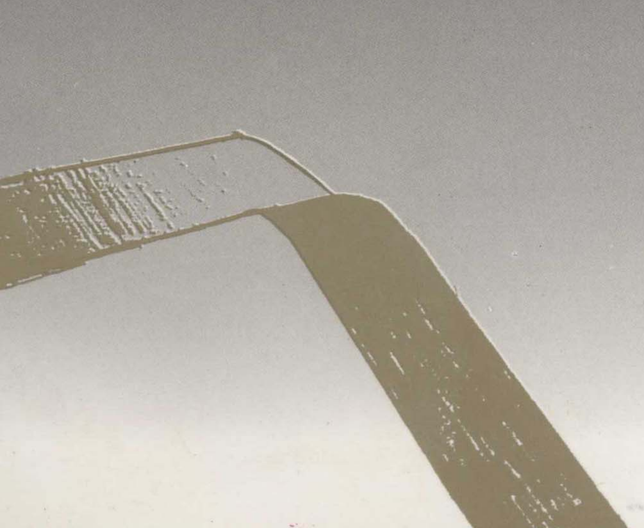
高国士　陈必胜　吴利生　卫瑞霞　编著

拓扑空间理论的命题与例题

江苏科学技术出版社

TOPOLOGY



拓扑空间理论的命题与例题

（苏）新登字第002号

拓扑空间理论的命题与例题

高国士　陈必胜　吴利生　卫瑞霞

出版发行：江苏科学技术出版社

经　　销：江苏省新华书店

印　　刷：江苏新华印刷厂

开本 787×1092 毫米 1/32　印张 13.25　插页 2　字数 293,000

1992 年 3 月第 1 版　　1992 年 3 月第 1 次印刷

印数 1—1,000 册

ISBN　7—5345—1316—2

O · 88　　　　　定价：5.50 元

致 读 者

社会主义建设的根本任务是发展生产力，而社会生产力的发展必须依靠科学技术。当今世界已进入新科技革命的时代，科学技术的进步，不仅是世界经济发展、社会进步和国家富强的决定因素，也是实现我国社会主义现代化的关键。

科技出版工作肩负着促进科技进步，推动科学技术转化为生产力的历史使命。为了更好地贯彻党中央提出的“把经济建设转到依靠科技进步和提高劳动者素质的轨道上来”的战略决策，进一步落实中共江苏省委、江苏省人民政府作出的“科技兴省”的决定，江苏科学技术出版社于1988年倡议筹建江苏省科技著作出版基金。在江苏省人民政府、省委宣传部、省科委、省新闻出版局负责同志和有关单位的大力支持下，经省政府批准，由江苏省科学技术委员会、省出版总社和江苏科学技术出版社共同筹集，于1990年正式建立了“江苏省金陵科技著作出版基金”，用作支持自然科学范围内的符合条件的优秀科技著作的出版补助。

建立出版基金是社会主义出版工作在改革中出现的新生事物，期待得到各方面给予热情扶持，在实践中不断总结经验，使它逐步壮大和完善。更希望通过多种途径扩大这一基金，以支持更多的优秀科技著作的出版。

这次首批获得江苏省金陵科技著作出版基金补助出版的科技著作的顺利问世，还得到中国核工业华兴建设公司的赞助和参加评审工作的教授、专家的大力支持，特此表示衷心感谢！

江苏省金陵科技著作出版基金管理委员会

前　言

点集拓扑学作为数学学科的基础之一，已经渗透到许多数学分支中去，并且在电工学、桁架力学等技术科学中也有着一定的应用。因此，掌握点集拓扑学的基础知识，对于大学数学系的学生(包括研究生)是非常必要的，对于理工科的大学生也是有益的。

本书包含了点集拓扑学中拓扑空间理论方面的基本内容：拓扑空间中的基本概念，分离性公理，可数性公理，紧空间及其推广，连通空间和度量空间等。在材料的处理上，我们参考国外Moore教学法的思想，重视启发学生的积极思维，鼓励读者自己进行探索。为此，在每章每节的开始，我们引入基本概念和主要命题，然后有选择地详细论证几个典型的例题作为示范，最后列出一些命题作为练习题由读者自己去思考和探索它们的证明。在安排与叙述上，注意由浅入深，化难为易，深入分析，循序渐进。实践证明，这种强调学生自己动手探索证明的学习方法对于培养学生分析问题、解决问以题及从事科研工作的能力是行之有效的。因此，本书对于大学数学系的高年级学生、研究生以及从事点集拓扑学课程教学的老师是一本有一定价值的参考书，对于希望了解点集拓扑学初步的读者(包括理工科大学生)也是一本较易阅读的入门书。

本书由我们四人分工执笔，其中第一、二章由卫瑞霞编写，第三、四章由陈必胜编写，第五章由吴利生编写，第六章由高国士编写，最后由高国士定稿。插图由徐志鹏绘制。

感谢江苏省金陵科技著作出版基金管理委员会和江苏科技出版社的支持，使本书得以顺利出版。

由于我们水平有限，恳切希望广大读者批评指正。

编　　者

1991年10月于苏州大学

目　　录

第一章　集合与映射

第一节　集合及其运算 …… 1
第二节　关系、映射 …… 20
第三节　基数 …… 35
第四节　序数 …… 44
第五节　选择公理 …… 60

第二章　拓扑空间概念

第一节　拓扑空间 …… 65
第二节　开基和邻域基 …… 81
第三节　闭包、内核 …… 97
第四节　收敛性 …… 115
第五节　连续映射、同胚 …… 132
第六节　子空间、积空间与商空间 …… 145

第三章　分离公理和可数性公理

第一节　T_0、T_1、T_2-空间 …… 164
第二节　正则空间与完全正则空间 …… 178
第三节　正规空间 …… 197
第四节　可数性公理 …… 216
第五节　可分性与 Lindelöf 性 …… 231

第四章　紧空间及其推广

第一节　紧空间 …… 250
第二节　列紧空间与序列紧空间 …… 270
第三节　局部紧空间 …… 286
第四节　完备映射 …… 301
第五节　仿紧空间 …… 311

第五章　连通性
第一节　连通空间 ……329
第二节　连通区和局部连通空间 ……340
第三节　道路连通空间 ……351
第六章　度量空间
第一节　度量空间 ……359
第二节　度量空间的性质 ……375
第三节　拓扑空间的度量化 ……389
第四节　完备度量空间 ……401

第一章　集 合 与 映 射

第一节　集合及其运算

一、内 容 提 要

1. 集合概念

集合概念通常不给以定义。举例说明如下：例如全体自然数所成的集合或平面上到两个定点距离相等的点所成的集合，每一自然数或每一满足上述条件的点称为相应的集合的元素（或称为点）。集合一般用大写字母如A、B、X、Y、…等表示，集合的元素一般用小写字母如a、b、x、y、…等表示。

设X是一集合，x是X的一个元素，则称x属于X，记作$x\in X$。若x不是X的元素，则称x不属于X，记作$x\notin X$（或$x\bar{\in} X$）。

表示集合的方式一般有以下二种：

（1）如果集合内的元素不多，则可直接写出它的全部元素。如由1,2,3三个数字组成的集合A可记为$A=\{1,2,3\}$。

（2）用写出集合的全体元素所满足的共同性质的办法来表示，例如前面例中的"自然数"或"到两定点距离相等的点"就是相应集合的元素满足的共同性质。一般说，设$p(x)$是某一与x有关的条件，所有满足这个条件$p(x)$的事物x作成的集合用$\{x:p(x)\}$表示。例如：$f(x)$是定义在某集合E上的

实值函数，a 为某一实数，则 $\{x: x\in E, f(x)>a\}$ 表示 E 中所有使 $f(x)$ 的值大于 a 的 x 所组成的集合. 这里的 $p(x)$ 是“$x\in E$，$f(x)>a$”.

设 A、B 为二个集合，如果 A 的每个元素都是 B 的元素.（记为“$x\in A\Rightarrow x\in B$”），则称集合 A 是集合 B 的**子集**，或称 A 包含于 B 之内，记为 $A\subseteq B$（或简记为 $A\subset B$）.

若 $A\subseteq B$ 与 $B\subseteq A$ 同时成立，则集合 A 与集合 B 的元素完全相同，此时称集合 A 与集合 B 相 等，记 作 $A=B$. 若 $A\subseteq B$，$A\neq B$，则称 A 为 B 的真子集，或 B 真包含 A.

设 A, B, C 是任意三个集合，则容易证明：

(1) $A\subseteq A$,

(2) 若 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$.

没有任何元素的集合称为**空集**，记为 $\varnothing$. 空集是任何集合的子集.

为方便计，本书中对一些常用的集合给予专用记号如下：

N = 全体非负整数的集合 $=\{0,1,2,3,\cdots\}$；

N^* = 全体自然数的集合 $=\{1,2,3,\cdots\}$；

Z = 全体整数的集合 $=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$；

Q = 全体有理数的集合；

P = 全体无理数的集合；

R = 全体实数的集合；

C = 全体复数的集合.

2. 集合的运算

(1) 集合的**并**（或称**和**）

二个集合 A 与 B 的并（记为 $A\cup B$），是由 A 的一切元素和 B 的一切元素所组成的集合，即：

$$A \cup B = \{x: x \in A \text{ 或 } x \in B\}。$$

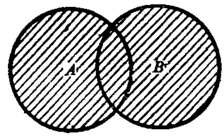


图 1-1

如图 1-1 的阴影部分所示。

一般地，设D为指标集，$\{A_\alpha\}_{\alpha \in D}$是一族集合，则它们的并（记为 $\bigcup\limits_{\alpha \in D} A_\alpha$）是由这个集族中诸集合的一切元素所组成的集合，也就是由至少属于这个集族中某一集合的一切元素所组成的集合，即

$$\bigcup_{\alpha \in D} A_\alpha = \{x: \text{存在 } \alpha_0 \in D,\ x \in A_{\alpha_0}\}$$

设$\mathscr{B}$是X的一子集族（X的某些子集所成的集合），则这些子集的**并**也可记为$\bigcup\{B: B \in \mathscr{B}\}$。

（2）集合的**交**。

二个集合A和B的交（记为$A \cap B$），是由既属于集合A又属于集合B的元素所组成的集合，即

$$A \cap B = \{x: x \in A \text{ 且 } x \in B\}。$$

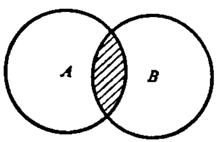


图 1-2

如图 1-2 的阴影部分所示。

一般地，一族集合$\{A_\alpha\}_{\alpha \in D}$的交（记为 $\bigcap\limits_{\alpha \in D} A_\alpha$），是由属于这个集族中每个集合的元素所组成的集合，即

$$\bigcap_{\alpha \in D} A_\alpha = \{x: \text{对每一个 } \alpha \in D,\ x \in A_\alpha\}。$$

设$\mathscr{B}$是X的一子集族，则它们的交也可记为

$$\bigcap\{B: B \in \mathscr{B}\}。$$

若 $A \cap B = \varnothing$，则称A与B不交（或互斥）。

（3）集合的**差**

集合A与B之差（记为 $A-B$），是由属于A而不属于B的元素所组成的集合．即

$$A-B=\{x：x\in A \text{ 而 } x\notin B\},$$

如图 1-3 阴影部分所示．

若$B\subseteq A$，则称 $A-B$ 为B相对于A的余集，记为 C_AB．当所讨论的集合 $A,B,\cdots$ 均为某个集合X的子集时，则称X为基础集，此时 $A,B,\cdots$相对于X的余集 $X-A,X-B,\cdots$可以分别写为 $CA,CB,\cdots$等等．

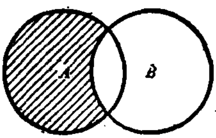


图 1-3

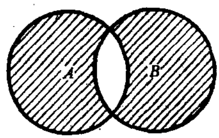


图 1-4

集合A和B的**对称差**（记为$A\Delta B$），是属于A而不属于B的集合与属于B而不属于A的集合的并．即

$$A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)$$

如图 1-4 阴影部分所示：

（4）集合的积

集合A与B的**笛卡儿积或简称积**（记为$A\times B$）．是指由一切序对(a,b)所组成的集合，其中 a 取遍集合A，b 取遍集合B，即

$$A\times B=\{(a,b)：a\in A,\ b\in B\}$$

（序对是指一对有次序的元素，注意：$(a,b)\neq(b,a)$）．

设 X_i，$i=1,2,\cdots,n$ 是n个集合，它们的笛卡儿积

$$\left(\text{记为}\prod_{i=1}^{n}X_i\right),$$

是由所有可能的 n 元序组 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 所组成的集合，其中每个 $x_i\in X_i$，x_i 称为 x 的第 i 个坐标，而 X_i 称为 $\prod\limits_{i=1}^{n}X_i$ 的第 i 个坐标空间，即

$$\prod_{i=1}^{n}X_i=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n):x_i\in X_i,\ 1\leqslant i\leqslant n\}.$$

更一般地，集族 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 的笛卡儿积是指

$$\prod_{\alpha\in A}A_\alpha=\{x=(x_\alpha)_{\alpha\in A}:\ x_\alpha\in A_\alpha,\alpha\in A\}.$$

3．集合的运算律

集合间的运算满足以下运算律：

（1）交换律

$$A\cup B=B\cup A,\ A\cap B=B\cap A,\ A\Delta B=B\Delta A.$$

（2）结合律

$$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C,$$
$$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C.$$

（3）分配律

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C),$$

一般地：$A\cap(\bigcup\limits_{\alpha\in D}B_\alpha)=\bigcup\limits_{\alpha\in D}(A\cap B_\alpha)$

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

一般地：$A\cup(\bigcap\limits_{\alpha\in D}B_\alpha)=\bigcap\limits_{\alpha\in D}(A\cup B_\alpha)$.

注记　集合的积不满足交换律，$A\times B$ 未必等于 $B\times A$，例如 $A=\{1,2\}$，$B=\{1,2,3\}$，则

$$A\times B=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3)\},$$
$$B\times A=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}.$$

在它们的元素中 $(1,3)\neq(3,1)$，$(2,3)\neq(3,2)$，

所以 $$A\times B\neq B\times A$$

二、例题分析

例1 设 $N^*=\{1, 2, \cdots, n, \cdots\}$为全体自然数所成的集合，并设它的一些子集为：

$A=\{x：x$ 是偶数$\}$

$B=\{x：$存在 $y\in N^*$，使得 $2y=x\}$

$C=\{x：x>1\}$

$D=\{x：x=2\}$

$E=\{x：x$ 是偶数或 $1\}$

$F=\{x：$存在 $y\in N^*$，使得 $y+1=x\}$。

讨论下列问题：

(1) 数"2"属于上述集合中的哪几个？

(2) 数"3"属于上述集合中的哪几个？

(3) 这些集合中哪几个是相等的？

(4) 这些集合之间哪几个具有真包含关系？

解：由于所讨论的这些集合均为自然数集的子集，所以为便于比较，我们可以根据题设把各个集合的元素列举出来.

$A=\{x：x$ 是偶数$\}=\{2,4,6,\cdots,2n,\cdots\}$

$B=\{x：\exists y\in N^*$，使 $2y=x\}=\{2,4,6,\cdots,2n,\cdots\}$

$C=\{x：x>1\}=\{2,3,4,\cdots,n,\cdots\}$

$D=\{x：x=2\}=\{2\}$

$E=\{x：x$ 是偶数或 $1\}=\{1,2,4,6,\cdots, 2n,\cdots\}$

$F=\{x：\exists y\in N^*$，使 $y+1=x\}=\{2,3,4,\cdots,n,\cdots\}$。

这样，上面提出的问题便容易解决了.

(1) "2"属于 A、B、C、D、E、F 中的每一个。

(2) $3\in C$，$3\in F$。

(3) $A=B$，$C=F$。

(4) $A\subseteq E$，$B\subseteq E$；$A\subseteq F$，$B\subseteq F$；
$A\subseteq C$，$B\subseteq C$；$D\subseteq A$，$D\subseteq B$，$D\subseteq C$，
$D\subseteq E$，$D\subseteq F$。

例 2 设X是一集合，A、B 为X的二个子集，试证明：若$A\cup B=X$，$A\cap B=\varnothing$，则 $A=X-B$ 且 $B=X-A$。

证 要证明集合的等式成立。通常的方法是：先证明凡属于等式左端集合的元素必属于等式右端的集合，即"左$\subseteq$右"，再证明凡属于等式右端集合的元素必属于等式左端的集合，即"右$\subseteq$左"，从而按集合相等的定义即得"左＝右"。

为此，设 $x\in A$，$\because$ $A\subseteq X$，$\therefore$ $x\in X$，

又 $\because$ $A\cap B=\varnothing$，$\therefore$ $x\notin B$。

从而 $x\in X-B$，因此，$A\subseteq X-B$。

反之，设 $x\in X-B$，则 $x\in X$，而 $x\notin B$，

$\because$ $X=A\cup B$，$\therefore$ $x\in X\Rightarrow x\in A$ 或 $x\in B$，但因 $x\notin B$，

$\therefore$ 必有 $x\in A$，因此，$X-B\subseteq A$，

综上所述得 $X-B=A$。

同理可证 $B=X-A$。

注记 集合之间的运算与普通数之间的运算有很大差别，例如，对于任意两个集合A、B，若$A\cup B=X$，则一般未必有

$A=X-B$ 或 $B=X-A$

成立。如图 1-5 所示$X-B$为阴影部分，此时显然$X-B\neq A$。

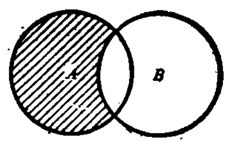


图 1-5

本题说明当$A\cup B=X$且$A\cap B=\varnothing$时，有上面二式成立。

例 3 设X为一集合，A、B为X的子集，证明下列各式成立：

(1) $C\varnothing = X$; $CX = \varnothing$.

(2) $A \cup CA = X$; $A \cap CA = \varnothing$.

(3) $C(CA) = A$;

(4) $A - B = A \cap CB$.

证明　在集合论中，证明集合之间的一些等式的方法，除了例 2 所介绍的那种常用的方法外，还可利用一些已知的集合的运算律及已经证明过的等式来证明一些新的等式。

(1) $\because \varnothing$不含任何元素，$\therefore$显然有$C\varnothing = X - \varnothing = X$.并且有$CX = X - X = \varnothing$.

(2) $\because A$及CA均为X的子集，$\therefore$显然有 $A \cup CA \subseteq X$.反之，若 $x \in X$，则或者 $x \in A$ 或者 $x \notin A$. 后者表示

$$x \in X - A = CA$$

$\therefore x \in A \cup CA$　$\therefore X \subseteq A \cup CA$. 因此 $A \cup CA = X$.

显然，$A \cap CA = \varnothing$.

(3) 由(2)知 $A \cup CA = X$，$A \cap CA = \varnothing$,则由例 2 知

$$A = X - CA = C(CA)$$

(4) 设 $x \in A - B$，则 $x \in A \subset X$，且 $x \notin B$，即

$$x \in X - B = CB$$

$\therefore x \in A$，且 $x \in CB$，即 $x \in A \cap CB$，因此

$$A - B \subseteq A \cap CB.$$

反之，设 $x \in A \cap CB$，则 $x \in A$,且 $x \in CB = X - B$. 由后者，$x \notin B$，$\therefore x \in A$，且 $x \notin B$，即 $x \in A - B$. 因此

$$A \cap CB \subseteq A - B.$$

综上，$A - B = A \cap CB$.

例 4　证明 De Morgan 公式.

(1) $X - \bigcup_{\alpha \in D} A_\alpha = \bigcap_{\alpha \in D} (X - A_\alpha)$,

(2) $X-\bigcap\limits_{\alpha\in D}A_\alpha=\bigcup\limits_{\alpha\in D}(X-A_\alpha)$。

证明　为证明上述二等式，只须搞清

$$x\notin\bigcup_{\alpha\in D}A_\alpha \quad 及 \quad x\notin\bigcap_{\alpha\in D}A_\alpha$$

的含意即行。由定义知，$x\in\bigcup\limits_{\alpha\in D}A_\alpha$，表示有$\alpha_0\in D$，使$x\in A_{\alpha_0}$。因而$x\notin\bigcup\limits_{\alpha\in D}A_\alpha$就表示对每个$\alpha\in D$，均有$x\notin A_\alpha$。同样，$x\in\bigcap\limits_{\alpha\in D}A_\alpha$表示对每个$\alpha\in D$有$x\in A_\alpha$。因而$x\notin\bigcap\limits_{\alpha\in D}A_\alpha$就表示有$\alpha_0\in D$，使$x\notin A_{\alpha_0}$。

(1) 设$x\in X-\bigcup\limits_{\alpha\in D}A_\alpha$。则$x\in X$，且$x\notin\bigcup\limits_{\alpha\in D}A_\alpha$。由后者对每个$\alpha\in D$均有$x\notin A_\alpha$，因而对每个$\alpha\in D$有$x\in X-A_\alpha$，即$x\in\bigcap\limits_{\alpha\in D}(X-A_\alpha)$，因此$X-\bigcup\limits_{\alpha\in D}A_\alpha\subseteq\bigcap\limits_{\alpha\in D}(X-A_\alpha)$。

反之，设$x\in\bigcap\limits_{\alpha\in D}(X-A_\alpha)$，则对每个$\alpha\in D$，$x\in X-A_\alpha$，即$x\in X$，且对每个$\alpha\in D$，$x\notin A_\alpha$。由后者$x\notin\bigcup\limits_{\alpha\in D}A_\alpha$，因而$x\in X-\bigcup\limits_{\alpha\in D}A_\alpha$，所以$\bigcap\limits_{\alpha\in D}(X-A_\alpha)\subseteq X-\bigcup\limits_{\alpha\in D}A_\alpha$。

因此　$X-\bigcup\limits_{\alpha\in D}A_\alpha=\bigcap\limits_{\alpha\in D}(X-A_\alpha)$。

(2) 设$x\in X-\bigcap\limits_{\alpha\in D}A_\alpha$。则$x\in X$，且$x\notin\bigcap\limits_{\alpha\in D}A_\alpha$。由后者，有$\alpha_0\in D$，使$x\notin A_{\alpha_0}$，因而$x\in X-A_{\alpha_0}$。所以

$$x\in\bigcup_{\alpha\in D}(X-A_\alpha),$$

故

$$X-\bigcap_{\alpha\in D}A_\alpha\subseteq\bigcup_{\alpha\in D}(X-A_\alpha)。$$

反之，设$x\in\bigcup\limits_{\alpha\in D}(X-A_\alpha)$，则有$\alpha_0\in D$，使$x\in X-A_{\alpha_0}$。即$x\in X$且$x\notin A_{\alpha_0}$，由后者，$x\notin\bigcap\limits_{\alpha\in D}A_\alpha$，故

$$x\in X-\bigcap_{\alpha\in D}A_\alpha,$$