INTERNATIONAL
MATHEMATICAL
OLYMPIADS

IMO 50年

1979～1984

第5卷

● 主　编　佩　捷

● 副主编　冯贝叶

多解　推广　加强

$\sum_{1}^{5} kx_k = a$

$\sum_{1}^{5} k^3 x_k = a^2$

$\sum_{1}^{5} k^5 x_k = a^3$

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

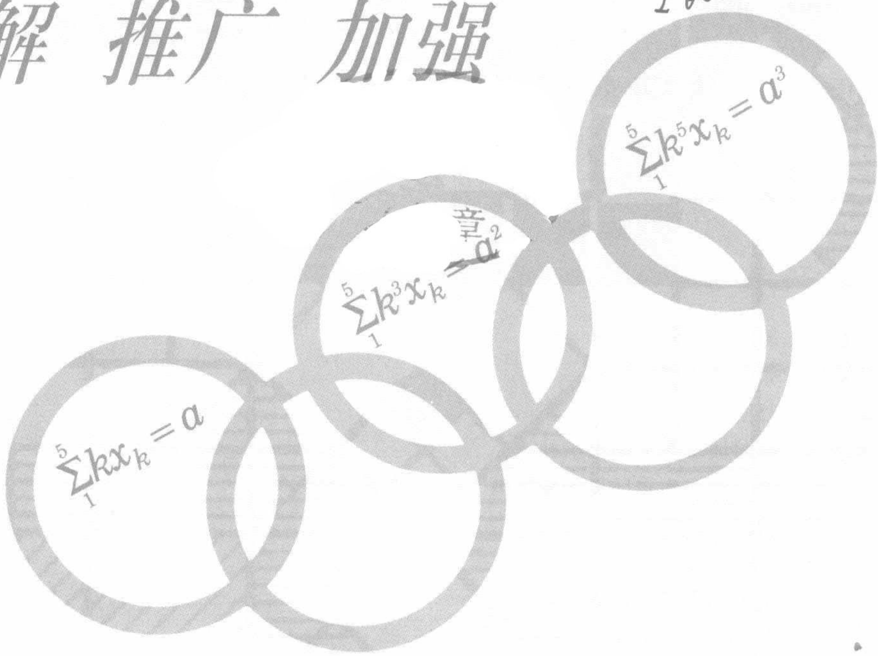
INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIADS

IMO 50年

1979～1984 第5卷

● 主 编 佩 捷
● 副主编 冯贝叶

多解 推广 加强



哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书汇集了第 21 届至第 25 届国际数学奥林匹克竞赛试题及解答。本书广泛搜集了每道试题的多种解法，且注重初等数学与高等数学的联系，更有出自数学名家之手的推广与加强。本书可归结出以下四个特点，即收集全、解法多、观点高、结论强。

本书适合于数学奥林匹克竞赛选手和教练员、高等院校相关专业研究人员及数学爱好者使用。

图书在版编目(CIP)数据

IMO 50 年. 第 5 卷，1979～1984/佩捷主编. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2015.4

ISBN 978－7－5603－5214－5

Ⅰ.①I…　Ⅱ.①佩…　Ⅲ.①中学数学课－题解　Ⅳ.①G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 013928 号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　钱辰琛
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451－86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张 16.75　字数 408 千字
版　　次　2015 年 4 月第 1 版　2015 年 4 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978－7－5603－5214－5
定　　价　38.00 元

前言 | Foreword

法国教师于盖特·昂雅勒朗·普拉内斯在与法国科学家、教育家阿尔贝·雅卡尔的交谈中表明了这样一种观点："若一个人不'精通数学',他就比别人笨吗"?

"数学是最容易理解的.除非有严重的精神疾病,不然的话,大家都应该是'精通数学'的.可是,由于大概只有心理学家才可能解释清楚的原因,某些年轻人认定自己数学不行.我认为其中主要的责任在于教授数学的方式."

"我们自然不可能对任何东西都感兴趣,但数学更是一种思维的锻炼,不进行这项锻炼是很可惜的.不过,对诗歌或哲学,我们似乎也可以说同样的话."

"不管怎样,根据学生数学上的能力来选拔'优等生'的不当做法对数学这门学科的教授是非常有害的."(阿尔贝·雅卡尔、于盖特·昂雅勒朗·普拉内斯.《献给非哲学家的小哲学》.周冉,译.广西师范大学出版社,2001:96)

这套题集不是为老师选拔"优等生"而准备的,而是为那些对 IMO 感兴趣,对近年来中国数学工作者在 IMO 研究中所取得的成果感兴趣的读者准备的资料库.展示原味真题,提供海量解法(最多一题提供 20 余种不同解法,如第 3 届 IMO 第 2 题),给出加强形式,尽显推广空间,是我国建国以来有关 IMO 试题方面规模最大、收集最全的一套题集.从现在看,以"观止"称之并不为过.

前中国国家射击队的总教练张恒是用“系统论”研究射击训练的专家，他曾说：“世界上的很多新东西，其实不是‘全新’的，就像美国的航天飞机，总共用了2万个已有的专利技术，真正的创造是它在总体设计上的新意.”（胡廷楣.《境界——关于围棋文化的思考》.上海人民出版社，1999：463）本书的编写又何尝不是如此呢，将近100位专家学者给出的多种不同解答放到一起也是一种创造.

如果说这套题集可比作一条美丽的珍珠项链的话，那么编者所做的不过是将那些藏于深海的珍珠打捞起来并穿附在一条红线之上，形式归于红线，价值归于珍珠.

首先要感谢江仁俊先生，他可能是国内最早编写国际数学奥林匹克题解的先行者（1979年，笔者初中毕业，同学姜三勇（现为哈工大教授）作为临别纪念送给笔者的一本书就是江仁俊先生编的《国际中学生数学竞赛题解》（定价仅0.29元），并用当时叶剑英元帅的诗词做赠言：“科学有险阻，苦战能过关.”35年过去仍记忆犹新）.所以特引用了江先生的一些解法.江苏师范学院（今年刚刚去世的华东师范大学的肖刚教授曾在该校外语专业就读过）是我国最早介入IMO的高校之一，毛振璇、唐起汉、唐复苏三位老先生亲自主持从德文及俄文翻译1～20届题解.令人惊奇的是，我们发现当时的插图绘制者居然是我国的微分动力学专家“文化大革命”后北大的第一位博士张筑生教授，可惜天妒英才，张筑生教授英年早逝，令人扼腕（山东大学的杜锡录教授同样令人惋惜，他也是当年数学奥林匹克研究的主力之一）.本书的插图中有几幅就是出自张筑生教授之手[22].另外中国科技大学是那时数学奥林匹克研究的重镇，可以说20世纪80年代初中国科技大学之于现代数学竞赛的研究就像哥廷根20世纪初之于现代数学的研究.常庚哲教授、单墫教授、苏淳教授、李尚志教授、余红兵教授、严镇军教授当年都是数学奥林匹克研究领域的旗帜性人物.本书中许多好的解法均出自他们[4,13,19,20,50].目前许多题解中给出的解法中规中矩，语言四平八稳，大有八股遗风，仿佛出自机器一般，而这几位专家的解答各有特色，颇具个性.记得早些年笔者看过一篇报道说常庚哲先生当年去南京特招单墫与李克正去中国科技大学读研究生，考试时由于单墫基础扎实，毕业后一直在南京女子中学任教，所以按部就班，从前往后答，而李克正当时是南京市的一名工人，自学成才，答题是从后往前答，先答最难的一题，风格迥然不同，所给出的奥数题解也是个性化十足.另外，现在流行的IMO题

解，历经多人之手已变成了雕刻后的最佳形式，用于展示很好，但用于教学或自学却不适合.有许多学生问这么巧妙的技巧是怎么想到的，我怎么想不到，容易产生挫败感，就像数学史家评价高斯一样，说他每次都是将脚手架拆去之后再将他建筑的宏伟大厦展示给其他人.使人觉得突兀，景仰之后，备受挫折.高斯这种追求完美的做法大大延误了数学的发展，使人们很难跟上他的脚步，这一点从潘承彪教授、沈永欢教授合译的《算术探讨》中可见一斑.所以我们提倡，讲思路，讲想法，表现思考过程，甚至绕点弯子，都是好的，因为它自然，贴近读者.

中国数学竞赛活动的开展、普及与中国革命的农村包围城市，星星之火可以燎原的方式迥然不同，是先在中心城市取得成功后再向全国蔓延.而这种方式全赖强势人物推进，从华罗庚先生到王寿仁先生再到裘宗沪先生，以他们的威望与影响振臂一呼，应者云集，数学奥林匹克在中国终成燎原之势.他们主持编写的参考书在业内被奉为圭臬，我们必须以此为标准，所以引用会时有发生，在此表示感谢.

中国数学奥林匹克能在世界上有今天的地位，各大学的名家们起了重要的理论支持作用.北京大学的王杰教授、复旦大学的舒五昌教授、首都师范大学的梅向明教授、华东师范大学的熊斌教授、中国科学院的许以超研究员、南开大学的李成章教授、合肥工业大学的苏化明教授、杭州师范学院的赵小云教授、陕西师范大学的罗增儒教授等，他们的文章所表现的高瞻周览、探赜索隐的识力，已达到炉火纯青的地步，堪称为中国IMO研究的标志.如果说多样性是生物赖以生存的法则，那么百花齐放，则是数学竞赛赖以发展的基础.我们既希望看到像格罗登迪克那样为解决一批具体问题而建造大型联合机械式的宏大构思型解法，也盼望有像爱尔特希那样运用最少的工具以娴熟的技能做庖丁解牛式剖析型解法出现.为此本书广为引证，也向各位提供原创解法的专家学者致以谢意.

编者为图“文无遗珠”的效果，大量参考了多家书刊杂志中发表的解法，也向他们表示谢意.

特别要感谢湖南理工大学的周持中教授、长沙铁道学院的肖果能教授、广州大学的吴伟朝教授以及顾可敬先生.他们四位的长篇推广文章读之，使笔者不能不三叹而三致意，收入本书使之增色不少.

最后要说的是由于编者先天不备，后天不足，斗胆尝试，徒见笑于方家.

目录 Contents

第一编
第21届国际数学奥林匹克

第 21 届国际数学奥林匹克题解

英国，1979

联邦德国命题

1 若 p 和 q 均为自然数，并且

$$\frac{p}{q}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{1\ 318}+\frac{1}{1\ 319}$$

求证：p 能被 1 979 整除.

证法 1 负项中的分母为偶数，我们将每个 $-\frac{1}{2k}$ 化为

$$\frac{1}{2k}-\frac{1}{k}$$

所以

$$\frac{p}{q}=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{1\ 319}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{1\ 318}\right)=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{1\ 319}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{659}\right)=\frac{1}{660}+\frac{1}{661}+\cdots+\frac{1}{1\ 319}$$

因为

$$\frac{1}{660+j}+\frac{1}{1\ 319-j}=\frac{1\ 319+660}{(660+j)(1\ 319-j)}$$

对所有的 j 将上述分数配对相加，得到常数分子

$$\frac{p}{q}=\left(\frac{1}{660}+\frac{1}{1\ 319}\right)+\left(\frac{1}{661}+\frac{1}{1\ 318}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{989}+\frac{1}{990}\right)=\frac{1\ 979}{660\times 1\ 319}+\frac{1\ 979}{661\times 1\ 318}+\cdots+\frac{1\ 979}{989\times 990}=1\ 979\frac{p'}{q'}$$

其中，q' 为从 660 到 1 319 的所有整数之积，每个整数与 1 979 互素（因为 1 979 是个素数）.

因为 $pq'=1\ 979p'q$，且 1 979 不能整除 q'，故它需能整除 p.

证法 2 (1) 我们先证明 1 979 是一个素数. 因为要判别一个自然数 N 是否是素数,只要判别 N 能否被小于或等于 $\sqrt{N}$ 的素数除尽就够了. 现有

$$1\ 979 < 2\ 025 = 45^2$$

所以

$$\sqrt{1\ 979} < 45$$

因此只要判别小于或等于 $\sqrt{1\ 979} < 45$ 的素数 2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43 能否除尽 1 979. 可以验证,以上这 14 个素数都不能除尽 1 979,所以 1 979 是一个素数.

(2) 若对模数 m,整数 a 有

$$(a,m)=1$$

即 a 与 m 互素时,方程(其中 x 是未知数,b 是已知整数)

$$ax \equiv b(\bmod m)$$

有唯一的解,这个解可以用符号分数 $\frac{b}{a}$ 来记,它表示以 m 为模的一个剩余数类. 当 m 固定时,对满足 $(a,m)=1$ 和 $(a',m)=1$ 的 a 和 a',这种符号分数有如下的性质.

若 $a \equiv a'(\bmod m)$,$b \equiv b'(\bmod m)$,那么

$$\frac{b}{a} \equiv \frac{b'}{a'}(\bmod m)$$

$$\frac{b}{a} + \frac{b'}{a'} \equiv \frac{ba' + ab'}{aa'}(\bmod m)$$

$$\frac{b}{a} \cdot \frac{b'}{a'} \equiv \frac{bb'}{aa'}(\bmod m)$$

即符号分数可以像普通分数那样进行加、减、乘三种运算. 特别要注意,符号分数中的分母一定要与模 m 互素,否则是没有意义的. 当 m 是一个素数时,符号分数中的分母与模 m 互素的要求就转变为分母不能被模 m 除尽.

(3) 将素数 1 979 取作模,即 $m=1\ 979$,我们来进行对符号分数

$$\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{1\ 318},\frac{1}{1\ 319}$$

(注意这些符号分数对模 1 979 都是有意义的,因为它们的分母都不能被 1 979 除尽) 的一次代数运算,即计算

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{1\ 318} + \frac{1}{1\ 319}$$

利用费马(Fermat) 定理,我们可知对 $1 \leqslant k \leqslant 1\ 319$ 有

$$k^{1\ 978} \equiv 1(\bmod 1\ 979)$$

亦即

$$k \cdot k^{1\ 977} \equiv 1(\bmod 1\ 979)$$

所以

$$\frac{1}{k} \equiv k^{1\ 977}(\bmod 1\ 979)$$

此外有 $$2^{1\,978}\equiv 1(\bmod 1\,979)$$
所以

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{1\,318}+\frac{1}{1\,319}\equiv$$
$$1^{1\,977}-2^{1\,977}+3^{1\,977}-4^{1\,977}+\cdots-1\,318^{1\,977}+1\,319^{1\,977}=$$
$$(1^{1\,977}+2^{1\,977}+3^{1\,977}+4^{1\,977}+\cdots+1\,318^{1\,977}+1\,319^{1\,977})-$$
$$2(2^{1\,977}+4^{1\,977}+\cdots+1\,318^{1\,977})=$$
$$(1^{1\,977}+2^{1\,977}+3^{1\,977}+4^{1\,977}+\cdots+1\,318^{1\,977}+1\,319^{1\,977})-$$
$$2\times 2^{1\,977}(1^{1\,977}+2^{1\,977}+\cdots+659^{1\,977})=$$
$$(1^{1\,977}+2^{1\,977}+3^{1\,977}+4^{1\,977}+\cdots+1\,318^{1\,977}+1\,319^{1\,977})-$$
$$2^{1\,978}(1^{1\,977}+2^{1\,977}+\cdots+659^{1\,977})\equiv$$
$$(1^{1\,977}+2^{1\,977}+3^{1\,977}+4^{1\,977}+\cdots+1\,318^{1\,977}+1\,319^{1\,977})-$$
$$(1^{1\,977}+2^{1\,977}+\cdots+659^{1\,977})=$$
$$660^{1\,977}+661^{1\,977}+\cdots+1\,318^{1\,977}+1\,319^{1\,977}=$$
$$(660^{1\,977}+661^{1\,977}+\cdots+989^{1\,977})+$$
$$(990^{1\,977}+991^{1\,977}+\cdots+1\,319^{1\,977})\equiv$$
$$(660^{1\,977}+661^{1\,977}+\cdots+989^{1\,977})+$$
$$[(-989)^{1\,977}+(-988)^{1\,977}+\cdots+(-660)^{1\,977}]=$$
$$(660^{1\,977}+661^{1\,977}+\cdots+988^{1\,977}+989^{1\,977})-$$
$$(989^{1\,977}+988^{1\,977}+\cdots+661^{1\,977}+660^{1\,977})=$$
$$0(\bmod 1\,979)$$

所以 $$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{1\,318}+\frac{1}{1\,319}\equiv 0(\bmod 1\,979)$$

(4) 另一方面,因为
$$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{1\,318}+\frac{1}{1\,319}$$
是一个有理数,所以它可以表示为一个既约分数,即
$$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{1\,318}+\frac{1}{1\,319}=\frac{p'}{q'}$$
其中,p',q' 是整数,而且$(p',q')=1$.另外,因为如果将
$$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{1\,318}+\frac{1}{1\,319}$$
以 1 319! 作为公分母进行通分,那么通分后的公分母 1 319! 中没有因子 1 979,所以既约以后的分母 g' 中更不会有因子 1 979,所以 q' 不会被 1 979 除尽,因此$\frac{p'}{q'}$对模 1 979 作为符号分数是有意义的.但由(3)知
$$\frac{p'}{q'}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{1\,318}+\frac{1}{1\,319}\equiv 0(\bmod 1\,979)$$
故 $$\frac{p'}{q'}\equiv 0(\bmod 1\,979)$$

这样 $$p'=q'\cdot\frac{p'}{q'}\equiv q'\cdot 0=0 \pmod{1\,979}$$

即 $$p'\equiv 0 \pmod{1\,979}$$

所以若 p,q 是自然数,而

$$\frac{p}{q}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{1\,318}+\frac{1}{1\,319}$$

那么 $$\frac{p}{q}=\frac{p'}{q'}$$

因此 $$p=q\cdot\frac{p'}{q'}$$

因为 $(p',q')=1$,所以 $q'\mid q$,即 $\frac{q}{q'}$ 是整数,所以

$$p=\frac{q}{q'}\cdot p'$$

故 $$p'\equiv 0 \pmod{1\,979}$$

所以 $$p\equiv 0 \pmod{1\,979}$$

即 p 能被 1 979 除尽. 本题证毕.

2 已知一棱柱体,其顶面与底面分别为五边形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 和 $B_1B_2B_3B_4B_5$. 两个五边形的每一边,以及每一条线段 $A_iB_j(i,j=1,\cdots,5)$,都被涂上红色或绿色. 以该棱柱的顶点为顶点所构成的三角形,若组成该三角形的是各边都被涂上了颜色的线段,那么其中必有两条边被涂上不同的颜色. 证明:棱柱顶面与底面的 10 条边必须被涂上同样的颜色.

保加利亚命题

证法 1 首先我们用反证法证明边 $A_1A_2,A_2A_3,A_3A_4,A_4A_5,A_5A_1$ 上具有同一种颜色. 假如不是这样,设 A_1A_2 为红色,A_2A_3 为绿色. 五条线段 $A_2B_1,A_2B_2,A_2B_3,A_2B_4,A_2B_5$ 中的三条具有相同的颜色,我们设为红色,这也不影响证明的普遍性,并标为 A_2B_i,A_2B_j,A_2B_k,那么线段 B_iB_j,B_jB_k,B_kB_i 中有一条为底面的一边,称其为 B_rB_s. 若 B_rB_s 为红色,则我们就得到一个红色 $\triangle A_2B_rB_s$. 所以 B_rB_s 必须为绿色,而线段 A_1B_r 和 A_1B_s 也必须为绿色. 否则我们就会得到红色 $\triangle A_1A_2B_r$ 和 $\triangle A_1A_2B_s$. 这样,$\triangle A_1B_rB_s$ 为一个绿色三角形. 这个矛盾表明 A_1A_2 和 A_2A_3 需具有同种颜色. 同样可以证明上、下底面的各边分别具有同种颜色.

现假设顶面的各边为红色而底面各边为绿色,若联结 A_1 与底面各顶点的各线段中有三条都为绿色,那么其中的两条线段必以底面相邻的两顶点为端点,称为 B_r,B_s,那么 $\triangle A_1B_rB_s$ 为一绿色三角形,这是矛盾的. 因此 A_1 与底面各点相连的各线段中至少

有三条为红色. 同样,也至少有三条使 A_2 与底面相连的线段为红色. 现在我们有了六条红线,其中至少有两条终止于底面上的同一顶点 B_i,这样 $\triangle A_1A_2B_i$ 为一个同色三角形,这与题中所给条件矛盾.

注 若顶面、底面为有 $2n+1$ 边的多边形,则上述结论都成立. 但顶面和底面若为有 $2n$ 边的多边形,则上述结论就不成立了. 例如,若将顶面各边涂成红色,底面涂成绿色,而根据 A_iB_j 中 $i-j$ 为偶数与奇数的情况分别涂成红色与绿色.

证法 2 为讨论方便起见,我们将红色用 0 表示,绿色用 1 表示. 题述棱柱体如图 21.1 所示,而对 $A_iB_j(1\leqslant i,j\leqslant 5)$ 的颜色登记如图 21.2 所示那样的阵列中的颜色(此处登记的仅是一个例子).

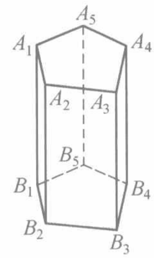


图 21.1

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
B_1	0	1	0	1	0
B_2	0	0	1	0	0
B_3	1	0	0	0	0
B_4	0	1	0	1	0
B_5	1	0	1	0	0

图 21.2

现证明:

(1) 如果将图 21.2 中那样的阵列视为一个矩阵,其矩阵元素记为 c_{ij},那么任何相邻的两行(我们将横的称为行,竖的称为列,而且将第一行和第五行亦视为相邻的行,第一列和第五列视为相邻的列)

$$\begin{pmatrix} c_{i1} & c_{i2} & c_{i3} & c_{i4} & c_{i5} \\ c_{i+1,1} & c_{i+1,2} & c_{i+1,3} & c_{i+1,4} & c_{i+1,5} \end{pmatrix}$$

必定属于下列两种类型之一:

甲:只包含 $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$,$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$,$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$,而且至少包含一个 $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$;

乙:只包含 $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$,$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$,$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$,而且至少包含一个 $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

这是因为不能同时包含 $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$. 因为如果是同时包含,那么五边形 $B_1B_2B_3B_4B_5$ 的一边 B_iB_{i+1} 既不能是 0,亦不能是 1,故矛盾. 而且若既没有 $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$,亦没有 $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$,那么这相邻两行全由 $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 组成. 但如果 $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 接着相邻出现,亦即出现

$$\begin{pmatrix} \cdots & 1 & 1 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & \cdots \end{pmatrix}$$

那么从列的观点上来看,就出现了矛盾. 所以 $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 不能接着相邻出现,对 $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 亦是如此. 因此若既没有 $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$,亦没有 $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$,那么这相邻

两行只能是

$$\begin{pmatrix}0&1&0&1&0\\1&0&1&0&1\end{pmatrix}\text{或}\begin{pmatrix}1&0&1&0&1\\0&1&0&1&0\end{pmatrix}$$

但注意不论以上情况中哪一种，第一列和第五列还是相邻出现了 $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. 而这从列的观点上来看是不允许的，因此是矛盾的. 故结论成立.

(2) 相邻三行，其第一、第二行组成的类型和第二、第三行组成的类型必定是相同的，这样就可以证明所有的底边是同一种颜色. 同理也就证明了所有的顶边亦是同一种颜色.

这是因为若相邻三行中前两行是甲型，后两行是乙型，那么前两行中一定有一个 $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. 今证其相邻列不能再是 $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. 若其相邻列是 $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，则必定出现

$$\begin{bmatrix}\cdots&1&1&\cdots\\\cdots&1&1&\cdots\\\cdots&0&0&\cdots\end{bmatrix}$$

若其相邻列是 $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，则必定出现

$$\begin{bmatrix}\cdots&1&0&\cdots\\\cdots&1&1&\cdots\\\cdots&0&0&\cdots\end{bmatrix}\text{或}\begin{bmatrix}\cdots&0&1&\cdots\\\cdots&1&1&\cdots\\\cdots&0&0&\cdots\end{bmatrix}$$

这三种情况从列的观点来看都是矛盾的. 所以这三行中的前两行一定是下列四种情况之一，即

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\1&0&1&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&1&1&1\\1&0&1&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\1&0&1&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&1&1&0\\1&0&1&0&1\end{pmatrix}$$

这是因为这两行的第一、第五列上不能再出现 $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，如果出现的话，那么从列的观点来看又要出现矛盾了. 现在在这四种情况中，前三种情况中因为第一列和第五列亦认为是相邻的，这样又出现了和 $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ 相邻的 $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，而这是不允许的；在最后一种情况中，第一列和相邻的第五列都是 $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，这样顶边 A_1A_5 的颜色既不能是 0，亦不能是 1，所以又产生了矛盾. 所以这四种情况都不能出现，亦即相邻三行中前两行是甲型，后两行是乙型，是不可能的. 如果

相邻三行中前两行是乙型，后两行是甲型，那么同理可证亦是不可能的. 这样，可知所有相邻的行组成同一种类型. 这样，若第一、第二行组成甲型，因为甲型中一定出现$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，所以 B_1B_2 一定是 0；同样若第二、第三行组成甲型，可知 B_2B_3 是 0；…… 所以所有的底边有相同的颜色. 因为顶和底的位置是对称的，将棱柱倒过来，顶成了底，底成了顶，而棱柱边的着色特征仍然维持，所以证得所有的顶边亦是有相同的颜色，这样(2) 的性质就完全证得了.

(3) 最后只要证明底和顶这 10 条边的颜色是一样的.

这是因为若底边各边的颜色是 0，那么相邻两行都是甲型的. 因为甲型中一定会出现$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，所以任意选择相邻两行，一定有下列五种情况之一出现，即

$$\begin{pmatrix}\cdots & 1 & 1 & \cdots\\ \cdots & 1 & 0 & \cdots\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\cdots & 1 & 1 & \cdots\\ \cdots & 0 & 1 & \cdots\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\cdots & 1 & 0 & \cdots\\ \cdots & 1 & 1 & \cdots\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\cdots & 0 & 1 & \cdots\\ \cdots & 1 & 1 & \cdots\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\cdots & 1 & 1 & \cdots\\ \cdots & 1 & 1 & \cdots\end{pmatrix}$$

但不论哪一种情况，所列的相邻两列所对应的顶边的颜色一定是 0，这样所有的顶边的颜色都是 0. 对底边各边的颜色是 1 的情况，同理可证所有顶边的颜色亦是 1. 这样就证明了本题.

3 平面上两圆相交，设点 A 为其中的一个交点. 有两个点同时从点 A 出发，各以恒速沿其中的一个圆绕行，并在绕行一周后同时回到点 A. 证明：在平面上存在一点 P，且在任何时候点 P 到两动点的距离都相等.

苏联命题

证法 1 两个动点具有相同的角速度(因为它们旋转一周后同时回到点 A). 如图 21.3 所示，圆 C_1 上的点 Q_1 和圆 C_2 上的点 Q_2 都按逆时针方向绕过了一个角度 θ，B 为两圆的另一交点，MAN 为垂直于AB 的线段. 因为 $\angle ABQ_1=\frac{\theta}{2}$，$\angle ABQ_2=\pi-\frac{\theta}{2}$，对于任何 θ，线段 Q_1Q_2 过点 B. 因为 $\angle MAB=\angle NAB=90^\circ$，$MB$ 和 NB 为直径，因此 $\angle MQ_1B=\angle BQ_2N=90^\circ$. 这样推出 $MQ_1 /\!/ NQ_2$. 即不论 Q_1Q_2 运动到何处，Q_1Q_2 的垂直平分线(所有与 Q_1，Q_2 等距的点的集合)与固定线段 MN 相交于其中点 P.

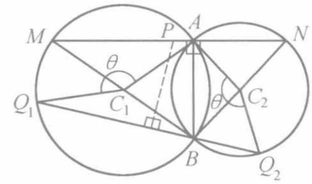


图 21.3

证法 2 设两圆半径各为 R_1 和 R_2，圆心距为 d，两圆圆心各为 O_1 和 O_2，如图 21.4 所示. 再设 $\angle AO_1O_2=\theta_1$，$\angle AO_2O_1=\theta_2$. 令

$$d_1=R_1\cdot\cos\theta_1,d_2=R_2\cdot\cos\theta_2 \quad ①$$

则不论 $\triangle AO_1O_2$ 是锐角三角形或是钝角三角形(图 21.5)，都有