教育部高职高专规划教材
Jiaoyubu Gaozhi Gaozhuan Guihua Jiaocai

离散数学

张忠志　主编
张忠志　李立明　何　伟　编

高等教育出版社

教育部高职高专规划教材

离散数学

张忠志　主编
张忠志　李立明　何　伟　编

高等教育出版社

内容提要

本书是教育部高职高专规划教材，是根据高职高专教育的特点，充分汲取高职、高专和成人高等学校在探索培养技术应用性专门人才方面取得的成功经验和教学成果编写而成的.

全书分为六章，其内容包括集合与关系、命题逻辑、谓词逻辑、图论、代数结构、布尔代数.本书内容精炼，论述深入浅出，条理清楚，重点突出，可读性强.各章节配有适量习题，书末附有参考答案.

本书可作为高等职业学校、高等专科学校、成人高校及本科院校举办的二级职业技术学院和民办高校"离散数学"课程的教材，也可作为工程技术人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

离散数学/张忠志，李立明，何伟编.—北京：高等教育出版社，2005 重印

ISBN 7-04-010829-1

Ⅰ.离... Ⅱ.①张...②李...③何... Ⅲ.离散数学-高等学校-教材 Ⅳ.O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 024985 号

责任编辑 蒋 青　封面设计 杨立新　责任绘图 朱 静
版式设计 陆瑞红　责任校对 杨雪莲　责任印制 孔 源

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　址	http://www.hep.edu.cn
总　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　销	北京蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
排　版	高等教育出版社照排中心		
印　刷	北京市南方印刷厂		
开　本	787×1092 1/16	版　次	2002 年 7 月第 1 版
印　张	13.5	印　次	2005 年 5 月第 6 次印刷
字　数	320 000	定　价	14.60 元

物料号 10829-A0

出版说明

教材建设工作是整个高职高专教育教学工作中的重要组成部分.改革开放以来,在各级教育行政部门、学校和有关出版社的共同努力下,各地已出版了一批高职高专教育教材.但从整体上看,具有高职高专教育特色的教材极其匮乏,不少院校尚在借用本科或中专教材,教材建设仍落后于高职高专教育的发展需要.为此,1999年教育部组织制定了《高职高专教育基础课程教学基本要求》(以下简称《基本要求》)和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》(以下简称《培养规格》),通过推荐、招标及遴选,组织了一批学术水平高、教学经验丰富、实践能力强的教师,成立了“教育部高职高专规划教材”编写队伍,并在有关出版社的积极配合下,推出一批“教育部高职高专规划教材”.

“教育部高职高专规划教材”计划出版500种,用5年左右时间完成.出版后的教材将覆盖高职高专教育的基础课程和主干专业课程.计划先用2～3年的时间,在继承原有高职、高专和成人高等学校教材建设成果的基础上,充分汲取近几年来各类学校在探索培养技术应用性专门人才方面取得的成功经验,解决好新形势下高职高专教育教材的有无问题;然后再用2～3年的时间,在《新世纪高职高专教育人才培养模式和教学内容体系改革与建设项目计划》立项研究的基础上,通过研究、改革和建设,推出一大批教育部高职高专教育教材,从而形成优化配套的高职高专教育教材体系.

“教育部高职高专规划教材”是按照《基本要求》和《培养规格》的要求,充分汲取高职、高专和成人高等学校在探索培养技术应用性专门人才方面取得的成功经验和教学成果编写而成的,适用于高等职业学校、高等专科学校、成人高校及本科院校举办的二级职业技术学院和民办高校使用.

教育部高等教育司

2000年4月3日

前　　言

离散数学是计算机科学中基础理论的核心课程.它的主要目标是研究离散量的结构和相互关系,描述计算机科学离散性和能行性两大特点,每一位计算机科学工作者都必须学习和掌握这些知识.

本书是教育部高职高专规划教材,全书内容包括集合与关系、命题逻辑、谓词逻辑、图论、代数结构、布尔代数.本书有如下特点:

1. 在教学内容的组织与论述上,深入浅出,循序渐进,重点突出.全书始终遵循教学内容的优化原则,恰当地处理了教学内容的系统性与实践性之间的关系,以及教学内容的先进性与量力性、针对性之间的关系,既注意到教学内容体系的完备性,又充分考虑到学习者的认知能力.

2. 掌握概念、训练思维、强化应用是本书编写的总体原则.第一章重点突出数学学习能力的培养,学会正确思考问题、分析问题、提出问题;第二、三章强化逻辑思维能力的训练,重点突出类比法;第四章重点突出数学的应用,我们知道实践是数学发展的原始动力,运用数学方法解决实际问题又是学习数学的终极目的;第五、六章强化抽象概括能力的训练,重点突出归纳法,一切知识始于直观,通过归纳与抽象上升为理论.

3. 重视非智力因素的培养.书中介绍了多位在离散数学领域中做出过重大贡献的数学家,展示他们的品德、信念和艰辛的历程,这对于意志、品格、毅力、情感等非智力因素的形成将起到激励作用.另外,本书在某些章节引用了名人名言,体现数学家对于数学的本质认识,以此来提高学习者对数学概念、原理、方法乃至数学观念的认识水平和数学修养.

本书的教学时数为50～60学时,标有*号的内容要另行安排学时.

本书第一章与第二章由张忠志编写,第三章与第四章由李立明编写,第五章与第六章由何伟编写.本书框架结构安排、修改定稿由张忠志承担.

本书由湖南大学胡锡炎教授担任主审,胡锡炎教授认真审阅了本书的原稿,并提出了许多宝贵的意见.在此,编者对胡锡炎教授表示衷心地感谢!本书编写过程中的主要参考书目开列于书后,编者向这些著作的作者一并表示衷心地感谢!

由于编者学识浅薄,不足之处在所难免,敬请指正.

编　者

2001年10月16日

目　　录

第一章 集合与关系

集合是现代数学中最基本的概念之一,集合论的观点已经渗透到现代科学与技术的各个领域.关系是一种特殊的集合,它反映了研究对象之间的联系与性质.集合与关系在编译原理、数据库原理、开关理论、形式语言等方面都有着广泛的应用.在这一章中,从集合的基本概念出发,介绍关系,着重研究二元关系的特征与性质.

1.1 集合的概念与运算

"人类的一切知识皆始于直观,其次是概念,最后发展为理念."

I.Kant

1.1.1 集合的概念

16世纪末期,人们为了追求微积分的坚实基础,对数集展开了研究.在1876—1918年间,康托尔在他的研究中感到不能仅仅研究单独的或个别的"点",而且还必须将具有某种特性的"点"看成一个"整体"来研究.发表了一系列有关集合论的文章,提出了良序集等理论,奠定了集合论的基础.

集合是数学中最基本的概念,如同几何中的"点"、"线"、"面"等概念一样,它不可精确定义.一般认为一个集合是指一些可确定的、可分辨的事物组成的整体.下面用一些实例加以说明.

例1 (1) 1973年在大兴安岭工作的所有伐木工人;

(2) 所有26个英文字母;

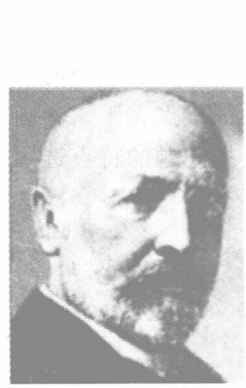
(3) 计算机内存单元的全体;

(4) C语言中标识符的全体;

康托尔(G.F.P.Cantor,1845—1918)

德国数学家、集合论的创始者.

从1874年起,康托尔开始考虑面上的点集与线上的点集有无一一对应的问题,他用一一对应关系作为对无穷集合分类的准则,经过三年多的探索,1877年他证明了 n 维形体上的点和线上的点可以有一一对应,他说:"我见到了,但我不相信."论文于1878年发表后遭到了一些数学家的批判与反对.在1878年的这篇论文中,康托尔明确地提出了"势"的概念(又称为基数)并且用"与自身的真子集有一一对应"作为无穷集的特征.



他在1879—1884年发表题为《关于无穷线性点集》论文6篇,其中5篇的内容大部分为点集论,特别是在第5篇论文中,康托尔论述了序关系,提出了良序集、序数及数类的概念,提出了良序定理,他对无穷问题进行了不少的哲学讨论.20世纪以来集合论不断发展,已成为数学的基础理论.

(5) 所有的实数;

(6) 鲁迅《狂人日记》中所有的汉字.

上面列举的例子都是集合,通常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 代表集合.组成集合的每个"成员"叫做这个集合的元素,用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 代表元素.

如果 a 是集合 A 的一个元素,那么记为 $a\in A$,读作"a 属于 A",或说"a 在 A 中".

如果 a 不是集合 A 的一个元素,那么记为 $a\notin A$,读作"a 不属于 A",或说"a 不在 A 中".

属于关系是集合论中重要的关系,当运用集合论的方法解决实际问题时,首先必须明确元素、集合以及在元素与集合之间是否存在属于关系.

应该注意的是,集合的元素是确定的,即对于某个元素 a 与某个特定的集合 S,要么 $a\in S$,要么 $a\notin S$,二者必居其一;其次,集合的元素是互异的,例 1 中所说的鲁迅《狂人日记》中所有的汉字构成的集合 A,《狂人日记》中的"汉字"才是 A 的元素,凡是相同的汉字,认为是同一个汉字而不作区分,不同的汉字是可分辨的,因此,集合中的元素都是不同的(相同的元素看作是一个);再次,集合的元素是没有次序的,例如集合$\{3,4,5\}$,$\{4,5,3\}$和$\{5,3,4\}$都是同一个集合.

给出一个集合通常有两种方法:

(1) 列举法.即列出集合的所有元素,元素之间用逗号隔开,并把它们用花括号括起来.如由数字 1,2,3,4 组成的集合记为 $A=\{1,2,3,4\}$.

然而,有时列出集合中所有的元素是不现实的或不可能的.如由不大于 10^{10} 的所有正整数组成的集合 B.若在能清楚表示集合元素的情况下可采用缩写的办法,集合 B 可记为 $B=\{1,2,3,\cdots,10^{10}\}$.

在一般情况下,$\mathbf{N}$ 表示自然数集 $\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots\}$;$\mathbf{Z}$ 表示整数集;$\mathbf{Z}_+$ 表示正整数集;$\mathbf{Q}$ 表示有理数集;$\mathbf{R}$ 表示实数集.

但是有些集合的元素不能通过列举法来表示,如所有的质数组成的集合,为此,给出集合的第二种表示方法.

(2) 描述法.如果一个集合是由满足某条件 P 的那些元素所组成,那么就把该集合记为 $\{x\mid P(x)\}$,读作"使 $P(x)$ 成立的一切 x 所组成的集合".如所有的质数组成的集合可表示为 $\{x\mid x\text{ 为质数}\}$.

又如,若 n 阶方阵的全体记为 $\boldsymbol{M}_n$,则 n 阶对称矩阵组成的集合可表示为

$$C=\{\boldsymbol{M}\mid \boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{M},\boldsymbol{M}\in\boldsymbol{M}_n\}.$$

比较集合的这两种表示方法,可以看出,列举法的优点是可以具体看清集合的元素;描述法的优点在于它刻画了集合元素的共同特征.集合的这两种表示方法不是相互对立的,应用时可根据问题的特点选用.例如下面对于同一个集合,就有三种不同的表示方法:

$$D=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\},$$

$$D=\{x\mid x\in\mathbf{Z},-3\leqslant x\leqslant 3\},$$

$$D=\{x\mid x\in\mathbf{Z},|x|\leqslant 3\}.$$

一般说来,集合的元素可以是任何类型的事物,一个集合也可以作为另一个集合的元素,例如集合

$$E=\{a,\{b,c\},d,\{d\}\}.$$

必须指出，$\{b,c\}\in E$，而 $b\notin E$，但是，$d\in E$ 且 $\{d\}\in E$.

1.1.2　集合间的关系

现在研究集合间的关系，首先讨论两个集合相等的问题.

定义 1.1.1　设 A,B 为集合，A 与 B **相等**，当且仅当它们有相同的元素，记作 $A=B$. 两个集合不相等，则记作 $A\neq B$.

例如，令 A 是小于 10 的素数，$B=\{x\mid x^4-17x^3+101x^2-247x+210=0\}$，那么 $A=\{2,3,5,7\}=B$.

从集合相等的定义，不难得到下面性质：

(1) 自反性：即对任一集合 A，有 $A=A$；

(2) 对称性：对于任意两个集合 A,B，若 $A=B$，则 $B=A$；

(3) 传递性：对于任意集合 A,B,C，若 $A=B$ 且 $B=C$，则 $A=C$.

集合间除了相等关系外，还有一种包含关系，其定义如下.

定义 1.1.2　设 A,B 为两个集合，若 A 中的每一个元素都是 B 中的元素，则称 A 为 B 的**子集**，记为 $A\subseteq B$，读作 B 包含 A（或说 A 被 B 包含），并称关系"$\subseteq$"为包含关系. 如果 A 不是 B 的子集，记为 $A\nsubseteq B$.

特别地，若 A 是 B 的子集，而且集合 B 中至少有一个元素不在 A 中，则称 A 是 B 的**真子集**，记为 $A\subsetneqq B$，读作 B 真包含 A，"$\subsetneqq$"称为真包含关系.

例如，令 $A=\{a,c,d,e\}$，$B=\{a,b,c,x,y\}$，$C=\{a,b\}$，则 $C\subsetneqq B$，但 $C\nsubseteq A$.

由定义 1.1.1 和定义 1.1.2 可以得到下面定理：

定理 1.1.1　设 A 和 B 是两个集合，则 $A=B$ 的充分必要条件是 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$.

定理 1.1.1 提供了证明两个集合相等的有效方法，并由此能够得到包含关系"$\subseteq$"具有下列性质：

(1) 自反性：对任意一个集合 A，有 $A\subseteq A$；

(2) 反对称性：对任意集合 A,B，若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则 $A=B$；

(3) 传递性：对于任意集合 A,B,C，若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$.

应该注意，属于关系"$\in$"与包含关系"$\subseteq$"有着本质的区别. 前者表示集合 A 中的元素与集合本身的一种从属关系，而后者是两个集合之间的一种关系.

例如，下面关系成立

$$\{a\}\subsetneqq\{\{a\},a,b\},\ a\in\{\{a\},a,b\},\ \{a\}\in\{\{a\},a,b\},$$

但　$\{a\}\nsubseteq\{a,b\}$，$\{1,2\}\notin\{0,1,2\}$.

在集合论中，有两个特殊的集合：一是不含任何元素的集合，称为**空集**，记为 $\varnothing$，规定它是任何一个集合的子集，空集是惟一的. 另一个集合被称为**全集**，它包含了某个问题中所讨论的一切元素，有时称为该问题的全域集合，记作 U. 全集的概念相当于论域，如在初等数论中，全体整数组成了全集.

定义 1.1.3　给定集合 A，由集合 A 的所有子集组成的集合，称为集合 A 的**幂集**，记为 $\mathscr{P}(A)$.

例 2　设 $A=\{a,b,c\}$，求 $\mathscr{P}(A)$.

解　首先，空集 $\varnothing\subseteq A$；

A 的仅含有一个元素的子集有：$\{a\},\{b\},\{c\}$；

A 的含有两个元素的子集有：$\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}$；

A 的含有三个元素的子集有：$\{a,b,c\}$.

所以 $\mathscr{P}(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$.

运用例 2 的方法不难证明下面定理：

定理 1.1.2 如果集合 A 有 n 个元素，那么其幂集 $\mathscr{P}(A)$ 中有 2^n 个元素.

证明 A 的所有由 k 个元素组成的子集数为从 n 个元素中取 k 个的组合数 C_n^k，$0\leqslant k\leqslant n$. 因此 $\mathscr{P}(A)$ 的元素总个数是

$$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=(1+1)^n=2^n.$$

1.1.3 集合的运算

集合的运算，就是以给定的集合为研究对象，按照某些确定的规则得到另外一些集合. 这样，有助于人们从总体上研究集合的性质，建立原理，提炼方法.

定义 1.1.4 设 A,B 是任意两个集合，由集合 A 和 B 的所有共同元素组成的集合称为 A 与 B 的**交集**，记为 $A\cap B$，称运算"$\cap$"为交运算.

$$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}.$$

显然，$A\cap B\subseteq A$，$A\cap B\subseteq B$.

例如，设 $A=\{0,2,4,8,10\}$，$B=\{1,2,6,8,9\}$，则 $A\cap B=\{2,8\}$.

值得提出的是，交集与交运算是两个不同的概念，交集是交运算的结果，正如初等数学中的"和"与"加法"这两个概念的区别那样.

现将两个集合交的概念加以推广，设有一列集合 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$，由属于每一个集合 $A_i(i=1,2,\cdots)$ 的元素组成的集合称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的交集，记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$，即

$$\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i=\{x\mid \text{对一切 } i\in \mathbf{Z}_+,\text{有 } x\in A_i\}.$$

例如，令 $A_1=\{0,1\}$，$A_2=\{0,1,2\}$，$\cdots$，$A_n=\{0,1,2,\cdots,n\}$，$\cdots$，则 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i=\{0,1\}$.

又如，令 $A_0=(0,1]$，$A_n=\left(0,1+\dfrac{1}{n}\right)$，$n=1,2,\cdots$，则 $\bigcap\limits_{i=0}^{\infty}A_i=A_0=(0,1]$.

如果集合 A 与集合 B 没有公共元素，即 $A\cap B=\varnothing$，那么称 A 与 B 是不相交的.

例如，设 $A_1=\{\{1,2\},\{3\}\}$，$A_2=\{\{1\},\{2,3\}\}$，$A_3=\{\{1,2,3\}\}$，则

$$A_1\cap A_2=A_1\cap A_3=A_2\cap A_3=\varnothing.$$

所以集合 A_1,A_2 和 A_3 是两两不相交的.

定义 1.1.5 设 A,B 为任意两个集合，所有属于 A 或属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的**并集**，记为 $A\cup B$，运算"$\cup$"称为并运算.

$$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}.$$

显然，$A\subseteq A\cup B$，$B\subseteq A\cup B$.

例如，令 $A=\{a,b,c\}$，$B=\{c,e,f\}$，则 $A\cup B=\{a,b,c,e,f\}$.

同样,并集与并运算也是两个不同的概念,并集是并运算对集合作用后的结果.

由属于集合列 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 中所有集合的元素的全体组成的集合称为集合 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的并集,记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$,即

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=\{x\mid 存在某个\ i_0\in\mathbf{Z}_+,使得\ x\in A_{i_0}\}.$$

例如,令 $A_n=\left(0,1-\dfrac{1}{n}\right]$, $n=1,2,\cdots$,显然,$A_1\subseteq A_2\subseteq\cdots\subseteq A_n\subseteq\cdots$.于是 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i=(0,1)$.

定义 1.1.6 设 A,B 为集合,由属于 A 而不属于 B 的所有元素组成的集合称为 A 与 B 的**差集**,记为 $A-B$,运算"$-$"称为差运算.

$$A-B=\{x\mid x\in A\ 且\ x\notin B\}.$$

例如 $\{1,2,3\}-\{1,2\}=\{3\}$,

$\varnothing-\{1,2,3\}=\varnothing$,

$\{1,2,3\}-\{4,5\}=\{1,2,3\}$.

定义 1.1.4—定义 1.1.6 给出了集合三种基本运算的定义,由这三种运算还可以定义集合上的其他运算.

定义 1.1.7 U 为全集,设 A,B 为 U 的子集,

(1) 称集合 $U-A$ 为集合 A 的**绝对补集**,记为$\complement A$,运算"$\complement$"称为补运算.

$$\complement A=\{x\mid x\in U\ 且\ x\notin A\}.$$

(2) 称集合$(A-B)\cup(B-A)$为集合 A 与 B 的**对称差**,记为 $A\oplus B$,即

$$A\oplus B=(A-B)\cup(B-A).$$

例如,令 $U=\{1,2,3,4,5,6\}$,$A=\{2,3,5\}$,$B=\{1,3,4,6\}$,则

$$\complement A=U-A=\{1,4,6\},$$

$A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)=\{2,5\}\cup\{1,4,6\}=\{1,2,4,5,6\}$.

不难得出:

$$A\oplus B=(A\cup B)-(A\cap B),$$

$$A-B=A\cap(\complement B).$$

集合之间的相互关系和有关运算可以用文氏图给出直观的描述,文氏图的构造方法如下:

画一个矩形表示全集 U,在矩形内画一些圆,用圆的内部表示集合.通常在图中画有阴影的区域表示新组成的集合.下页图是文氏图的实例.

集合的运算具有许多性质,下面列出最主要的几条,并称它们为集合运算的基本定律.

对于全集 U 的任意子集 A,B,C 有:

交换律 $A\cup B=B\cup A$;

$A\cap B=B\cap A$.

结合律 $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$;

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.

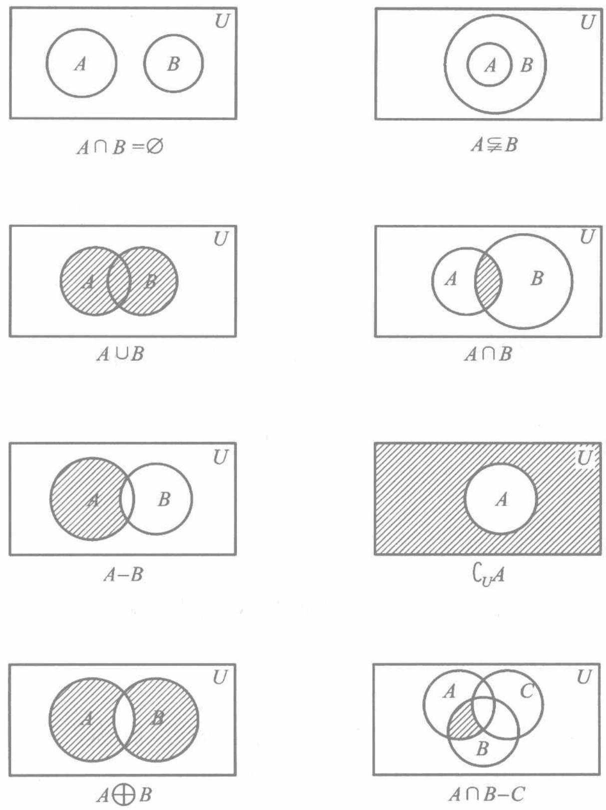


图 1.1

分配律　$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$;

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

同一律　$A\cup\varnothing=A$;

$A\cap U=A$.

互补律　$A\cup\complement A=U$;

$A\cap\complement A=\varnothing$.

对合律　$\complement(\complement A)=A$.

等幂律　$A\cup A=A$;

$A\cap A=A$.

零一律　$A\cup U=U$;

$A\cap\varnothing=\varnothing$.

吸收律　$A\cup(A\cap B)=A$;

$A\cap(A\cup B)=A$.

德摩根律　$\complement(A\cup B)=\complement A\cap\complement B$;

$\complement(A\cap B)=\complement A\cup\complement B$.

这些运算定律(集合恒等式)的正确性,都可以用集合相等的定义一一加以证明.限于篇幅,仅举一例.

例 3 证明:$\complement(A\cup B)=\complement A\cap\complement B$.

证明 设 $x\in\complement(A\cup B)$,则 $x\notin A\cup B$.因而 $x\notin A$ 且 $x\notin B$,于是 $x\in\complement A$ 且 $x\in\complement B$,从而 $x\in\complement A\cap\complement B$,故有

$$\complement(A\cup B)\subseteq\complement A\cap\complement B.$$

反之,设 $x\in\complement A\cap\complement B$,则 $x\in\complement A$ 且 $x\in\complement B$,于是 $x\notin A$ 且 $x\notin B$,因而 $x\notin A\cup B$,有 $x\in\complement(A\cup B)$.故有

$$\complement A\cap\complement B\subseteq\complement(A\cup B).$$

由定理 1.1.1 可得

$$\complement(A\cup B)=\complement A\cap\complement B.$$

利用集合运算定律可以简化集合表达式和证明集合恒等式.

例 4 证明:$A\cup(A\cap B)=A$.

证明
$$\begin{aligned}A\cup(A\cap B)&=(A\cap U)\cup(A\cap B) &&(\text{同一律})\\&=A\cap(U\cup B) &&(\text{分配律})\\&=A\cap(B\cup U) &&(\text{交换律})\\&=A\cap U &&(\text{零一律})\\&=A. &&(\text{同一律})\end{aligned}$$

习 题 1.1

1. 判定下列各题的正确与错误,并简述理由:

(1) $\varnothing=\{\varnothing\}$;

(2) $\{a,b\}\subseteq\{a,\{b\}\}$;

(3) $\{a,b\}\in\{a,b,\{a,b\}\}$;

(4) $\{a,b\}\subsetneqq\{\{a\},\{b\}\}$.

2. 用列举法表示下列集合:

(1) 小于 20 的质数的集合;

(2) 构成 Computer College 词组的字母集合;

(3) $\{x\mid x^2+x-6=0\}$.

3. 用描述法表示下列集合:

(1) $\{1,2,3,\cdots,49\}$;

(2) 偶整数的集合;

(3) 能被 8 整除的整数的集合.

4. 列出下列集合的元素:

(1) $\{x\mid x$ 是 36 的因子$\}$;

(2) $\{1,\{3\},\{\{a\}\}\}$.

5. 写出下列集合的幂集:

(1) $\{\varnothing\}$;

(2) $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$;

(3) $\{\{\varnothing,a\},\{a\}\}$.

6. $A \subsetneqq B$ 且 $A \in B$ 能同时成立吗?

7. 给定自然数集合 $\mathbf{N}$ 的下列子集:

$A=\{1,2,7,8\}$;

$B=\{i \mid i^2<50\}$;

$C=\{i \mid i$ 整除 $30\}$;

$D=\{i \mid i=2^k$ 且 $k\in\mathbf{Z}$ 且 $0\leqslant k\leqslant 6\}$.

求出下列集合:

(1) $A\cup(B\cup(C\cup D))$;

(2) $A\cap(B\cap(C\cap D))$;

(3) $B-(A\cup C)$;

(4) $(\complement A\cap B)\cup D$;

(5) $A\oplus B$.

8. 设全集 U 的子集 A,B,C,证明下列各式:

(1) $A\cap(B-A)=\varnothing$;

(2) $A\cup(B-A)=(A\cup B)$;

(3) $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$;

(4) $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$.

9. 证明下列恒等式:

(1) $A\cup(A\cap B)=A\cap(A\cup B)=A$;

(2) $A-B=A\cap\complement B$;

(3) $A\cup(\complement A\cap B)=A\cup B$.

10. 设 $A\subseteq B$,证明

(1) $A\cup B=B$;

(2) $A\cap B=A$.

11. 证明下列三个条件是等价的:

(1) $A\subseteq B$;

(2) $\complement A\cup B=U$;

(3) $A\cap\complement B=\varnothing$.

12. 设 A,B 是两个集合,

(1) 若 $A-B=B$,则 A 与 B 有什么关系?

(2) 若 $A-B=B-A$,则 A 与 B 有什么关系?

13. 设 A,B 是任意两个集合,试证明:

(1) $\mathscr{P}(A)\cup\mathscr{P}(B)\subseteq\mathscr{P}(A\cup B)$;

(2) $\mathscr{P}(A)\cap\mathscr{P}(B)=\mathscr{P}(A\cap B)$,

并举例说明 $\mathscr{P}(A)\cup\mathscr{P}(B)\subsetneqq\mathscr{P}(A\cup B)$.

1.2 关系及其表示

"一个设计合理的表示法,总要不含糊、不混乱地表达数学的本质."

R. Bellman

研究集合时,考察的主要是集合的元素.要求集合的元素是确定的、互异的(可分辨的)、无序的,进一步讨论了集合的运算.而组成一个集合的元素彼此间可能会有某种联系,这种关系并没有被研究.例如,集合 A 表示某校计算机系学生的全体,那么对于集合 A 中的某两个元素 a 与 b(即某两个学生 a 与 b),他们可能来自于某个地区,即 a 与 b 之间有同乡关系.又如取集合 $A=\{2,3,4,6\}$,对于 A 的两个元素 2 与 4,他们之间存在着整除关系.为了研究集合元素之间的关系,先介绍集合的笛卡儿积.

1.2.1 集合的笛卡儿积与二元关系

定义 1.2.1 设有两个集合 A 和 B,若令

$$A\times B=\{\langle a,b\rangle \mid a\in A \text{ 且 } b\in B\},$$

则称 $A\times B$ 为集合 A 到集合 B 的**笛卡儿积**.

当 $A=B$ 时,$A\times B$ 简记为 A^2.

注意,组成集合 A 到集合 B 的笛卡儿积的元素是序偶 $\langle a,b\rangle$.其中 a 是它的第一元素,取自于集合 A,b 是它的第二元素,取自于集合 B,如笛卡儿坐标系中二维平面上一个点的坐标 (x,y) 就是一个序偶,序偶 $(2,4)$ 与 $(4,2)$ 表示二维平面上不同的点.这说明序偶的次序是十分重要的,不能随便调换.而且两个序偶 $\langle x_1,y_1\rangle$ 与 $\langle x_2,y_2\rangle$ 相等当且仅当 $x_1=x_2$ 和 $y_1=y_2$.

例 1 已知 $A=\{a,b\}$,$B=\{1,2\}$.求 $A\times B$,$B\times A$,A^2.

解 $A\times B=\{\langle a,1\rangle,\langle a,2\rangle,\langle b,1\rangle,\langle b,2\rangle\}$,

$B\times A=\{\langle 1,a\rangle,\langle 1,b\rangle,\langle 2,a\rangle,\langle 2,b\rangle\}$,

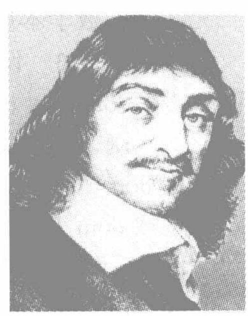
$A^2=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,b\rangle,\langle b,a\rangle\}$.

显然,$A\times B$ 与 $B\times A$ 不相等,这说明集合的笛卡儿积是不可交换的.但它对集合的交、并、差等运算满足分配律.

定理 1.2.1 设有集合 A,B,C,则

(1) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$;

笛卡儿(R. Descartes,1596—1650)



法国哲学家、数学家、物理学家、解析几何学的奠基人之一.

笛卡儿出生于一个贵族家庭,生活在资产阶级与封建领主、科学与神学进行激烈斗争的时代.多年的游历,同社会各阶层人士的交往,多方面的科学研究以及不断地自我反省和思考,使他坚信必须抛弃统治欧洲思想界的经院哲学,探求正确的思想方法,创立为实践服务的哲学.1637 年,他写了一篇《科学中正确运用理性和追求真理的方法论》的文章,哲学史上简称为《方法论》.笛卡儿认为数学是其他一切科学的理想和模型,提出了以数学为基础的、以演绎法为核心的方法论.对后世的哲学、数学和自然科学的发展起了巨大作用.他一生为捍卫他的学说同教会和其他反动势力进行艰苦地斗争.

(2) $(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$;

(3) $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$;

(4) $(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$;

(5) $A\times(B-C)=(A\times B)-(A\times C)$;

(6) $(A-B)\times C=A\times C-B\times C$.

证明 (1) 设$\langle x,y\rangle\in A\times(B\cup C)$,则 $x\in A$ 且$y\in B\cup C$.

于是 $x\in A$ 且$y\in B$ 或$x\in A$ 且$y\in C$.

从而 $\langle x,y\rangle\in A\times B$ 或$\langle x,y\rangle\in A\times C$.

所以 $\langle x,y\rangle\in(A\times B)\cup(A\times C)$.

反之,设$\langle x,y\rangle\in(A\times B)\cup(A\times C)$.

同理可证,$\langle x,y\rangle\in A\times(B\cup C)$,

故有 $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$.

(2)~(6)式的证明作为练习.

定义 1.2.2 设集合 A,B,其笛卡儿积 $A\times B$ 的任意子集R 称为A 到B 的一个**二元关系**,简称**关系**.若$\langle a,b\rangle\in R$,则称 a 与b 有关系R,记为 aRb.否则,称 a 与b 没有关系R,记为 $a\not R b$.

当 $A=B$ 时,称 R 为A 上的关系.

当 $R=\varnothing$时,则称 R 为空关系,当 $R=A\times B$ 时,则称 R 为全关系.

令 $I_A=\{\langle a,a\rangle\mid a\in A\}$,显然 $I_A\subseteq A^2$.所以 I_A 是A 上的二元关系,并称为 A 上的恒等关系.

例如,$A=\{1,3,5\}$,则 $R=\{\langle 1,3\rangle,\langle 1,5\rangle,\langle 3,5\rangle\}$是 A 上的关系.

其实关系 R 就是集合A 上的小于($<$)关系.

例 2 设集合 $A=\{1,2,3,4\}$,定义 A 上的二元关系 $R=\{\langle a,b\rangle\mid a,b\in A$,且$\frac{a-b}{2}$是整数$\}$,求 R.

解 $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,2\rangle,\langle 4,4\rangle\}$.

该关系 R 称为"模 2 同余"关系,一般记作 $a\equiv b(\bmod 2)$,或记作 $a\equiv_2 b$.类似地,可定义"模n 同余"关系,记为

$$a\equiv b(\bmod n)\text{或 } a\equiv_n b.$$

从定义 1.2.2 及例 2 中可以看到,二元关系的集合表示法,设计合理,准确地、清楚地表达了二元关系的数学本质.

定义 1.2.3 设 R 为集合A 到集合B 的二元关系,令

$\operatorname{dom} R=\{x\mid x\in A$ 且有$y\in B$ 使$\langle x,y\rangle\in R\}$,

$\operatorname{ran} R=\{y\mid y\in B$ 且有$x\in A$ 使$\langle x,y\rangle\in R\}$,

称 $\operatorname{dom} R$ 为R 的**定义域**,$\operatorname{ran} R$ 为R 的**值域**.

显然 $\operatorname{dom} R\subseteq A$, $\operatorname{ran} R\subseteq B$.

例 3 设 $A=\{2,3,6,8\}$,R 为A 上的整除关系:xRy 当且仅当$x\mid y$.求 $\operatorname{dom} R$,$\operatorname{ran} R$.

解 由 R 的定义知: