

画法几何学

胡 义 覃光容 主编



DESCRIPTIVE GEOMETRY

成都科技大学出版社

画法几何学

胡 义 覃光容 主编

成都科技大学出版社

内 容 简 介

本书根据国家教委1987年颁布的《画法几何及机械制图课程教学基本要求》的精神，按照100~150学时的教学要求编写而成。

全书共分投影法的基本理论、点、线、面、直线与平面及平面与平面的相对位置、投影变换、曲线与曲面、几何体的投影、平面与立体的表面相交、直线与曲面立体的表面相交、两立体的表面相交、立体表面的展开等十一章。与本书配套的《画法几何习题集》(100~150学时)同时出版，可供选用。

本书系统性强，逻辑严谨。由朱育万教授主审。可作为高等工科院校100~150学时各专业的教材，也可供电大、夜大、职大、函大使用及工程技术人员参考。

画 法 几 何 学

胡 义 覃光容 主编

成都科技大学出版社出版发行

四川省新华书店经销

成都市国营郫县印刷厂印刷

开本 787×1092 1/16 印张 11.25 字数 220千字

1989年7月第1版 1989年7月第1次印刷

印数00001—10000

ISBN7-5616-0090-9/O·9 定价3.40元

序

本书根据国家教委1987年颁布的《画法几何及机械制图课程教学基本要求》的精神，总结和吸取多年的教学经验，按照100~150学时的教学要求编写而成。

在编写过程中，力求处理好以下问题：

1. **注意加强基础。**全书突出画法几何的基本理论、基本概念和基本作图技能，并注意了基本内容的系统性。力求做好空间分析与投影作图的结合，发展空间想像与建立几何模型的结合。重点培养空间几何问题的图解能力，空间想像能力和空间分析能力。

2. **注意理论联系实际。**全书的内容和例题均力求反映工程实际中典型的画法几何问题。在保证基本内容讲解清楚的前提下，突出了解题方法的论述，题目类型较多，难度由浅入深，作图步骤清晰，以期开拓运用画法几何理论图解空间几何问题的思路和手段。

3. **注意少而精。**在内容选择上突出重点，力求简明扼要；在图例选择上力求典型性和代表性；在编写上力求概念确切，论述严谨，深浅适中，循序渐进，图文结合，逻辑性强，有利于自学。

4. **注意拓宽使用范围。**本书内容的结构与安排，力求具有通用性。同时，又考虑了不同专业的教学需要，有些对少学时类型专业不作要求的内容，可以略去不用，但不致影响整个体系的完整性。

本书由成都科技大学胡义、覃光容主编。

参加本书编写的有：胡义（序、绪论、第一章、第五章、第六章），张碧华、苟桂华（第二章），徐蔚凤（第三章），徐孙炳（第四章），陈一山（第七章、第八章），覃光容（第九章、第十章），刘光远、胡义（第十一章）。

本书由朱育万教授主审。西南交通大学朱育万、刘锡彭，电子科技大学王亚峰，重庆大学秦生训，四川工业学院王义安，成都大学吴建宇，成都科技大学李沛然、刘允襄、吕荣霖等参加了本书编写提纲的审定，并提出了许多宝贵意见。在此表示衷心感谢！

由于编者水平所限，疏漏错误之处，敬请读者批评指出。

编者

一九八七年八月一日

目 录

绪论.....	1
---------	---

第一章 投影法的基本概念

§1—1 投影法.....	2
§1—2 投影的普遍性质.....	3
§1—3 工程上常用的四种投影图.....	5

第二章 点

§2—1 二投影面体系中点的投影.....	8
§2—2 三投影面体系中点的投影.....	10
§2—3 两点的相对位置.....	13

第三章 直线

§3—1 直线的投影.....	15
§3—2 各种位置直线的投影.....	16
§3—3 用直角三角形法求一般位置直线段的实长及其对投影面的倾角.....	21
§3—4 点与直线的从属关系.....	24
§3—5 直线的迹点.....	26
§3—6 两直线的相对位置.....	27
§3—7 一边平行于投影面的直角的投影.....	30

第四章 平面

§4—1 平面的表示法.....	34
§4—2 各种位置平面的投影.....	36
§4—3 属于平面的直线和点.....	40
§4—4 属于特殊位置平面的圆的投影.....	46

第五章 直线与平面、平面与平面的相对位置

§5—1 平行.....	48
§5—2 相交.....	51
§5—3 垂直.....	58

§5—4 综合解题举例.....	62
------------------	----

第六章 投影变换

§6—1 概述.....	71
§6—2 辅助投影面法.....	72
§6—3 绕垂直轴旋转法.....	80
§6—4 综合解题举例.....	88

第七章 曲线与曲面

§7—1 曲线.....	98
§7—2 曲面.....	104
§7—3 曲面的切平面.....	111

第八章 几何体的投影

§8—1 平面立体.....	116
§8—2 回转体.....	119

第九章 平面与立体表面相交、直线与曲面立体表面相交

§9—1 平面与立体表面相交.....	133
§9—2 直线与曲面立体表面相交.....	147

第十章 两立体表面相交

§10—1 平面立体与曲面立体表面相交.....	151
§10—2 两曲面立体表面相交.....	152
§10—3 复合相贯线.....	163

第十一章 立体的表面展开

§11—1 平面立体的表面展开.....	166
§11—2 可展曲面立体的表面展开.....	167
§11—3 不可展曲面立体表面的近似展开.....	172
§11—4 异口形接头的表面展开.....	174

绪 论

一、画法几何的地位、性质和任务

工程图样被喻为“工程界的语言”。它是表达和交流技术思想的重要工具，是工程技术部门的一项重要技术文件。而画法几何不仅为工程图样的绘制、阅读及解决空间几何问题提供理论依据，而且为培养空间想像能力和分析能力打下必要的基础。因而，在我国高等工科院校中，画法几何是一门必修的技术基础课。画法几何的研究对象主要有两个方面：

1. 研究在平面上用投影来表示空间的点、线、面及其相对位置关系的原理和方法——图示原理和方法；

2. 研究在平面上用投影作图的方法来解决空间几何问题——图解原理和方法。

所以，画法几何是一门研究图示空间形体和图解空间几何问题的学科。它有一个十分显著的特点，即所有的空间几何问题都是通过其投影或利用投影作图在平面上来获得解决。

根据画法几何的研究对象及其特点，本课程的主要任务是：

1. 研究投影法（主要是正投影法）的基本理论和其应用；

2. 培养对空间几何问题的图解能力；

3. 培养空间想像能力和空间分析能力；

4. 培养认真负责的工作态度和严谨细致的工作作风。

二、学习画法几何的主要方法

1. 本课程知识的传授，主要靠教师的课堂讲解。知识的获得，主要靠完成一定量的作业训练。因此，抓好听课和完成练习这两个环节，显得特别重要。对于每一个新内容的学习能够作到预习——听讲——重点笔记——复习——解题完成作业，不仅有利于尽快熟悉画法几何的特点，且有利于培养学习画法几何的兴趣，使整个学习过程形成一个良性循环。

2. 由于本课程主要研究空间几何问题的图示法和图解法，因此，在整个学习过程中，始终贯穿着由空间——平面以及由平面——空间的反复思维过程，而这个过程又同时受到几何原理和投影规律的制约。因此，在学习过程中，必须把几何知识与投影规律、投影作图紧密地联系起来，方能取得良好的学习效果。

3. 学习中可能会出现“课堂一听就懂，课后解题就懵”的现象。究其原因，主要是急于解题，忽视了复习这一环节。正确的复习，不仅应弄懂课堂所讲授的基本原理和基本作图，而且要亲自动手，完成课堂上各个图例的作图过程，熟悉各种基本作图的原理和特点。使课后复习真正成为由课堂学习到独立解题的桥梁。勿庸讳言，解题始终是学习本课程较难的过程，如果学习方法不当，则更是事倍功半。为此，本书在 §5—4 及 §6—4 两节中，对于解题方法专门作了介绍，望能起到举一反三，触类旁通的作用。

4. 全部作业和习题，要求必须用绘图工具和仪器（圆规、分规、三角板、铅笔……）精确作出，达到图面整洁美观，标记文字准确工整，图线符合国家标准。

第一章 投影法的基本概念

§1—1 投影法

一、概述

投影法，是指在一定的投影条件下求作空间点、线、面、体的投影的方法。

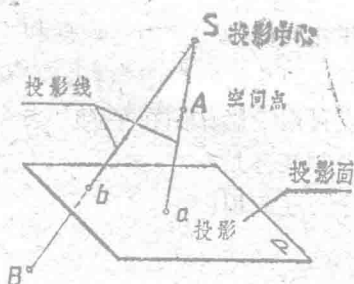


图 1—1 投影法

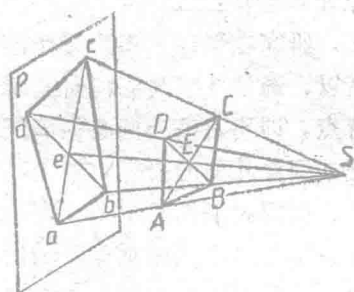


图 1—2 中心投影法

图 1—1，设定平面 P 为投影面，不属于投影面的定点 S 为投影中心。过空间点 A 由投影中心可引直线 SA ， SA 称投影线（或投射线）。投影线 SA 与投影面 P 的交点 a ，称作空间点 A 在投影面 P 上的投影。同理， b 点是空间点 B 在投影面 P 上的投影，（注：空间点以大写字母表示，如 A 、 B 、 C ……，其投影用相应的小写字母表示，如 a 、 b 、 c ……）。

由此可见，投影面、投影中心是投影时不可缺少的条件。

二、投影法分类

1. 中心投影法

投影法中，投影线均通过投影中心者，称为中心投影法。由中心投影法得到的投影，称为中心投影，图 1—1、图 1—2。

2. 平行投影法

投影法中，投影线相互平行者，称为平行投影法。根据投影线与投影面的相对位置，平行投影法又分为：

1) 斜投影法（斜角投影法）——投影线斜交于投影面。由斜投影法得到的投影，称为斜投影，图 1—3。

2) 正投影法（直角投影法）——投影线正交于投影面。由正投影法得到的投影，称为正投影，图 1—4。

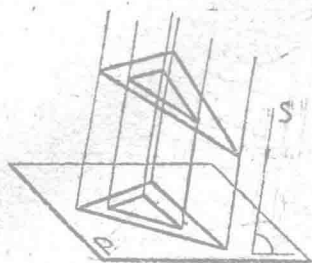


图 1—3 平行投影法——斜投影

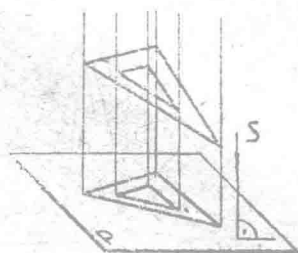


图 1—4 平行投影法——正投影

§1—2 投影的普遍性质

研究空间点、线、面以及它们之间的几何关系和它们的投影图之间内在联系的规律性，对于图示和识别空间形体以及图解空间几何问题都是必需的。

一、两种投影法共有的性质

1. 点的投影仍为点。图 1—1，投影线 SA 与投影面 P 仅有也只能有一个交点 a。
2. 不与投影方向一致的直线，其投影仍为直线，图 1—5，(a)、(b)，曲线的投影，一般仍为曲线，图 1—5，(c)、(d)。

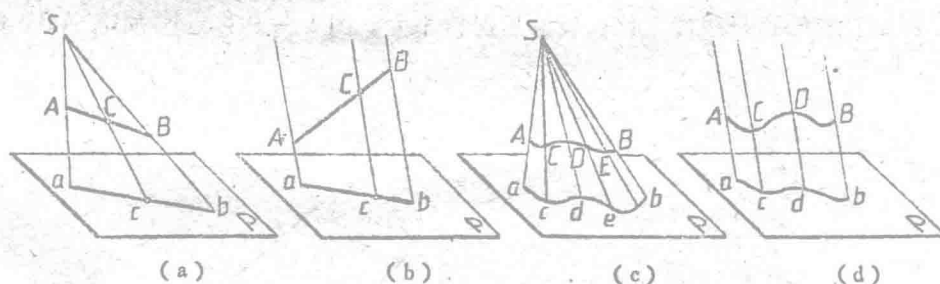


图 1—5 直线与曲线的投影

3. 凡直线通过投影中心或与投影线平行，直线的投影成为一点，属于该直线的所有点的投影，都与直线的投影重合，如图 1—6 中的直线 EF；凡平面通过投影中心或与投影线平行，平面的投影成为一直线，属于该平面的所有点、线、几何图形的投影，也都与平面的投影重合，如图 1—6 中的平面 ABCD。投影的这种性质称为积聚性。

4. 点属于线，点的投影必属于该线的投影，图 1—5，点 C 属于 AB，则 c 属于 ab。
5. 两线相交，其投影亦必相交，且投影的交点即交点的投影，图 1—7，(a)、(b)。

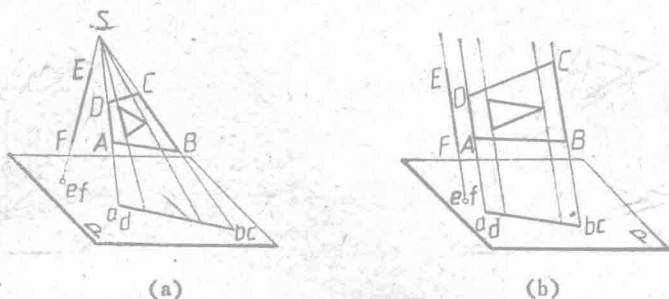


图 1—6 投影的积聚性

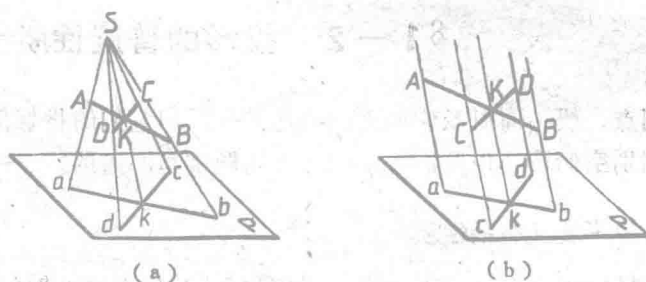


图 1—7 两线相交其投影相交

二、平行投影特有的性质

1. 平行二直线的投影亦相互平行，图 1—8， $AB \parallel CD$ ，则 $ab \parallel cd$ 。

2. 属于直线的点分线段之比，投影后保持不变。图 1—9，点 K 属于 AB ，则 $AK:KB = ak:kb$ 。

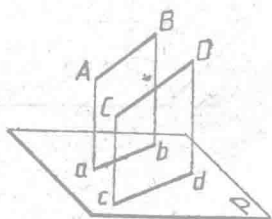


图 1—8 平行两直线

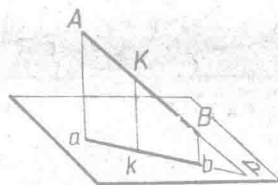


图 1—9 $K \in AB$ $AK:KB = ak:kb$

3. 平行两线段的长度比，投影后保持不变。图 1—10， $AB \parallel CD$ ，则 $AB:CD = ab:cd$ 。

4. 凡与投影面平行的线段和平面图形，直线段的投影反映其实长，平面图形的投影反映其实形。图 1—11， $\triangle ABC \parallel P$ ，则 $\triangle ABC \equiv \triangle abc$ 。投影的这种性质称为实形性。

上述性质，均可用几何知识得到证明，在此未作赘述。

三、利用以上投影知识，可以确定空间点、线、面及其相互关系的投影图。但是，仅凭

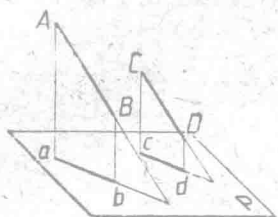


图 1—10 $AB:CD=ab:cd$

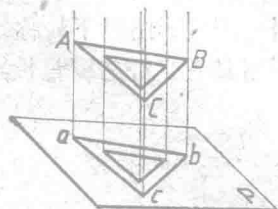


图 1—11 投影的实形性

点的一个投影，不能确定该点的空间位置。图 1—12 中，投影 a 可以对应于投影线上任意点 A_1 、 A_2 、 A_3 ……；同理，图 1—13 中投影面上的图象所表示的可能是几何体 I、II……。仅凭一个投影面上两直线的投影平行，不能确定其在空间一定相互平行，图 1—14。在一个投影面上点的投影属于线段的投影，但，不能据此确定该空间点一定属于空间线段，图 1—15。

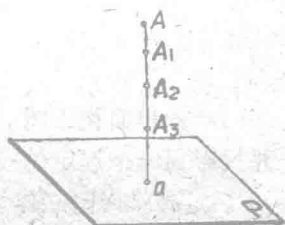


图 1—12 由点的一个投影不能确定点的空间位置

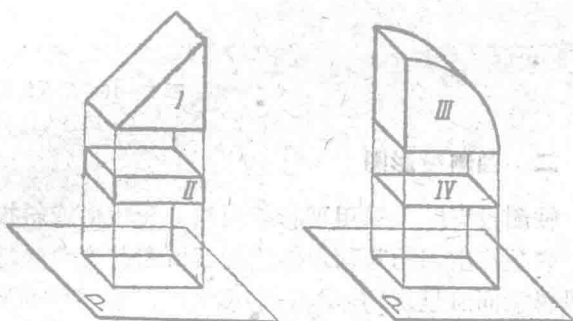


图 1—13 由一个投影不能确定几何体的形状

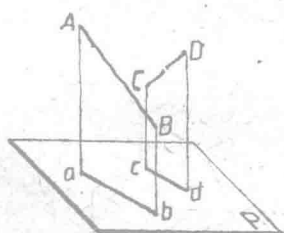


图 1—14 由一个投影不能确定 $AB \parallel CD$

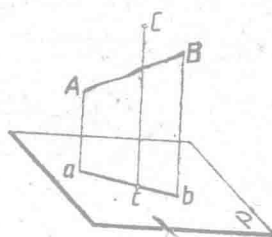


图 1—15 由一个投影不能确定 C 属于 AB

§1—3 工程上常用的四种投影图

一、多面正投影图

多面正投影图是工程技术界使用得最为广泛的一种图样。

它是采用相互垂直的两个或两个以上的投影面，使用正投影法，将空间点、线、面及其

相互关系投影到这些投影面上，并由这些投影共同确定这些空间点、线、面及其相互关系。图 1—16，(a) 是将三角块向三个投影面投影，并将其摊平在一个平面上，得到三角块的三面正投影图（正投影图以下简称投影图），如图 1—16，(b)。

多面投影图具有良好的度量性，不足的是其直观性较差。

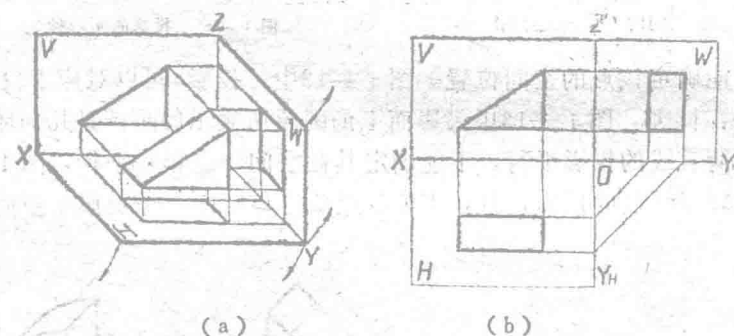


图 1—16 三面投影图

二、轴测投影图

轴测投影图是采用平行投影法（正投影或斜投影）得到的一种单面投影图。

它是将空间的几何形体连同其所在的直角坐标系，一并投影到一个选定的投影面上，使其投影能同时呈现物体的三维形状或三维尺度（ X 、 Y 、 Z ）。这种投影图立体感强，沿轴向具有度量性，但作图较繁，图 1—17。

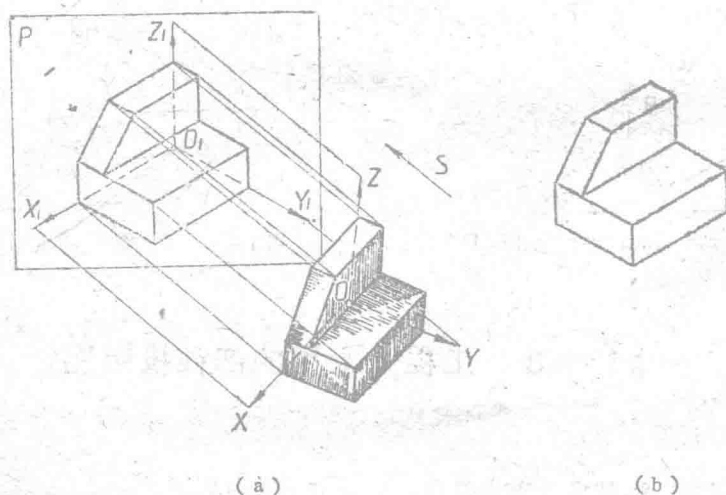


图 1—17 轴测投影及轴测投影图

三、透视投影图

透视投影图是采用中心投影法得到的一种单面投影图。这种图符合人们的视觉习惯，直观性好，立体感强，图 1—18。



图 1—18 透视投影图

四、标高投影图

标高投影图是采用正投影法得到空间点、线、面、体的投影后，再在投影图上用数字标出它们对投影面的距离，以确定它们之间的几何关系。如图 1—19，(a)，点A距投影面P为5米，作出点A在P面上的正投影a，并在a的右下角注以5，图 1—19，(b)即为点A的标高投影图。

标高投影图常用来表示不规则曲面，如船舶壳体、飞行器外形、汽车车身曲面及地形外貌等，图 1—20，(b)，是地形的标高投影图。

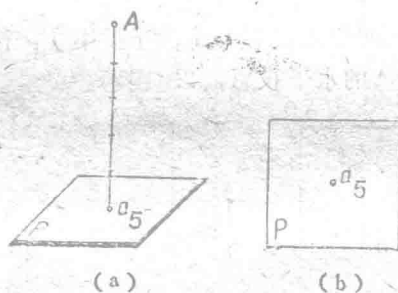


图 1—19 标高投影

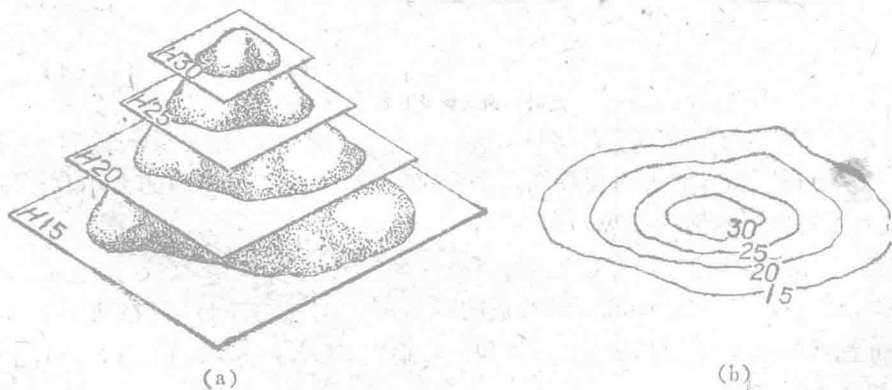


图 1—20 地形标高投影图

第二章 点

§2—1 二投影面体系中点的投影

一、二投影面体系

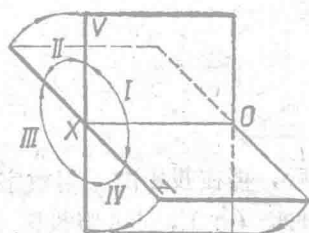


图 2—1 二投影面体系

二投影面体系是由直立的投影面和与之垂直的水平投影面所组成,图2—1。其中直立的投影面,称为正面,记以 V ; 水平的投影面,称为水平面,记以 H 。二投影面的交线称为投影轴,记以 OX 。 V 面和 H 面将空间分为四个部分,称为四个分角;分角 I、II、III、IV的划分顺序如图2—1所示。

二、点的二面投影及其投影规律

现仅以第一分角内的点为例进行讨论。

1. 点的二面投影

在图2—2, (a)中,由点 A 向 V 面作正投影(简称作投影),得到点 A 的正面投影,以 a' 表示;向 H 面作正投影,得到点 A 的水平投影,以 a 表示。

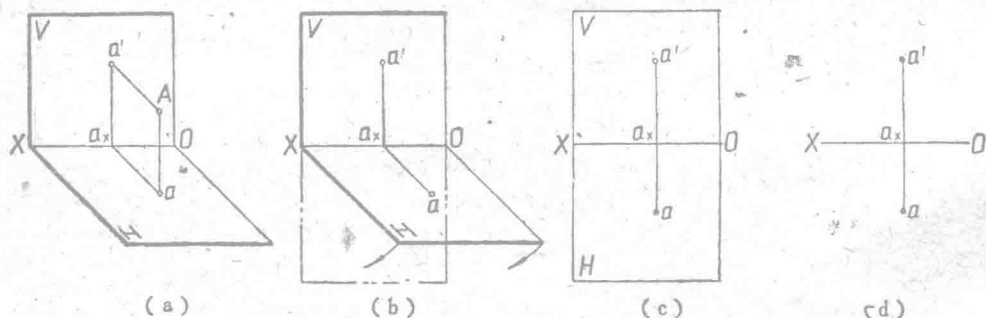


图 2—2 点的二面投影及其投影规律

移去空间点 A ,保持 V 面不动,将 H 面绕 OX 轴向下旋转 90° 与 V 面处于同一平面,图2—2, (b), 可得点 A 的二面投影图,图2—2, (c)。由于投影面的大小与作图无关,故在投影图上不必画出投影面的边界,图2—2, (d)。

2. 点的二面投影规律

图2—2, (a), 投影线 Aa 和 Aa' 构成的平面 Aaa_xa' 垂直于 H 面和 V 面,则必垂直于 OX 轴,因而平面 Aaa_xa' 上过 a_x 的直线 aa_x 和 $a'a_x$ 垂直于 OX ,即 $aa_x \perp OX$, $a'a_x \perp OX$ 。当 a

随H面绕OX轴旋转与V面重合后， a, a_x, a' 三点共线，且 $a'a \perp OX$ 轴，图 2—2，(c)、(d)。

图2—2，(a)中矩形平面 Aaa_xa' 的对边相等， $a'a_x = Aa = A \rightarrow H$ 面的距离， $aa_x = Aa' = A \rightarrow V$ 面的距离。

综上所述，点的二面投影规律可总结为：

- 1) 点的正面投影与水平投影的连线垂直于OX轴；
- 2) 点的正面投影到OX轴的距离等于该点到H面的距离，点的水平投影到OX轴的距离等于该点到V面的距离。

3. 不同分角内点的投影

图2—3，(a)，空间点A、B、C、D分别处于第Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ分角内，将其分别向V、H面作投影后，再将H面绕OX轴旋转来与V面处于同一平面。由于OX轴之前的半个H面向下旋转，则OX轴之后的半个H面一定向上，故其投影如图 2—3，(b)所示。从图 2—3，(b)可知：Ⅰ分角内的点A，正面投影 a' 在OX轴的上方，水平投影 a 在OX轴的下方；Ⅱ分角内的点B，正面投影 b' 和水平投影 b 同在OX轴的上方；Ⅲ分角内的点C，正面投影 c' 在OX轴的下方，水平投影 c 在OX轴的上方；Ⅳ分角内的点D，正面投影 d' 和水平投影 d 同在OX轴的下方。

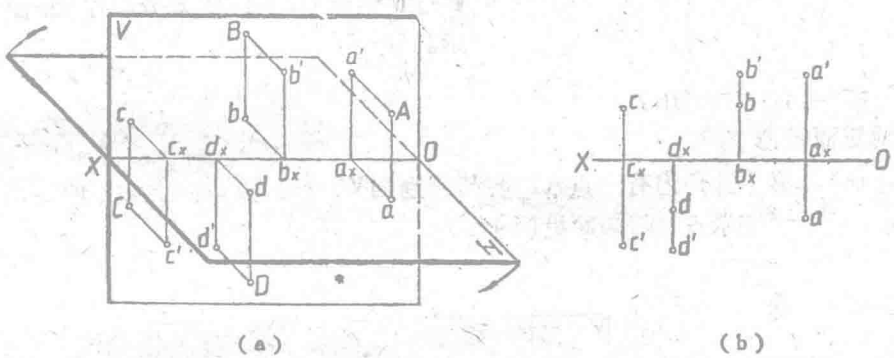


图 2—3 不同分角内点的投影

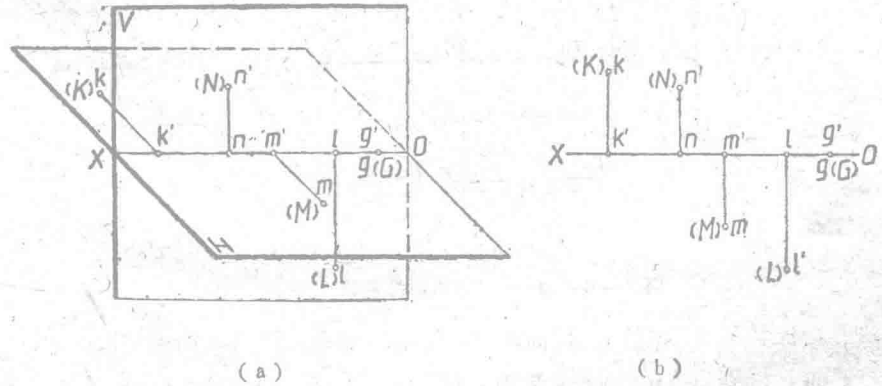


图 2—4 特殊位置点的投影

4. 特殊位置点的投影

1) 属于投影面的点。图2—4, (a)中, 点M、N、K、L分别属于投影面, 其二面投影中必有一个投影在投影轴上, 另一投影与该点本身重合, 图2—4, (b)。

2) 属于投影轴的点。图2—4, (a)中, 点G属于投影轴OX, 其二面投影 g' 和 g 均在投影轴上并与其本身重合, 图2—4, (b)。

§2—2 三投影面体系中点的投影

一、三投影面体系

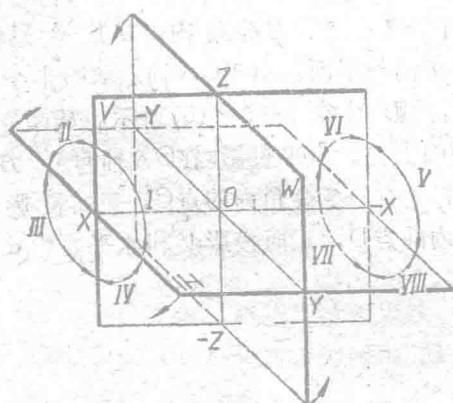
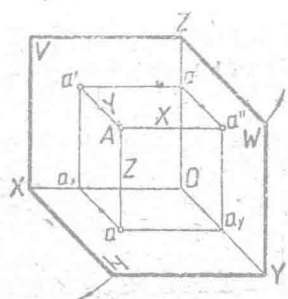


图 2—5 三投影面体系

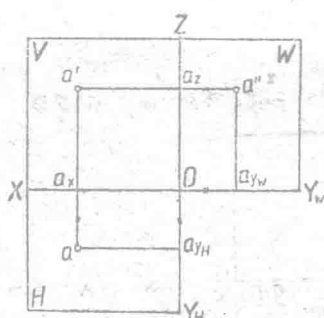
在二投影面体系的基础上添加一个与V面和H面都垂直的投影面, 从而构成三投影面体系, 这个新添加的投影面称为侧面, 记以W, 图2—5。在三投影面体系中, V面与H面的交线为OX轴, H面与W面的交线为OY轴, V面与W面的交线为OZ轴。三条投影轴的交点为投影原点, 记以O。三个投影面把空间分成八个部分, 称为八个卦角。卦角I、II、III、IV……VII、VIII的划分顺序如图2—5所示。

二、点的三面投影

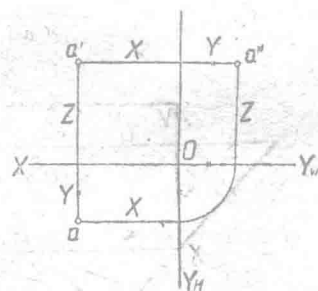
图2—6, (a), 第I卦角内有一点A, 将其分别向V、H、W面作投影, 即得点A的三面投影 a' 、 a 、 a'' (a'' 表示点A的侧面投影)。



(a)



(b)



(c)

图 2—6 第一卦角内点的投影图

移去空间点A, 保持V面不动, 将H面绕OX轴向下旋转 90° , W面绕OZ轴向右旋转 90° 与V面处于同一平面, 得到点A的三面投影图, 图2—6, (b)。图中OY轴被假想分成两

条,随H面旋转的称为 OY_H 轴,随W面旋转的称为 OY_W 轴。投影图中也不必画出投影面的边界,图2—6,(c)。

三、点的三面投影与直角坐标的关系

图2—5,若将三面体系当作笛卡尔直角坐标系,则投影面V、H、W相当于坐标面,投影轴OX、OY、OZ相当于坐标轴X、Y、Z,投影原点O相当于坐标原点O。原点把每一轴分成两部分,并规定:OX轴从O向左为正,向右为负;OY轴向前为正,向后为负;OZ轴向上为正,向下为负。因此,第I卦角内的点,其坐标值均为正。

点的三面投影与其坐标间的关系如下:图2—6。

1. 空间点的任一投影,均反映了该点的某两个坐标值,即 $a(X_A, Y_A)$, $a'(X_A, Z_A)$, $a''(Y_A, Z_A)$ 。

2. 空间点的每一个坐标值,反映该点到某投影面的距离,即:

$X_A = aa_{YH} = a'a_Z = A \rightarrow W$ 面的距离;

$Y_A = aa_X = a''a_Z = A \rightarrow V$ 面的距离;

$Z_A = a'a_X = a''a_{YW} = A \rightarrow H$ 面的距离。

由上可知,点A的任意两个投影反映了点的三个坐标值。有了点A的一组坐标值 (X_A, Y_A, Z_A) ,就能唯一地确定该点的三面投影 $A(a', a, a'')$ 。

四、点的三面投影规律

空间点A的二面投影规律中有 $aa' \perp OX$,同理可得,点A的正面投影与侧面投影的连线垂直于OZ轴,即 $a'a'' \perp OZ$ 。

空间点A的水平投影到OX轴的距离和侧面投影到OZ轴的距离均反映该点的Y坐标,故 $aa_X = a''a_Z = Y_A$ 。

综上所述,点的三面投影规律为:

1. 点的正面投影与水平投影的连线垂直于OX轴;

2. 点的正面投影与侧面投影的连线垂直于OZ轴;

3. 点的水平投影与侧面投影具有相同的Y坐标。

【例一】已知点A的坐标为 $(15, 8, 12)$,求作点A的三面投影图。

作图:

1) 画出投影轴。由O沿OX取 $X=15$,得 a_X 点,沿 OY_H 取 $Y=8$,得 a_{YH} 点,沿OZ取 $Z=12$,得 a_Z 点,图2—7,(a);

2) 过 a_X 点作OX轴的垂线,它与过 a_{YH} 点而与OX平行的直线的交点,即为点A的水平投影 a ,与过 a_Z 点而与OX平行的直线的交点即为点A的正面投影 a' ,图2—7,(b);

3). 由 $aa_X = a_{YH}O = a_{YW}O = a''a_Z$,在 $a'a_Z$ 延长线上即可得到点的侧面投影 a'' 。作图方法见图2—7,(c)或(d)。

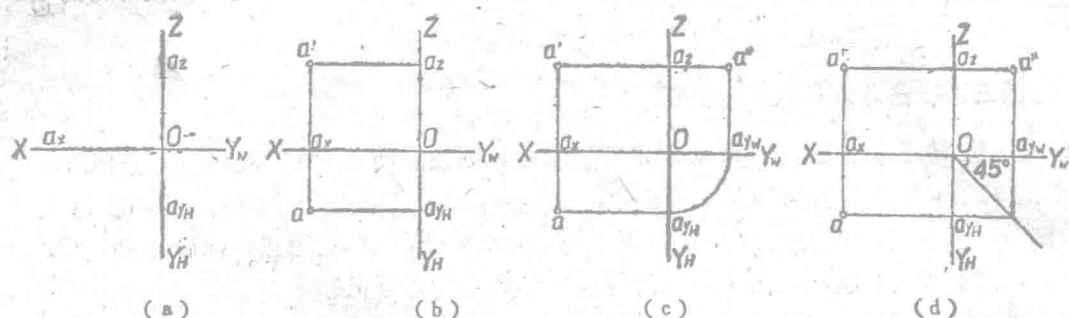


图 2—7

【例二】根据点的三面投影图，图2—8，(a)，作该点的立体图。

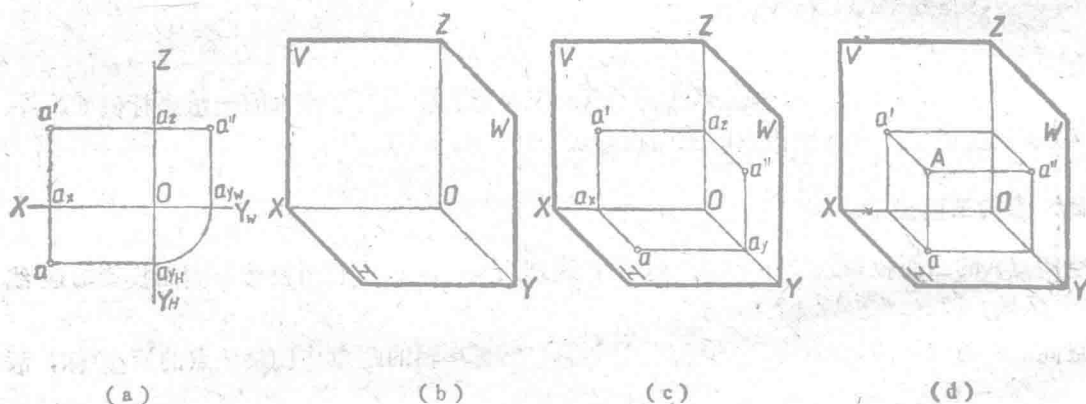


图 2—8

作图：

- 1) 画出三投影面体系，图2—8，(b)；
- 2) 在OX轴、OY轴、OZ轴上分别作出 Oa_x 、 Oa_y 、 Oa_z ，求出 a' 、 a 、 a'' ，图2—8，(c)；
- 3) 过 a' 、 a 、 a'' 分别作相应投影轴OY、OZ、OX的平行线，平行线的交点即为所求的空间点A。

【例三】已知点C的二面投影 c' 、 c'' ，求作其第三投影 c ，图2—9，(a)。

作图：

- 1) 过 c' 作OX的垂线，图2—9，(b)；
- 2) 由 $c''c_z = cc_x = Y_c$ 作图求出点C的水平投影 c ，图2—9，(c)。