

高等院校精品教材

高等动力学

——理论及应用

G A O D E N G D O N G L I X U E

应祖光 编著



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

高等动力学——理论及应用

应祖光 编著



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等动力学:理论及应用 / 应祖光编著. —杭州:
浙江大学出版社, 2011.12
ISBN 978-7-308-09407-8

I. ①高… II. ①应… III. ①动力学—高等学校—教材 IV. ①0313

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2011) 第 256156 号

高等动力学——理论及应用

应祖光 编著

责任编辑 张 明
封面设计 刘依群
出版发行 浙江大学出版社
(杭州天目山路 148 号 邮政编码 310007)
(网址: <http://www.zjupress.com>)
排 版 浙江时代出版服务有限公司
印 刷 临安市曙光印务有限公司
开 本 787mm×1092mm 1/16
印 张 12.5
字 数 312 千
版 印 次 2011 年 12 月第 1 版 2011 年 12 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-308-09407-8
定 价 30.00 元

版权所有 翻印必究 印装差错 负责调换

浙江大学出版社发行部邮购电话 (0571) 88925591

内容简介

本书以拉格朗日力学、哈密顿力学、振动与控制等理论的发展为主线,精选其中经典的和新近发展的理论方法,基于理论分析且面向工程应用,并注重数值分析方法原理,系统地介绍完整系统分析力学、线性振动与非线性振动、最优控制及其应用的主要基本理论成果,能有助于桥接自牛顿经典力学以后的动力学与工程应用。全书共8章,可分为两部分。前一部分即第1章至第4章,主要内容包括虚位移原理和达朗贝尔原理等基础知识、拉格朗日方程、哈密顿方程与泊松积分定理、辛算法基础、哈密顿原理与近似解法等一般完整系统分析力学及其应用算法新进展的重要方面;后一部分即第5章至第8章,聚焦于振动这一特殊而普遍的动力学过程,主要内容包括线性振动分析与模态分析、子结构模态综合法、非线性振动分析与定量分析方法、滞迟系统振动、参激振动稳定性与弗洛奎方法、广义特征值分析法、最优控制与动态规划方法、典型的最优控制方法、主动与半主动控制、高楼振动与拉索参激稳定性的最优控制分析等振动与控制理论及其典型应用与新进展的重要方面。

本书按照教材编写,各部分内容完整、分析严谨,配有适量的例题和习题,并在少学时的基本内容学习之余,留有一定的深入发展空间。本书可作为高等院校工程力学、土木工程、机械工程等专业本科生和研究生有关高等动力学课程的教科书,也可供从事有关工程动力学的教学科研人员和工程技术人员参考。

前言

高等动力学通常包括自牛顿经典力学以后的动力学及其在许多学科的渗透与拓展,可分为分析动力学与应用动力学,其理论随着动力学有关学科的发展而不断发展。在伯努利(Bernoulli)、达朗贝尔(J. R. D' Alembert)等研究的基础上,拉格朗日(J. L. Lagrange)于18世纪中完成《分析力学》著作,并终于在巴黎出版;哈密顿(W. R. Hamilton)于19世纪中在《英国皇家学会》杂志上发表两篇共112页的研究论文,阐述最普遍原理与辛的分析理论,并经泊松(S. D. Poisson)、雅可比(C. G. J. Jacobi)等众多学者的研究与发展,关于一般系统动力学的普遍原理与方法基本完备,分析动力学的理论体系成熟。另一方面,振动作为工程中普遍存在的典型动力学过程,在伽利略(G. Galileo)等早期认识与研究的基础上,历经18世纪至今众多学者的广泛深入研究、推动与发展,包括欧拉(L. Euler)、瑞利(J. W. S. Rayleigh)、伽辽金(B. G. Galerkin)、庞卡莱(H. Poincaré)、李雅普诺夫(A. M. Lyapunov)、弗洛奎(G. Floquet)等等和当代学者的贡献,振动力学的理论体系基本成形。近几十年,振动控制通过规划动力学方式在工程技术中发挥重要作用。20世纪中,庞特里亚金(L. S. Pontryagin)创立极大值原理,贝尔曼(R. Bellman)推出最优性原理,建立哈密顿—雅可比—贝尔曼动态规划方法,从两个方面拓展并形成基本的最优控制理论体系;并进一步应用于工程振动控制,发展出主动和半主动控制方法等。

本书努力遵循从分析动力学到应用动力学这条发展轨迹,撷取其中基本的重要的成果,并基于理论分析、面向工程应用、注重数值分析方法原理,精心整理系统分析力学、线性与非线性振动、最优控制及其应用等内容成完整系统,旨在让理论力学与振动力学、动力学理论与工程应用之间起到一定的桥梁作用,在介绍基本的经典理论之余展示一定的新近研究进展,着眼于按照教材形式编写并能有所突破。

浙江大学的高等动力学作为本科生课程于2005年初因教学改革从理论力学课程中独立出来而开设,并于2002年一般力学与力学基础专业硕士点成立后以分析动力学作为其学位课程开设,作者编写讲义并沿用至今,迫感需要一本合适的教科书。在浙江大学出版社的支持下,基于教学科研实践,并参考有关教材、专著及研究论文,在讲义的基础上重新编写成本书。

全书共8章,可分为两部分。前一部分为分析动力学,包括第1章至第4章。第1章简要介绍基本概念、虚位移原理和达朗贝尔原理,第2章介绍拉格朗

日方程及其基本积分、耗散力与陀螺力等,第3章进一步介绍哈密顿方程及其首次积分、泊松定理、新增的辛算法等,第4章介绍哈密顿原理及其推广形式、时空离散的近似解法等;后一部分为应用动力学,包括第5章至第8章,第5章介绍多自由度系统振动与模态分析方法、共振与反共振、新增的陀螺系统振动分析、子结构模态综合法等,第6章简要介绍非线性振动分析的摄动法、平均法与多尺度法、自激振荡、跳跃、主亚超谐波共振及内共振等重要特性、新增的滞迟系统振动等,第7章介绍参激振动的稳定性与弗洛奎方法、新增的广义特征值分析法与辛算法、拉索的稳定性分析等,第8章主要介绍最优振动控制理论与应用、系统能观性与能控性、极大值原理与动态规划原理、新增的几种典型最优控制方法、主动与半主动控制、磁流变阻尼器动力学、高楼振动与拉索稳定性的控制分析等。

感谢所有给予本书支持和帮助的同志。限于作者水平,不妥之处在所难免,敬请读者批评指正。

编著者

2011年10月于杭州

目 录

第 1 章 虚位移原理与达朗贝尔原理	(1)
1.1 约束及其分类	(1)
1.2 自由度与广义坐标	(3)
1.3 虚位移、虚功与广义力	(4)
1.4 虚位移原理	(7)
1.5 达朗贝尔原理	(10)
习 题	(13)
第 2 章 拉格朗日方程	(16)
2.1 第二类拉格朗日方程	(16)
2.2 拉格朗日方程的应用	(20)
2.3 耗散力与陀螺力	(24)
2.4 能量积分与循环积分	(31)
习 题	(34)
第 3 章 哈密顿方程	(36)
3.1 勒让德变换	(36)
3.2 哈密顿方程	(38)
3.3 哈密顿函数与哈密顿方程的示例	(43)
3.4 保守系统的首次积分	(47)
3.5 泊松括号与积分定理	(50)
3.6 辛变换与辛算法	(59)
习 题	(65)
第 4 章 哈密顿原理	(69)
4.1 泛函与变分、欧拉方程	(69)
4.2 哈密顿原理	(72)
4.3 由哈密顿原理推导动力学方程	(76)
4.4 基于哈密顿原理的近似解法	(80)
习 题	(88)
第 5 章 线性振动分析	(90)
5.1 两自由度系统的固有振动、共振与反共振	(90)

5.2	多自由度系统的固有频率与振型	(94)
5.3	振动解的模态叠加法	(99)
5.4	线性振动的示例	(103)
5.5	子结构模态综合法	(107)
5.6	陀螺系统的振动分析	(111)
	习 题	(114)
第 6 章	非线性振动分析	(117)
6.1	自治系统的振动	(117)
6.2	摄动法与周期解	(123)
6.3	渐近解的平均法	(130)
6.4	渐近解的多尺度法	(137)
6.5	滞迟系统的振动解	(142)
	习 题	(146)
第 7 章	参激系统的稳定性	(148)
7.1	李雅普诺夫稳定性与弗洛奎方法	(148)
7.2	希尔方程和马休方程的稳定性与无穷行列式	(151)
7.3	多自由度参激系统稳定性的特征值分析法	(154)
7.4	拉索在支座运动激励下的稳定性	(157)
7.5	稳定性数值模拟的辛算法	(160)
	习 题	(163)
第 8 章	最优振动控制	(164)
8.1	系统能控性与能观性	(164)
8.2	最优控制问题与动态规划原理	(165)
8.3	几种典型的最优控制	(168)
8.4	高楼振动的主动控制	(174)
8.5	磁流变阻尼器与半主动控制	(176)
8.6	拉索参激不稳定性的主动与半主动控制	(181)
	习 题	(184)
	习题答案	(186)
	参考文献	(191)

第 1 章 虚位移原理与达朗贝尔原理

1.1 约束及其分类

由 n 个质点通过一定的联系而组成的研究系统,称为质点系。质点 M_i 的位置可由矢量坐标 $\mathbf{r}_i$ 或直角坐标 (x_i, y_i, z_i) 确定。各质点在同一时刻的位置构成质点系的位形。对于质点系位形和运动的限制或限制条件,称为约束。质点系内部各质点之间的相互约束,称为内约束;质点系内部质点受到的外部约束,称为外约束。约束可以通过一定的数学表达式描述,这个数学表达式称为约束方程或约束不等式。

根据约束的性质,从不同角度可将约束分类如下。

1.1.1 几何约束与运动约束

仅限制质点系空间位形的约束,称为几何约束。相应的约束方程只含各质点的位置坐标,其一般形式为

$$f_g(\mathbf{r}_i, t) = f_g(x_i, y_i, z_i; t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.1)$$

对于质点系的限制,除了空间位形外,还包括运动情况的约束,称为运动约束。相应的约束方程含有各质点的位置坐标及其关于时间的导数,其一般形式为

$$f_m(\mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{r}}_i, t) = f_m(x_i, y_i, z_i; \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i; t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.2)$$

1.1.2 定常约束与非定常约束

对于质点系的限制条件不随时间变化的约束,称为定常约束。相应的约束方程不显含时间 t ,其一般形式为

$$f_s(\mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{r}}_i) = f_s(x_i, y_i, z_i; \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.3)$$

限制条件随时间变化的约束,称为非定常约束。相应的约束方程显含时间 t ,其一般形式为

$$f_{ns}(\mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{r}}_i, t) = f_{ns}(x_i, y_i, z_i; \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i; t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.4)$$

1.1.3 双面约束与单面约束

对于质点系的限制条件唯一确定,或由等式描述的约束,称为双面约束或固执约束。其约束方程的一般形式为

$$f_{bs}(\mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{r}}_i, t) = f_{bs}(x_i, y_i, z_i; \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i; t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.5)$$

限制条件非唯一确定,或由不等式描述的约束,称为单面约束或非固执约束。其约束不等式的一般形式为

$$f_s(\mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{r}}_i, t) = f_s(x_i, y_i, z_i; \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i; t) \geq 0, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (1.6)$$

1.1.4 完整约束与非完整约束

完整约束包括几何约束和可转化成几何约束的运动约束。不能转化成几何约束的运动约束,称为非完整约束。仅受完整约束的质点系,称为完整系统。所受约束包含非完整约束的质点系,称为非完整系统。

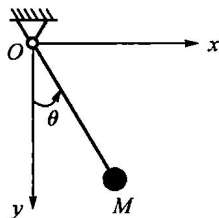


图 1.1

如图 1.1 所示的单摆,由杆 OM 和球 M 组成,摆长为 l ,在 Oxy 平面内摆动。球的运动受到杆的约束,约束方程为

$$x^2 + y^2 - l^2 = 0$$

这是几何、定常、双面、完整的约束。对于质点 M 来说,它是一个外约束。如果系住球的是一根软绳,则约束方程变为

$$l^2 - (x^2 + y^2) \geq 0$$

这是单面约束。如果绳于 O 端以速度 v 收缩,则约束方程又成为

$$(l - vt)^2 - (x^2 + y^2) \geq 0$$

这是非定常的单面约束。

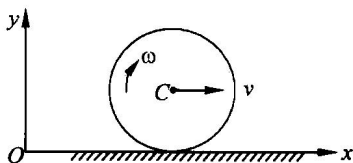


图 1.2

如图 1.2 所示,半径为 R 的圆轮在平面上沿直线纯滚动。轮受到平面的两个约束,其一是轮心 C 到平面的距离不变,即 $y_c - R = 0$, c 为积分常数,这是几何、定常、双面、完整的约束;其二是轮 C 速度与角速度的比例关系,约束方程为

$$v - R\omega = 0$$

这是运动约束。但通过积分可转化为几何约束,即

$$x - R\theta - c = 0 \quad (\theta \text{ 为角坐标})$$

因此,它是完整约束。

Pfaff 型约束是一类典型的微分约束,其约束方程为

$$\sum_{i=1}^n A_i(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_i = 0 \quad (1.7)$$

它是完整约束的充分必要条件为

$$A_i \left(\frac{\partial A_j}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_j} \right) + A_j \left(\frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \right) + A_k \left(\frac{\partial A_i}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \right) = 0 \quad (1.8)$$

$$i, j, k = 1, 2, \dots, n$$

三变量的 Pfaff 型约束方程为

$$A(x, y, z)dx + B(x, y, z)dy + C(x, y, z)dz = 0 \quad (1.9)$$

其为完整约束的充分必要条件为

$$A \left(\frac{\partial B}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial y} \right) + B \left(\frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial z} \right) + C \left(\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x} \right) = 0 \quad (1.10)$$

图 1.2 的运动约束也是一个两变量的 Pfaff 型约束, 容易验证其满足条件(1.8), 因此是一个完整约束。本书内容限于完整约束情况。

1.2 自由度与广义坐标

对于完整系统, 确定系统位形所需的最少参量数或独立参量数, 称为系统的自由度。它等于确定系统位形的代数坐标数减去约束方程数。由 n 个质点组成的质点系, 具有 s 个完整约束时, 系统的自由度为 $k = 3n - s$ 。

确定系统位形所需的独立参变量, 称为广义坐标。它是代数量, 可以是具有明确物理意义的线坐标、角坐标, 也可以不具有任何物理意义, 但便于描述系统位形的量。完整系统的广义坐标数等于自由度。对于 n 个质点组成的质点系, 可用 $3n$ 个直角坐标描述其位形, 受到 s 个完整约束时, 这些直角坐标不是独立的变量, 其中独立的只有 $k = 3n - s$ 个, 余下的 s 个要通过约束方程确定。实际上, 我们可以另取 k 个便于描述系统位形的独立的变量 $q_1, q_2, \dots, q_k$ 作为广义坐标, 系统各个质点的直角坐标或矢量坐标通过广义坐标表示为

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_k; t) \quad (1.11a)$$

$$y_i = y_i(q_1, q_2, \dots, q_k; t) \quad (1.11b)$$

$$z_i = z_i(q_1, q_2, \dots, q_k; t) \quad (1.11c)$$

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_k; t) \quad (1.12)$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

运动系统的广义坐标将随时间变化, 广义坐标关于时间的导数, 称为广义速度。由式(1.11)与(1.12)可将系统各个质点的速度通过广义速度表示为

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^k \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_i}{\partial t} \quad (1.13a)$$

$$\dot{y}_i = \sum_{j=1}^k \frac{\partial y_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial y_i}{\partial t} \quad (1.13b)$$

$$\dot{z}_i = \sum_{j=1}^k \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial z_i}{\partial t} \quad (1.13c)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j=1}^k \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \quad (1.14)$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

例如图 1.1 所示的单摆, 在 Oxy 平面内摆动时, 确定球的位置需要 x, y 坐标, 但受到杆

的一个完整约束,则摆的自由度为 $2-1=1$ 。如果选取角坐标 θ 作为广义坐标,那么直角坐标可表示为

$$x=l\sin\theta, y=l\cos\theta$$

直角坐标上的速度也可通过广义速度表示为

$$\dot{x}=l\dot{\theta}\cos\theta, \dot{y}=-l\dot{\theta}\sin\theta$$

1.3 虚位移、虚功与广义力

某瞬时,质点或质点系满足约束条件的任何无限小位移,称为质点或质点系的虚位移。例如质点 M_i 的矢量坐标为 $\mathbf{r}_i$,其虚位移记为 $\delta\mathbf{r}_i$,符号 δ 表示无限小的变更或变分。虚位移不同于真实位移,它是假想的,与真实运动、主动力、时间等无关,只受约束限制;而真实位移由随时间演变的真实运动所决定,与主动力、时间、约束等均相关,是唯一确定的。虚位移通常有多种。对于定常约束情况,系统的无限小的真实位移是其虚位移之一。而对于非定常约束情况,系统的真实位移不一定是虚位移,因为不同时刻约束条件发生了变化。

广义坐标 q_j 相应的虚位移,称为广义虚位移,记为 δq_j 。对于 n 个质点组成、受 s 个完整约束的系统,其 $k=3n-s$ 个广义坐标相应的广义虚位移 $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_k$ 是相互独立的。而各个质点的矢量坐标相应的虚位移 $\delta\mathbf{r}_1, \delta\mathbf{r}_2, \dots, \delta\mathbf{r}_n$ 相互不完全独立,它们可以按照变分运算通过独立的广义虚位移表示为

$$\delta\mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^k \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (1.15)$$

力在虚位移上所作的功,称为虚功,记为 δW 。它也是假想的,不同于真实的元功。力 $\mathbf{F}_i$ 的虚功可表示为

$$\delta W = \mathbf{F}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i = \mathbf{F}_i \cdot \sum_{j=1}^k \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^k \left(\mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j \quad (1.16)$$

其中 $Q_j = \mathbf{F}_i \cdot (\partial \mathbf{r}_i / \partial q_j)$,称为力 $\mathbf{F}_i$ 的相应于广义坐标 q_j 的广义力,是一个代数量,不一定具有明确的力的物理意义。质点系的广义力将是各个力相应的广义力之和。由式(1.16)知,虚功也可表示为各个广义力与广义虚位移乘积之和。系统受到有势力(或保守力)作用时,势能 $V=V(\mathbf{r}_i)=V(\mathbf{r}_i(q_j))$,即势能可看作广义坐标的复合函数。该有势力相应的广义力为

$$Q_j = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = - \frac{\partial V}{\partial q_j} \quad (1.17)$$

$j=1, 2, \dots, k$

可见,有势力相应的广义力等于负的势能关于广义坐标的偏导数。如果系统的约束力在任何虚位移上所作的功之和等于零,则称该约束为理想约束。

计算系统满足约束条件的虚位移,主要有两种方法:(1)解析法,利用式(1.15)通过广义虚位移表示;(2)虚速度法,基于虚位移之比等于虚速度之比,利用运动学方法分析虚速度关系而得到。

例 1.1 平面双摆如图 1.3 所示,直杆 OA 与 AB 的长度分别为 a, b ,两杆于 A 端通过

光滑铰连接, O 端为固定铰支座。铰 A 与 B 分别受 y 轴方向的力 F_1, F_2 与 x 轴方向的力 F 作用, 在图示状态平衡, 各杆重不计。求: (1) 铰 A 与 B 的虚位移 $\delta x_A, \delta y_A, \delta x_B, \delta y_B$; (2) 摆的广义力。

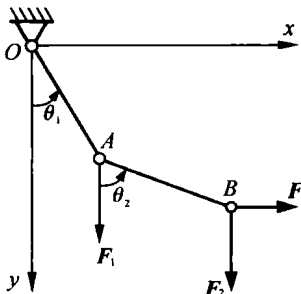


图 1.3

解: 摆的自由度由铰 A 与 B 的坐标 x_A, y_A, x_B, y_B 减去两根杆的约束确定, 为 $4-2=2$ 。选取角度 θ_1, θ_2 为广义坐标如图所示, 广义虚位移 $\delta\theta_1, \delta\theta_2$ 相互独立。

(1) 用解析法计算虚位移。铰 A 与 B 的坐标通过广义坐标表示为

$$\begin{aligned}x_A &= a \sin \theta_1 \\y_A &= a \cos \theta_1 \\x_B &= a \sin \theta_1 + b \sin \theta_2 \\y_B &= a \cos \theta_1 + b \cos \theta_2\end{aligned}$$

则其虚位移通过广义虚位移表示为

$$\begin{aligned}\delta x_A &= \frac{\partial x_A}{\partial \theta_1} \delta \theta_1 + \frac{\partial x_A}{\partial \theta_2} \delta \theta_2 = a \cos \theta_1 \delta \theta_1 \\ \delta y_A &= \frac{\partial y_A}{\partial \theta_1} \delta \theta_1 + \frac{\partial y_A}{\partial \theta_2} \delta \theta_2 = -a \sin \theta_1 \delta \theta_1 \\ \delta x_B &= \frac{\partial x_B}{\partial \theta_1} \delta \theta_1 + \frac{\partial x_B}{\partial \theta_2} \delta \theta_2 = a \cos \theta_1 \delta \theta_1 + b \cos \theta_2 \delta \theta_2 \\ \delta y_B &= \frac{\partial y_B}{\partial \theta_1} \delta \theta_1 + \frac{\partial y_B}{\partial \theta_2} \delta \theta_2 = -a \sin \theta_1 \delta \theta_1 - b \sin \theta_2 \delta \theta_2\end{aligned}$$

该虚位移满足约束条件。例如杆 AB 的约束方程为

$$(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = b^2$$

对其作变分运算, 得到

$$(x_B - x_A)(\delta x_B - \delta x_A) + (y_B - y_A)(\delta y_B - \delta y_A) = 0$$

容易验证上述虚位移满足此约束条件。

(2) 由广义力的表达式(1.17), 可得相应于广义坐标 θ_1, θ_2 的广义力分别为

$$\begin{aligned}Q_1 &= F_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_A}{\partial \theta_1} + F_2 \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_B}{\partial \theta_1} + F \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_B}{\partial \theta_1} \\ &= F_1 \frac{\partial y_A}{\partial \theta_1} + F_2 \frac{\partial y_B}{\partial \theta_1} + F \frac{\partial x_B}{\partial \theta_1} \\ &= F a \cos \theta_1 - (F_1 + F_2) a \sin \theta_1 \\ Q_2 &= F_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_A}{\partial \theta_2} + F_2 \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_B}{\partial \theta_2} + F \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_B}{\partial \theta_2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= F_1 \frac{\partial y_A}{\partial \theta_2} + F_2 \frac{\partial y_B}{\partial \theta_2} + F \frac{\partial x_B}{\partial \theta_2} \\
 &= Fb \cos \theta_2 - F_2 b \sin \theta_2
 \end{aligned}$$

显然,它们不具有明确的力的物理意义。

例 1.2 平面桁架结构如图 1.4 所示,杆长 $AC=BC=a$, $\angle CAD=\angle CBD=\alpha$,杆 CD 铅直, ADB 水平, A 端为固定铰支座, B 端为滑动铰支座。铰 D 受铅直力 F 与水平力 F_1 作用,铰 B 受水平力 $F'_1=F_1$ 作用,在图示状态平衡,各杆重不计。求:(1)铰 B 与 D 的虚位移 $\delta x_B, \delta x_D, \delta y_D$; (2)结构的广义力。

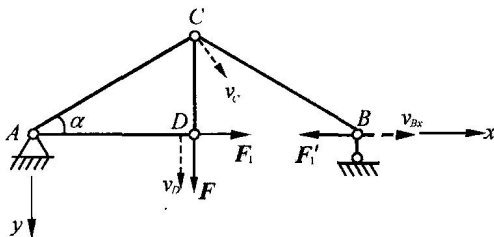


图 1.4

解:三角形 ACD 可看作刚体。结构的自由度由刚体 ACD 的角坐标 θ_1 、杆 BC 的角坐标 θ_2 和点 C 的坐标 x_C, y_C 减去铰 C 和支座 B 的三个约束确定,为 $4-3=1$ 。选取铰 B 的 x 坐标为广义坐标,则广义虚位移为 δx_B 。

(1)用虚速度法计算虚位移。铰 B 的虚位移为 δx_B 。设铰 B 的虚速度为 v_{Bx} ,则由杆 BC 平面运动的速度投影定理,得到铰 C 与 B 虚速度的关系

$$v_{Bx} \cos \alpha = v_C \cos(90^\circ - 2\alpha)$$

再由刚体 ACD 定轴转动的角速度,得到铰 D 与 C 虚速度的关系

$$\frac{v_C}{a} = \frac{v_{Dy}}{a \cos \alpha}$$

两式消去 v_C ,得到

$$v_{Dy} = \frac{1}{2} v_{Bx} \cot \alpha$$

而铰 D 的水平虚速度 $v_{Dx}=0$ 。则铰 D 的虚位移通过铰 B 的虚位移表示为

$$\delta x_D = \frac{v_{Dx}}{v_{Bx}} \delta x_B = 0$$

$$\delta y_D = \frac{v_{Dy}}{v_{Bx}} \delta x_B = \frac{1}{2} \delta x_B \cot \alpha$$

(2)由虚功的表达式

$$\sum \delta W = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_j Q_j \delta q_j$$

可得结构相应于广义坐标 x_B 的广义力

$$\begin{aligned}
 Q &= \frac{1}{\delta x_B} (F \delta y_D + F_1 \delta x_D - F'_1 \delta x_B) \\
 &= \frac{1}{2} F \cot \alpha - F_1
 \end{aligned}$$

1.4 虚位移原理

虚位移原理又称虚功原理,它更一般、概括地给出了质点系平衡的充分必要条件。虚位移原理表述如下:具有双面、定常、理想约束的质点系,保持平衡的充分必要条件是,作用于该质点系的所有主动力在任何虚位移上所作的虚功之和等于零。该条件可表示为

$$\sum \delta W = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_i (F_{ix} \delta x_i + F_{iy} \delta y_i + F_{iz} \delta z_i) = 0 \quad (1.18)$$

理想约束情况,约束力的虚功总和等于零,故式(1.18)中的 $\mathbf{F}_i$ 为质点系的主动力。平衡条件(1.18)的必要性与充分性证明如下:

1.4.1 必要性

当质点系保持平衡时,其中任一质点也平衡。作用于该质点的主动力的合力 $\mathbf{F}_i$ 与约束力的合力 $\mathbf{F}_a$ 相平衡,由汇交力系的平衡条件得

$$\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_a = \mathbf{0}$$

给质点系一组虚位移,其中该质点的虚位移为 $\delta \mathbf{r}_i$ 。上式两边同乘以 $\delta \mathbf{r}_i$ 得

$$\mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i + \mathbf{F}_a \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$$

对于质点系内所有质点,都可得到与上式同样的等式。将这些等式相加得

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i + \sum_i \mathbf{F}_a \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$$

在理想约束条件下,约束力在虚位移上所作的虚功总和等于零,即 $\sum_i \mathbf{F}_a \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$,则上式成为

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$$

它表明质点系的主动力在虚位移上所作的虚功总和等于零。

1.4.2 充分性

反证法,设主动力的虚功总和等于零,即式(1.18)成立,但质点系不平衡。则质点系至少有一个质点将进入运动状态,以其中一个质点 M_j 为例。由质点动力学定律知,其小位移将沿主动力 $\mathbf{F}_j$ 和约束力 $\mathbf{F}_a$ 的合力方向。对于定常约束情况,实际的微小位移也是一个虚位移,记为 $\delta \mathbf{r}_j$,于是有虚功

$$\mathbf{F}_j \cdot \delta \mathbf{r}_j + \mathbf{F}_a \cdot \delta \mathbf{r}_j > 0$$

质点系进入运动的质点上力的虚功都大于零,而其余平衡的质点上力的虚功均等于零。将质点系的所有虚功相加得

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i + \sum_i \mathbf{F}_a \cdot \delta \mathbf{r}_i > 0$$

理想约束时,有 $\sum_i \mathbf{F}_a \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$,则上式成为

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i > 0$$

它与原假设“虚功总和等于零”矛盾。故质点系必然保持平衡。

虚功方程(1.18)是一个代数方程,却包含了质点系的多个平衡关系。对于 n 个质点组成具有 k 个自由度的质点系,将各质点的虚位移通过广义虚位移表示,由式(1.15)代入式(1.18)得到

$$\begin{aligned}\sum \delta W &= \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \sum_{j=1}^k \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \\ &= \sum_{j=1}^k \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j = \sum_{j=1}^k Q_j \delta q_j \\ &= 0\end{aligned}\quad (1.19)$$

因广义虚位移 δq_j 独立、任意,可得

$$Q_j = 0, \quad j=1, 2, \dots, k \quad (1.20)$$

它表明虚位移原理关于质点系平衡的充分必要条件,可通过广义力表达为质点系的所有广义力等于零。其平衡条件个数等于质点系的自由度数。如果作用于质点系的所有主动力量都是有势力,而有势力相应的广义力可表示为负的势能的导数,如式(1.17),则质点系平衡的充分必要条件(1.20)成为

$$\frac{\partial V}{\partial q_j} = 0, \quad j=1, 2, \dots, k \quad (1.21)$$

即此时平衡等价于势能取驻值。

虚功方程(1.18)不包含未知的约束力,使其没有“多余”的平衡关系。为求约束力,可解除相应的约束,将约束力转化为主动力,从而进入虚功方程,同时系统的自由度也随之增加,其增加的数目受解除的约束控制,等于相应约束力的个数。

例 1.3 杠杆 AB 于 O 处受固定铰支座约束,如图 1.5 所示,长度 $OA=a$, $OB=b$ 。杆 A 与 B 端分别受铅直力 F_1, F_2 作用,在图示水平状态平衡,杆重不计。证明其力系的平衡方程等价于虚功为零。

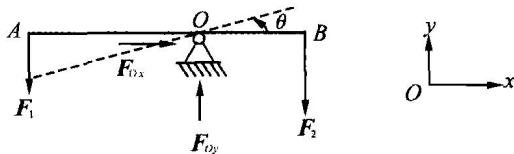


图 1.5

证:解除支座 O 的约束,将约束力 F_{Ox}, F_{Oy} 转化为主动力。杆受平面一般力系作用,其平衡方程为

$$\sum F_x = F_{Ox} = 0 \quad (a)$$

$$\sum F_y = F_{Oy} - F_1 - F_2 = 0 \quad (b)$$

$$\sum M_O = F_1 a - F_2 b = 0 \quad (c)$$

杆的自由度为 3,选取点 O 的线坐标 x_O, y_O 与杆的角坐标 θ 为广义坐标,广义虚位移 $\delta x_O, \delta y_O, \delta \theta$ 相互独立。与作用力相应的虚位移为 $\delta x_O, \delta y_O$

$$\delta y_A = \delta y_O - a \delta \theta$$

$$\delta y_B = \delta y_O + b \delta \theta$$

杆的虚功方程为

$$\begin{aligned}\sum \delta W &= F_{Ox} \delta x_O + F_{Oy} \delta y_O - F_1 \delta y_A - F_2 \delta y_B \\ &= F_{Ox} \delta x_O + (F_{Oy} - F_1 - F_2) \delta y_O + (F_1 a - F_2 b) \delta \theta \\ &= 0\end{aligned}\quad (d)$$

比较平衡方程(a)、(b)、(c)与虚功方程(d),可得平衡方程成立时必有总虚功等于零,反之总虚功等于零时也能推得平衡方程(基于广义虚位移 $\delta x_O, \delta y_O, \delta \theta$ 的独立性与任意性),故两者等价。

例 1.4 平面桁架结构如图 1.6 所示,杆长 $AC=BC=a$, $\angle CAD=\angle CBD=\alpha$,杆 CD 铅直, AD 与 BD 水平, A 端为固定铰支座, B 端为滑动铰支座。铰 D 受铅直力 F 作用,各杆重不计。求:杆 BD 的内力。

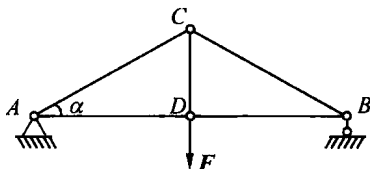


图 1.6

解:解除杆 BD , 增加一对力 $F_1 = -F'_1$, 如图 1.4 所示。结构受双面、定常、理想约束, 自由度为 1, 选取 x_B 为广义坐标, 按照例 1.2 的分析, 可得铰 B 的虚位移为 δx_B , 铰 D 的虚位移为 $\delta x_D = 0$

$$\delta y_D = \frac{1}{2} \delta x_B \cot \alpha$$

根据虚位移原理, 结构平衡的虚功方程为

$$\begin{aligned}\sum \delta W &= F \delta y_D + F_1 \delta x_D - F'_1 \delta x_B \\ &= \left(\frac{1}{2} F \cot \alpha - F_1 \right) \delta x_B \\ &= 0\end{aligned}$$

由广义虚位移 δx_B 的独立性与任意性, 解得杆 BD 的内力

$$F_1 = \frac{1}{2} F \cot \alpha$$

例 1.5 两球通过直杆连接, 置于光滑的球形槽中, 如图 1.7 所示, 球 A 与 B 的质量分别为 m_1, m_2 ($m_1 > m_2$), 杆的质量不计, 长度 $AB=2a$, 槽的半径为 R ($R > a$)。两球于图示状态平衡。求: 偏角 φ 。

解: 系统的自由度由两球的 x, y 坐标减去槽和杆的约束确定, 为 $4-3=1$ 。选取 φ 为广义坐标。平衡时, 不计及球跳起, 系统受双面、定常、理想约束。主动力只有两个重力, 为有势力。以 x 轴位置为零势位, 系统的势能

$$\begin{aligned}V &= -m_1 g (\sqrt{R^2 - a^2} \cos \varphi + a \sin \varphi) - m_2 g (\sqrt{R^2 - a^2} \cos \varphi - a \sin \varphi) \\ &= -(m_1 + m_2) g \sqrt{R^2 - a^2} \cos \varphi - (m_1 - m_2) g a \sin \varphi\end{aligned}$$

根据虚位移原理, 系统平衡条件的势能形式为