000年下半年高等教育自学考试全国统一命题考试

高等数学(工本)试卷

第一部分 选择题(共40分)

一、单项选择题(本大题共20小题,每小题2分,共40分)在每小题列出的四个选项中只有一个选项是符合题目要求的,请将正确选项前的字母填在题后的括号内。

1. 设 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$,$\varphi(x)=x-1$,则 $f[\varphi(x)]$ 的定义区间为

A. $[-1,1]$ B. $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

C. $[0,2]$ D. $(-\infty,+\infty)$ 【 】

2. $x=0$ 是函数 $y=\arctan\dfrac{1}{x}$ 的

A. 可去间断点 B. 跳跃间断点

C. 无穷间断点 D. 振荡间断点 【 】

3. 函数 $y=\ln\cos x$ 的导数为

A. $\cot x$ B. $\tan x$ C. $-\tan x$ D. $-\cot x$ 【 】

4. 设 $f(x)$ 是可导的偶函数,则 $f'(x)$ 必是

A. 奇函数 B. 偶函数

C. 非奇非偶函数 D. 连续函数 【 】

5. 曲线 $y=\dfrac{x^3-8}{x-2}$ 的渐近线条数是

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3 【 】

6. 下列极限可用罗必塔法则求出的是

A. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{e^x}$ B. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$

C. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{\sin x}$ D. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos x}{x}$ 【 】

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}=$

A. 0 B. $+\infty$ C. $\dfrac{1}{4}$ D. $\dfrac{1}{3}$ 【 】

8. 设 a、b 为常数,则 $\dfrac{d}{dx}\int_a^b \sin x^2 dx=$

A. $\sin b^2$ B. $-\sin a^2$ C. $\sin x^2$ D. 0 【 】

9 $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}=$

A. $\dfrac{\pi}{4}$ B. $\dfrac{\pi}{2}$ C. $\dfrac{3\pi}{4}$ D. π 【 】

10. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\cos^3\theta d\theta=$