高考数学

真题解密

甘志国　著

以高考真题为依据
研究解答技巧为基准
探究主干知识解答
洞察未来命题的方向

- 老师知道，你在大题面前有困难，它是你夺高分的瓶颈
- 请你记住，困难面前有真题解密，它随时为你排忧解难
- 早一天掌握核心考点，就多一分致胜把握
- 早一天参考真题解密，名师伴你走向成功

清华大学出版社

高考数学
真题解密

甘志国老师勤勉敬业，著述丰硕，桃李满天下！《高考数学真题解密》是本书作者为广大莘莘学子潜心打造的又一精品！

——数学家、北京师范大学资深教授 王世强

一旦拥有《高考数学真题解密》，便愉快地踏上了学好数学的征程，开始了良好思维习惯的培养。

——享受国务院政府特殊津贴的教育专家、特级教师 万尔遐

研究数学高考，就要研究高考数学真题的解法、背景及命题规律等，这也是高三数学复习备考的有效途径。《高考数学真题解密》就是对数学真题的独到完美研究！

——华中师范大学第一附属中学特级教师、原副校长 党宇飞

《高考数学真题解密》内容丰富、题型全面、解答详尽、研究深入、特色鲜明，是高三数学复习备考的重要参考资料。

——北京市十一学校特级教师 李锦旭

《高考数学真题解密》解密解题技巧，配备精选习题，研究高考真题，洞察命题走向，是考生们不可或缺的一本高考辅导书。

——海南省华侨中学特级教师、正高级教师 李红庆

ISBN 978-7-302-39153-1
9 787302 391531 >
定价：56.00元

高考数学真题解密

甘志国　著

清华大学出版社
北京

内容简介

本书是高考数学复习备考的参考用书，涉及高中数学的 10 部分主干知识：函数，数列，三角函数，平面向量，不等式，平面解析几何，立体几何，导数，排列、组合与二项式定理，概率统计，每部分除阐述了解题技巧外，还配备了精选的习题。同时配备了高考研究和习题参考答案：“高考研究”对 2014 年的高考真题做了详尽的研究；“习题参考答案”给出了各章习题的答案，方便在学习时参考.

本书可供广大高中学生，特别是高中毕业生参考使用，也可作为高中数学教师和教育研究工作者教学与研究高考试题思想方法的工具书.

图书在版编目(CIP)数据

高考数学真题解密/甘志国著. --北京：清华大学出版社，2015
ISBN 978-7-302-39153-1

Ⅰ. ①高…　Ⅱ. ①甘…　Ⅲ. ①中学数学课—高中—升学参考资料　Ⅳ. ①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 011815 号

责任编辑：秦　甲　陈立静
封面设计：杨玉兰
责任校对：马素伟
责任印制：沈　露

出版发行：清华大学出版社
　　网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
　　地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编**：100084
　　社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
　　投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
　　质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
　　课 件 下 载：http://www.tup.com.cn,010-62791865
印 装 者：河北新华第一印刷有限责任公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　　**印　张**：27.5　　**字　　数**：669 千字
版　　次：2015 年 3 月第 1 版　　**印　　次**：2015 年 3 月第1 次印刷
印　　数：1～3000
定　　价：56.00 元

产品编号：062160-01

前　言

2014 年高考一结束，笔者就在第一时间认真研究了全部高考真题(文理共计 37 套，其中江苏文理同卷)：研究它们的解法(自然解法和巧解，一题多解及多题一解)、背景、归类以及与以前高考题的比较等. 这些对高考试题的研究，对于各层次的高三学生来说，都是高考复习备考的最佳资料，所以笔者欲将这些研究心得汇集成书奉献给莘莘学子们，希望对你们的数学复习备考有所裨益.

现在市面上的教辅资料可以说是“汗牛充栋”，但笔者为什么还要在这么多的书中再添上一本呢？不是更加加重了你们的学习负担了吗？不是的！因为本书有以下独特之处：

(1) 不贪多求全. 本书不是一本系统的高考数学复习备考资料，而是一本高考数学复习备考的重要参考资料，其中的“第 11 章　高考研究”是笔者对 2014 年高考真题的详细研究.

(2) 突出主干知识. 本书涉及高中数学的全部主干知识(共 10 部分)：函数，数列，三角函数，平面向量，不等式，平面解析几何，立体几何，导数，排列、组合与二项式定理，概率统计. 每部分除阐述了解题技巧外，还配备了精选的习题，这些习题都是笔者在教学中使用过的，它们不偏不怪，紧跟高考，且创新成分多(所以建议读者把这些习题当作考试来对待，不可急于看答案).

(3) 是最新研究成果. 本书的内容(包括试题)都是笔者的最新研究成果，在笔者以前的书中均没有公开过.

本书包括 11 章：前 10 章是整个高中数学的全部主干知识(共 10 部分)；第 11 章“高考研究”对 2014 年的高考真题作了详尽的研究，也是本书的精华.

本书适合准备高考复习备考者使用，低年级的高中生也可对本书的内容选择使用，广大数学爱好者也可研读本书的相应内容.

相信它，本书不错；认真研读它，定会收获不少！无论是对数学素养的培养，还是对数学应试.

在本书出版之际，作者还要感谢中科院张景中院士、武汉大学原校长齐明友教授、北师大王世强教授、华中师大毛经中教授、曲阜师大李吉宝教授、广东连平县忠信中学严文兰老师、浙江余姚市三中朱世杰老师对作者在初等数学研究方面的指导、勉励和无私帮助！感谢本书的责任编辑秦甲女士对本书的出版付出了不少心血！感谢养育我成长的爸爸甘武关、妈妈袁秀芬及太太张琳、儿子甘超一对我生活的体贴照料，你们辛苦多多！感谢我近年所教的张陶、陈朝鹏、王金宇、杨昆、王相谋、曹云飞等一大批学生，他们酷爱数学、各科成绩优异、评学兼优，一直支持作者的班主任及教学工作！

甘志国
于北京丰台

目录

第 1 章　函数……1

1.1　谈谈“定义域优先”……1
1.2　判断两个增函数(减函数)图像的公共点个数时要慎重……2
1.3　关于互为反函数的两个函数图像公共点的结论及其应用……5
1.4　勘根定理和介值定理的有趣应用……7
1.5　轴对称、中心对称及周期性的关系……9
1.6　当 $k(k \neq 0), b$ 变化时，曲线 $y=\log_a(kx+b)$ 的形状均相同……10
习题……11

第 2 章　数列……14

2.1　求数列通项的一种简洁方法——构造常数列……14
2.2　一类数列的性质及其应用……18
2.3　用裂项法和待定系数法求 S_n 是通法……21
2.4　应注意由递推式确定的数列可以是有穷数列……25
2.5　2013 年哈佛-麻省理工数学竞赛代数测试题第 3 题与 2003 年中国普通高考理科压轴题如出一辙……26
2.6　简解一道课本题……29
2.7　等差数列各项绝对值的前 n 项和……30
2.8　你熟悉公式 $a_n=a_mq^{n-m}(n \geqslant m)$ 吗……32
2.9　改错位相减法为分组求和法……33
2.10　例谈用验证法求数列通项……34
习题……37

第 3 章　三角函数……43

3.1　关于辅助角公式的一个定理及其应用……43
3.2　类正弦定理猜想……49
3.3　有理数角度的三角函数值何时是有理数……52
3.4　用课本结论简解五道三角形的高考题……53
3.5　这两道高考三角形大题的解答均欠严谨……56
习题……60

第 4 章　平面向量……61

4.1　一类三角形的面积比问题……61
4.2　介绍物理学中的拉米定理在平面向量中的应用……62
4.3　用一个向量等式妙解两道高考题……65
习题……66

第 5 章　不等式……67

5.1　用数学归纳法证明均值不等式和柯西不等式……67
5.2　用“穿针引线”法解一般不等式……69
5.2.1　用“穿针引线”法解一元高次不等式……69
5.2.2　一般方程的重根的定义……69
5.2.3　用函数极值的定义简洁解题……70
5.2.4　解不等式的一种新方法——列表法……71
5.2.5　用“穿针引线”法解一元高次不等式的理由……72
5.2.6　用“穿针引线”法解一般不等式……72
5.3　谈一道期末练习题的解法及推广……73
5.4　关于 $\sum_{i=m}^{n} i^{\alpha}$ 的一类不等式……74
5.5　用“线性规划问题的最优解在边界上”简解高考题……76
5.6　两类新型的“线性规划”问题……79

习题 84

第 6 章　平面解析几何 85

6.1　椭圆参数方程有“误区”，三角函数定义很简洁 85
6.2　用直接解一元二次方程来证圆锥曲线的焦点弦性质 88
6.3　是代入直线方程，还是代入抛物线方程 90
6.4　定椭圆的平行弦中的最长者过该椭圆的中心 94
6.5　椭圆内接平行四边形、矩形、菱形的周长及面积的取值范围 95
6.5.1　引理 95
6.5.2　椭圆内接平行四边形、矩形、菱形的周长及面积的取值范围 95
6.6　介绍椭圆的几条性质 99
6.7　圆锥曲线的一条性质及其简证 100
6.8　过定点的动直线的参数方程及其在焦半径问题中的应用 103
6.8.1　过定点的动直线的参数方程及参数的几何意义 103
6.8.2　关于圆锥曲线的焦半径的几个结论 104
6.9　研究一道直线与圆的高考题 110
6.10　一般式方程下两直线位置关系的判断条件 111
6.11　伸缩变换的性质及其应用 113
习题 116

第 7 章　立体几何 124

7.1　底面是矩形的四棱锥相对侧棱长的平方和相等 124
7.2　例谈构造平行六面体解立体几何题 125
7.3　例谈建立空间直角坐标系解立体几何题 130
7.4　用升维法解三道数学趣题 136
7.5　用余弦定理简证直线和平面垂直的判定定理 137
习题 138

第 8 章　导数 144

8.1　纠正关于 e 的一种流行错误 144
8.2　简解两道高考题 146
8.3　巧思妙解两道题 147
8.4　三次函数图像的对称中心的一条性质 149
8.5　用函数的隐零点解题 150
8.6　简解一类“恒成立”高考题 155
8.7　用“函数在区间上的最大(小)值点若不是区间端点就是极大(小)值点”解题 158
8.8　对 2013 年高考陕西卷压轴题的研究 160
8.9　例谈用求导法解一类求参数取值范围的高考题 162
8.10　按计算器按出的极限问题 164
8.11　研究 2014 年高考天津卷理科压轴题 166
习题 171

第 9 章　排列、组合与二项式定理 174

9.1　排列组合问题的基本题型及其解法 174
9.1.1　特殊元素和特殊位置优先策略 174
9.1.2　相邻元素捆绑策略 174
9.1.3　不相邻问题插空策略 175
9.1.4　定序问题消序处理，也可转化为占位插空模型来处理 175
9.1.5　多排问题直排策略 176
9.1.6　排列组合混合问题先选后排策略 176
9.1.7　相同元素问题隔板策略 176
9.1.8　平均分组问题除法策略 177

9.1.9 合理分类与分步策略 177
9.1.10 构造模型策略 178
9.1.11 配对问题 179
9.1.12 分解与合成策略 179
9.1.13 化归策略 180
9.2 由上楼梯问题得到的 Fibonacci 数列与组合数的联系 180
习题 182

第 10 章 概率统计 185

10.1 应重视用枚举法解题 185
10.2 编拟、解答概率题时均要注意基本事件是等可能事件 188
习题 193

第 11 章 高考研究 197

2014 高考多经典 197
2014 年高考的高频考点——三次函数 205
2014 年高考的高频考点——错位相减法 212
数列求和的七种基本方法 218
数列通项公式的求法 225
用分离常数法解 2014 年高考题 232
用分离常数法求解 2014 年高考四川卷压轴题 242
2014 年高考福建卷第 22 题的背景及简解 245
推广 2014 年高考湖北卷文科压轴题的结论 247
比较 $a^{b+\alpha}$ 与 $b^{a+\alpha}$ 的大小 249
求 ln2 的近似值——兼谈两道高考题的解法 251
谈谈三次曲线的切线问题 254
各种各样的曲线相切 261
你熟悉导数公式 $(|x|)'=\frac{x}{|x|}=\frac{|x|}{x}$ 吗 266
尴尬的循环论证——从 2014 年高考北京卷理科第 18 题谈起 268
谈谈二次曲线上的四点共圆问题 271
推广 2014 年高考山东卷文科压轴题的结论 275
双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{3a^2}=1$, $\frac{x^2}{3b^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的性质 276
由 2014 年高考广东卷解析几何大题得到的关于圆锥曲线的两类经典轨迹问题 281
简介数学黑洞问题 284
商榷 2014 年高考题中表述欠严谨的 11 道题 287
对于数列问题应强调在实数范围内求解 292
谈 4 道高考题的题源 293
介绍 26 道日本高考数学题 300
2014 年高考亮题新解 312

习题参考答案 364

第 1 章　函　　数

1.1　谈谈“定义域优先”

高一师生在教(学)本章时，都知道有一句流行语：“定义域优先”．但我们在以后的教(学)中还是很容易犯这种错误的，所以我们要时时牢记这一解函数问题的准则——“定义域优先”．

题 1-1　解方程 $\sqrt{\dfrac{7x+6}{12x+11}}=\dfrac{11x^2-6}{7-12x^2}$.

解　设函数 $y=\sqrt{\dfrac{7x+6}{12x+11}}$，可得其为增函数，且其反函数为 $y=\dfrac{11x^2-6}{7-12x^2}$.

而增函数与其反函数图像的交点在直线 $y=x$ 上，所以原方程与方程

$$x=\frac{11x^2-6}{7-12x^2} \tag{1-1}$$

同解.

方程(1-1)即

$$12x^3+11x^2-7x-6=0$$
$$(x+1)(3x+2)(4x-3)=0$$
$$x=-1,-\frac{2}{3},\frac{3}{4} \tag{1-2}$$

检验：把 $x=-1$ 代入原方程，得 $1=-1$；把 $x=-\dfrac{2}{3}$ 代入原方程，得 $\dfrac{2}{3}=-\dfrac{2}{3}$；把 $x=\dfrac{3}{4}$ 代入原方程，得 $\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{4}$. 所以原方程的解是 $x=\dfrac{3}{4}$.

分析　既然说原方程与方程(1-1)同解，而方程(1-1)的解集就是式(1-2)，所以原方程的解集也是式(1-2)；但经过检验知，原方程的解集并不是式(1-2)，出现了两个增根.

说明此解法有错！是哪里出现了错误呢(可以断定结论“增函数与其反函数图像的交点在直线 $y=x$ 上”是正确的)？

一般来说，求函数 $y=f(x)$ 的反函数 $y=f^{-1}(x)$，应当标出求得的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的定义域 D 即为原函数 $y=f(x)$ 的值域(除非使函数 $y=f^{-1}(x)$ 有意义的 x 的取值范围就是 D).

以上解法中开始得到的“函数 $y=\sqrt{\dfrac{7x+6}{12x+11}}$ 的反函数为 $y=\dfrac{11x^2-6}{7-12x^2}$”不正确，应改为“函数的反函数为 $y=\dfrac{11x^2-6}{7-12x^2}(x\geqslant 0)$”.

所以说，曲线 $y=\sqrt{\dfrac{7x+6}{12x+11}}$ 与曲线 $y=\dfrac{11x^2-6}{7-12x^2}(x\geqslant 0)$ 的交点在直线 $y=x$ 上，即方程 $\sqrt{\dfrac{7x+6}{12x+11}}=\dfrac{11x^2-6}{7-12x^2}(x\geqslant 0)$ 与方程 $x=\dfrac{11x^2-6}{7-12x^2}(x\geqslant 0)$ 同解，即以上解法只求出了原方程的非负数解.

正确解法： 原方程即 $\begin{cases}\dfrac{7x+6}{12x+11}\geqslant 0\\ \dfrac{11x^2-6}{7-12x^2}\geqslant 0\\ \dfrac{7x+6}{12x+11}=\left(\dfrac{11x^2-6}{7-12x^2}\right)^2\end{cases}$，也即

$$\begin{cases}x\in\left(-\sqrt{\dfrac{7}{12}},-\sqrt{\dfrac{6}{11}}\right]\cup\left[\sqrt{\dfrac{6}{11}},\sqrt{\dfrac{7}{12}}\right)\\ 444x^5+467x^4-408x^3-444x^2+89x+102=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x\in\left(-\sqrt{\dfrac{7}{12}},-\sqrt{\dfrac{6}{11}}\right]\cup\left[\sqrt{\dfrac{6}{11}},\sqrt{\dfrac{7}{12}}\right)\\ (x+1)(3x+2)(4x-3)(37x^2+5x-17)=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x\in\left(-\sqrt{\dfrac{7}{12}},-\sqrt{\dfrac{6}{11}}\right]\cup\left[\sqrt{\dfrac{6}{11}},\sqrt{\dfrac{7}{12}}\right)\\ x=-1,-\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{4},\dfrac{-5\pm 11\sqrt{21}}{74}\end{cases}$$

$$x=\frac{3}{4},-\frac{5+11\sqrt{21}}{74}$$

所以原方程的解集为 $\left\{\dfrac{3}{4},-\dfrac{5+11\sqrt{21}}{74}\right\}$.

1.2 判断两个增函数(减函数)图像的公共点个数时要慎重

题 1-2 已知 $0<a<1$，则方程 $a^{|x|}=|\log_a x|$ 的实根个数是( ).

A. 2 B. 3 C. 4 D. 与 a 的值有关

参考答案 A

解 分别画出当 $0<a<1$ 时，函数 $y=a^{|x|}$ 与 $y=|\log_a x|$ 的图像，如图 1-1 所示，由数形结合可知，它们的交点个数为 2，所以方程 $a^{|x|}=|\log_a x|$ 的实根个数也是 2.

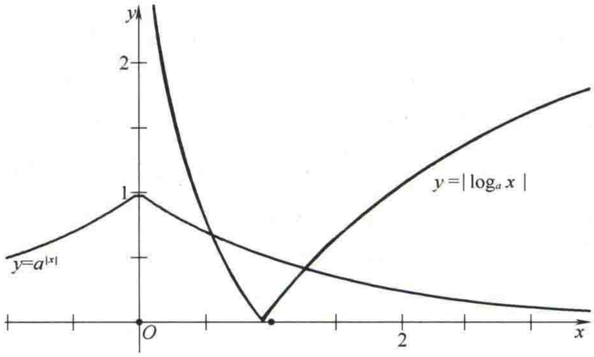

图 1-1

题 1-3 已知 $0<a<1$，则方程 $a^{|x|}=|\log_a x|$ 的实根个数为(　　).

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 1 个或 2 个或 3 个

参考答案 B(解法同上)

这两道题实质相同，解法及答案也都是相同的——用数形结合思想求解. 该题及其解法可能还被很多文献引用过，甚至也会被不少老师在教学中选用，还会被引用者认为是挑战思维、解法巧妙的一道不可多得的好题！殊不知，以上解法是有漏洞的，答案也是错误的.

我们知道，增函数与减函数的图像若有公共点，则公共点唯一. 证明如下.

设增函数是 $y=f(x)$，减函数是 $y=g(x)$，则函数 $y=f(x)-g(x)$ 是增函数，所以其零点至多一个，即方程 $f(x)-g(x)=0$ 的根至多一个，也即方程组 $\begin{cases} y=f(x) \\ y=g(x) \end{cases}$ 至多有一组解，所以欲证成立.

但增函数与增函数的图像若有公共点，则公共点不一定唯一. 如图 1-2 所示就是一个典型的例证.

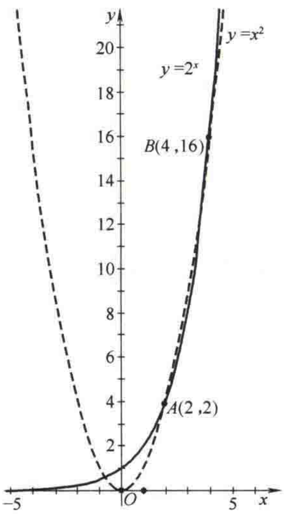

图 1-2

同理，减函数与减函数的图像若有公共点，则公共点也不一定唯一.

由图 1-1 可知：当 $x>1$ 时，减函数 $y=a^{|x|}$ 与增函数 $y=|\log_a x|$ 的图像有唯一公共点；当 $0<x<1$ 时，减函数 $y=a^{|x|}$ 与减函数 $y=|\log_a x|$ 的图像有公共点，但公共点不一定唯一. 所以，认为函数 $y=a^{|x|}$ 与 $y=|\log_a x|$ 的图像公共点个数为 2，理由不充足. 由几何画板可以研究这个问题：当 $0<x<1$ 时，又 $a>0$ 且 $a\to 0$ 时，减函数 $y=a^{|x|}$ 与减函数 $y=|\log_a x|$ 的图像有三个公共点(如图 1-3 所示是 $a=0.01$ 的情形).

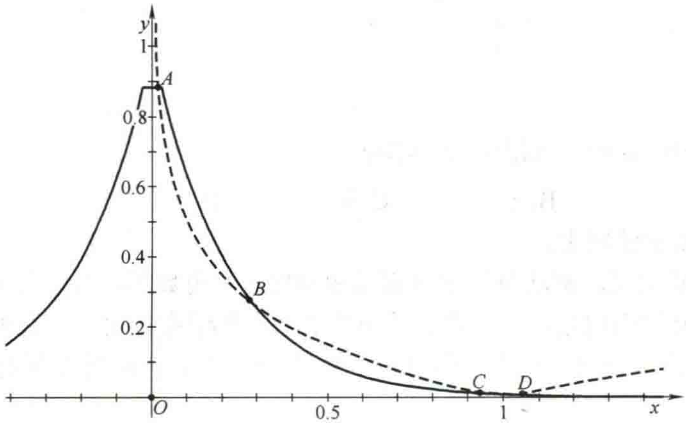

图 1-3

解决题 1-2、题 1-3 是有难度的，先要给出下面的定理 1(其证明须用导数，这里略去).

定理 1-1 指数函数 $y=a^x\,(a>0且a\neq 1)$ 与其反函数 $y=\log_a x$ 图像公共点个数的情形如下.

(1) 当 $a\in(0,\mathrm{e}^{-\mathrm{e}})$ 时是 3 个公共点.

(2) 当 $a\in[\mathrm{e}^{-\mathrm{e}},1)$ 时是 1 个公共点.

(3) 当 $a\in\left(1,\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}\right)$ 时是 2 个公共点.

(4) 当 $a=\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$ 时是 1 个公共点.

(5) 当 $a\in\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}},+\infty\right)$ 时没有公共点.

由定理 1-1，容易得到定理 1-2.

定理 1-2 方程 $a^{|x|}=|\log_a x|$ 的实根个数的情形如下.

(1) 当 $a\in(0,\mathrm{e}^{-\mathrm{e}})$ 时是 4 个解.

(2) 当 $a\in[\mathrm{e}^{-\mathrm{e}},1)$ 时是 2 个解.

(3) 当 $a\in\left(1,\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}\right)$ 时是 3 个解.

(4) 当 $a=\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$ 时是 2 个解.

(5) 当 $a\in\left(e^{\frac{1}{e}},+\infty\right)$ 时是 1 个解.

题 1-4 (2013 年高考天津卷理科第 7 题)函数 $f(x)=2^x\left|\log_{0.5}x\right|-1$ 的零点个数为( ).

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

参考答案 B

笔者认为解答这道高考题也是不容易的(笔者见到的解答都是由图 1-1 来求解的，这是不对的).

由下面的这道题也可知“判断两个增函数(减函数)图像的公共点个数时要慎重”.

题 1-5 若方程 $\sin\dfrac{\pi x}{2}=\log_a x(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 恰有三个不相等的实数根，则实数 a 的取值范围是( ).

A. $\varnothing$　　B. $(5,9)$　　C. $\left(\dfrac{1}{7},\dfrac{1}{3}\right)$　　D. $\left(\dfrac{1}{7},\dfrac{1}{3}\right)\cup(5,9)$

参考答案 D(不正确)

1.3 关于互为反函数的两个函数图像公共点的结论及其应用

定理 1-3 (1) 若函数 $y=f(x)$ 是增函数，则：

① 方程 $\underbrace{f(f(\cdots f(x)))}_{n个f}=x$ 与 $f(x)=x$ 同解；

② 方程 $f(x)=f^{-1}(x)$($f^{-1}(x)$ 表示函数 $y=f(x)$ 的反函数，下同)与 $f(x)=x$ 同解.

(2) 增函数与其反函数图像的公共点在直线 $y=x$ 上.

证明 (1) ① 只需**证明** 方程 $\underbrace{f(f(\cdots f(x)))}_{n个f}=x$ 的解是方程 $f(x)=x$ 的解.

若方程 $\underbrace{f(f(\cdots f(x)))}_{k+1个f}=x$ 有解 $x=a$，得 $\underbrace{f(f(\cdots f(a)))}_{k+1个f}=a$.

假设 $f(a)>a$，由函数 $y=f(x)$ 是增函数得 $f(f(a))>f(a)>a$，再得 $f(f(f(a)))>f(a)>a$，…，得 $\underbrace{f(f(\cdots f(a)))}_{k+1个f}>a$.

假设 $f(a)<a$，同理可得 $\underbrace{f(f(\cdots f(a)))}_{k+1个f}<a$.

均与 $\underbrace{f(f(\cdots f(a)))}_{k+1个f}=a$ 矛盾！所以 $f(a)=a$. 即证明成立.

② 因为函数 $y=f(x)$ 是增函数，所以方程 $f(x)=f^{-1}(x)$ 即方程 $f(f(x))=f(f^{-1}(x))$，也即方程 $f(f(x))=x$，由①中 $n=2$ 时的结论知，方程 $f(x)=x$，所以证明成立.

(2) 由(1)②可得.

用定理 1-3 可方便地解决求增函数与其反函数图像的公共点问题：若 $y=f(x)$ 是增函

数，则方程组$\begin{cases}y=f(x)\\y=f^{-1}(x)\end{cases}$与$\begin{cases}y=f(x)\\y=x\end{cases}$同解.

例如，求$y=x^2-1(x\geqslant 0)$与其反函数图像的公共点坐标，由定理 1-3 可得答案：$\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2},\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

注 减函数与其反函数的图像的公共点不一定在直线$y=x$上.

反例 1-1 函数$y=\sqrt{7-3x}\left(x\leqslant\dfrac{7}{3}\right)$与其反函数$y=\dfrac{7-x^2}{3}$ $(x\geqslant 0)$图像的公共点$(1,2),(2,1)$均不在直线$y=x$上.

反例 1-2 函数$y=\left(\dfrac{1}{16}\right)^x$与其反函数$y=\log_{\frac{1}{16}}x$图像的公共点$\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}\right),\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4}\right)$均不在直线$y=x$上.

但我们有比定理 1-3 更普遍的结论成立，即定理 1-4.

定理 1-4 若互为反函数的两个函数图像有公共点(a,b)，则它们也有公共点(b,a).

证明 若曲线$y=f(x)$与$y=f^{-1}(x)$有公共点(a,b)，得$\begin{cases}b=f(a)\\b=f^{-1}(a)\end{cases}$，所以$\begin{cases}f^{-1}(b)=f^{-1}(f(a))=a\\f(b)=f(f^{-1}(a))=a\end{cases}$，即函数$y=f(x)$与$y=f^{-1}(x)$也有公共点$(b,a)$.

下面用定理 1-3 和定理 1-4 来解答三道高考题.

题 1-6 (2013 年高考四川卷文科第 10 题)设函数$f(x)=\sqrt{e^x+x-a}(a\in\mathbf{R}$，e 为自然对数的底数). 若存在$b\in[0,1]$使得$f(f(b))=b$，则$a$的取值范围是(　　).

A. $[1,e]$　　B. $[1,1+e]$　　C. $[e,1+e]$　　D. $[0,1]$

参考答案 A

解 因为函数$y=f(x)$在定义域内是增函数，所以由定理 1-3(1)①知题设即方程$f(x)=x$ $(x\in[0,1])$，也即$a=e^x+x-x^2(x\in[0,1])$有解.

设函数$g(x)=e^x+x-x^2(x\in[0,1])$，得$g'(x)=e^x+1-2x\geqslant(x+1)+1-2x=2-x>0$ $(x\in[0,1])$(因为用导数易证$e^x\geqslant x+1(x\in\mathbf{R})$)，所以函数$g(x)$是增函数，得函数$g(x)$的值域是$[g(0),g(1)]$，即$[1,e]$.

得所求a的取值范围是$[1,e]$.

题 1-7 (2013 年高考四川卷理科第 10 题)设函数$f(x)=\sqrt{e^x+x-a}(a\in\mathbf{R}$，e 为自然对数的底数). 若曲线$y=\sin x$上存在点$(x_0,y_0)$使得$f(f(y_0))=y_0$，则$a$的取值范围是(　　).

A. $[1,e]$　　B. $[e^{-1}-1,1]$　　C. $[1,e+1]$　　D. $[e^{-1}-1,e+1]$

参考答案 A

解 可得题设即“存在$y_0\in[0,1]$使得$f(f(y_0))=y_0$”，接下来的解答就全同题 1-6 的解答了.

题 1-8 (2007 年高考重庆卷文科第 10 题)设$P(3,1)$为二次函数$f(x)=ax^2-2ax+b(x\geqslant 1)$

的图像与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像的一个交点，则(　　).

A. $a=\frac{1}{2},b=\frac{5}{2}$　　B. $a=\frac{1}{2},b=-\frac{5}{2}$

C. $a=-\frac{1}{2},b=\frac{5}{2}$　　D. $a=-\frac{1}{2},b=-\frac{5}{2}$

参考答案　C

解　由定理 1-4 可得 $f(1)=3$ 且 $f(3)=1$，解得 $a=-\frac{1}{2},b=\frac{5}{2}$.

1.4　勘根定理和介值定理的有趣应用

定理 1-5　(勘根定理)若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)f(b)<0$，则 $\exists\xi\in(a,b)$ 使 $f(\xi)=0$.

推论 1-1　若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)f(b)\leqslant 0$，则 $\exists\xi\in[a,b]$ 使 $f(\xi)=0$.

定理 1-6　(介质定理)若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上能取到最小值和最大值(分别设为 m,M). 若 $m\leqslant c\leqslant M$，则 $\exists\xi\in[a,b]$ 使 $f(\xi)=c$.

证明　$\exists x_1,x_2\in[a,b]$ 且 $x_1\neq x_2$ 使得 $f(x_1)=m,f(x_2)=M$.

设 $g(x)=f(x)-c$，由 $m\leqslant c\leqslant M$，得 $g(x_1)\leqslant 0,g(x_2)\geqslant 0$.

再由推论 1-1 可得证明成立.

注　勘根定理与其推论是等价的；勘根定理与介值定理也是等价的。上面用勘根定理(即其推论)证得了介值定理，还可用介值定理证得勘根定理(因为函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)f(b)<0$，所以函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的最小值和最大值分别是负数和正数，再由介值定理知，$\exists\xi\in[a,b]$ 使 $f(\xi)=0$).

题 1-9　小华 7:00 从 A 地出发，于 17:00 到达 B 地，次日 9:00 又从 B 地沿原路返回，于 20:00 到达 A 地. 小华在这两天中能在某个同一时刻到达同一地点吗？

解　设 A,B 两地之间的距离是 $a(a>0)$.

第一天，设在 x 时刻小华离 A 地的距离是 $f(x)(7\leqslant x\leqslant 17)$，得 $0\leqslant f(9)\leqslant a,f(17)=a$.

第二天，设在 x 时刻小华离 A 地的距离是 $g(x)(9\leqslant x\leqslant 20)$，得 $g(9)=a,0\leqslant g(17)\leqslant a$.

设 $h(x)=f(x)-g(x)(9\leqslant x\leqslant 17)$，得 $h(9)=f(9)-g(9)\leqslant 0$，$h(17)=f(17)-g(17)\geqslant 0$.

因为 $f(x),g(x)$ 都是连续函数，所以 $h(x)(9\leqslant x\leqslant 17)$ 也是连续函数. 再由推论知，$\exists\xi\in[9,17]$ 使 $h(\xi)=0$，即 $f(\xi)=g(\xi)$，即小华在这两天中能在某个同一时刻到达同一地点.

题 1-10　在凸凹不平的地面上(假设地面是连续的曲面)，很难一次将四条腿的桌子(这张桌子四条腿的脚底是矩形的四个顶点)放稳(即四条腿都着地，但任何时候都是至少有三条腿着地). 求证：可以把这张桌子调整到适当的位置使其放稳.

证明　设题中矩形的中心为点 O. 如图 1-4(a)所示，设桌子四脚底的初始位置为 A,B,C,D，建立平面直角坐标系 xOy.

把桌子旋转 $\theta(0^\circ \leqslant \theta \leqslant 180^\circ)$ 角(即把图 1-4(a)中的矩形 $ABCD$ 绕点 O 旋转 θ 角)后，设脚底 A,D 与地面的距离之和为 $f(\theta)$，脚底 B,C 与地面的距离之和为 $g(\theta)$.

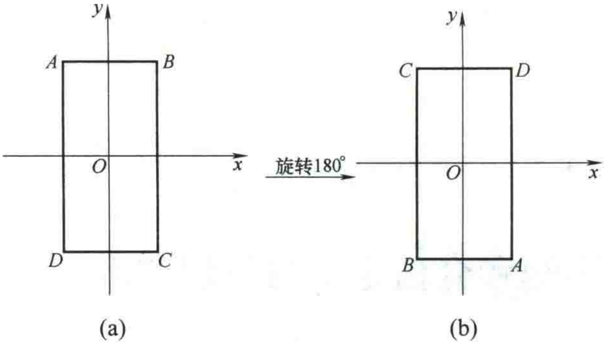

图 1-4

由距离知，$f(\theta)\geqslant 0, g(\theta)\geqslant 0$.

因为任何时候都是至少有三条腿着地，所以 $f(\theta)$ 和 $g(\theta)$ 中至少有一个为 0.

把这张桌子绕点 O 旋转 180° 后，脚底 A,D 分别与脚底 C,B 的位置互换(见图 1-4(b))，所以 $f(180^\circ)=g(0^\circ), g(180^\circ)=f(0^\circ)$.

设 $h(\theta)=f(\theta)-g(\theta)(0^\circ \leqslant \theta \leqslant 180^\circ)$，得 $h(180^\circ)=-h(0^\circ)$，所以 $h(0^\circ)\cdot h(180^\circ)=-[h(0^\circ)]^2 \leqslant 0$.

因为 $f(\theta)$ 和 $g(\theta)$ 都是连续函数，所以 $h(\theta)$ 也是连续函数. 再由推论知，$\exists \xi \in [0^\circ,180^\circ]$ 使 $h(\xi)=0$，即 $f(\xi)=g(\xi)$.

而 $f(\xi)$ 和 $g(\xi)$ 中至少有一个为 0，所以 $\exists \xi \in [0^\circ,180^\circ]$ 使 $f(\xi)=g(\xi)=0$，即此时这张桌子的四条腿都着地. 证毕.

题 1-11 如图 1-5 所示，Γ 是平面 α 上的一个封闭图形，取一条指定了正方向的直线为基线(x 轴). 任意给定一个方向，设其方向与 x 轴的正方向所成的角为 $\theta(0 \leqslant \theta < 2\pi)$. 一条具有给定方向 θ 的动直线(称其方向角为 θ)从左向右(观察者面向动直线的正方向)平行移动时，求证：在这些动直线中有一条直线把图形 Γ 所分的两侧图形面积相等.

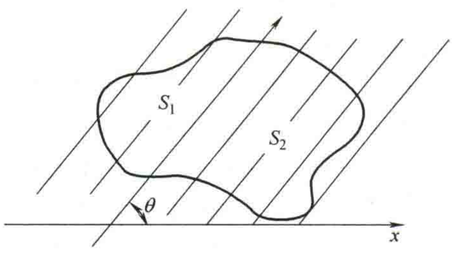

图 1-5

证明 当方向角为 θ 的动直线从左向右连续平移时，设动直线左、右两侧的面积分别为 S_1,S_2，得 S_1,S_2 也是连续变化的. 设图形 Γ 的面积是 S，则 S_1 从 0 连续增加到 S(不包括 0 和 S)，S_2 从 S 连续减少到 0(不包括 0 和 S)，所以 S_1-S_2 也是连续变化的，从 $-S$ 连续增加到 S(不包括 $-S$ 和 S).

因为 $-S<0<S$，所以由介值定理知，在动直线中有一条直线使得 $S_1-S_2=0$，即 $S_1=S_2$，即证明成立.

题 1-12　设 A,B 均是平面 α 上的封闭图形，求证：在平面 α 上存在一条直线穿过 A，B，同时平分图形 A,B 的面积.

证明　下面有关叙述的含义同题 1-11 及其证明.

如图 1-6 所示，记方向角为 $\theta(0\leqslant\theta<2\pi)$ 的平分图形 A 的面积的动直线为 $l(\theta)$. 设直线 $l(\theta)$ 分图形 B 所得左、右两侧的面积分别为 S_1,S_2.

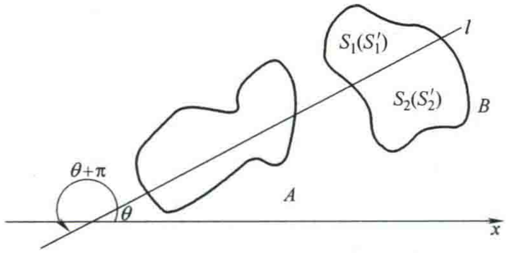

图 1-6

当 θ 连续变化时，动直线 $l(\theta)$ 的位置也是连续变化的，所以 S_1,S_2 也是连续变化的. 因此 S_1-S_2 也是连续变化的.

当 θ 连续地变化到 $\theta+\pi$ 时，直线 $l(\theta)$ 连续地变化到直线 $l(\theta+\pi)$. $l(\theta)$ 与 $l(\theta+\pi)$ 是同一条直线，但方向相反. 因此，直线 $l(\theta+\pi)$ 分图形 B 所得左侧部分正好是直线 $l(\theta)$ 分图形 B 所得右侧部分，即 $S_1'=S_2$. 同理，$S_2'=S_1$. 所以 $S_1'-S_2'=S_2-S_1=-(S_1-S_2)$.

由介值定理知，$\exists\theta_0\in[\theta,\theta+\pi]$，使得直线 $l(\theta_0)$ 分图形 B 所得左、右两侧的面积相等，即这条直线同时平分图形 A,B 的面积.

1.5　轴对称、中心对称及周期性的关系

定理 1-7　(1)　若函数 $f(x)$ 的图像同时关于直线 $x=a,x=b(a\neq b)$ 对称，则 $f(x)$ 是周期函数，且有一个周期是 $2(b-a)$.

(2)　若函数 $f(x)$ 的图像同时关于直线 $x=a$，及点 $(b,c)(a\neq b)$ 对称，则 $f(x)$ 是周期函数，且有一个周期是 $4(b-a)$.

(3)　若函数 $f(x)$ 的图像同时关于点 $(a,c),(b,c)(a\neq b)$ 对称，则 $f(x)$ 是周期函数，且有一个周期是 $2(b-a)$.

证明　(1) 可得 $f(x)=f(2a-x),f(x)=f(2b-x)$，所以 $f(2a-x)=f(2b-x)$，即 $f(x+2(b-a))=f(x)$. 又因为 $a\neq b$，所以证明成立.

(2)　可得 $f(x)=f(2a-x),f(x)+f(2b-x)=2c$，所以 $f(2a-x)+f(2b-x)=2c$，即 $f(x)+f(x+2(b-a))=2c$.

由此还得 $f(x+2(b-a))+f(x+4(b-a))=2c$，所以 $f(x+4(b-a))=f(x)$. 又因为 $a\neq b$，所以证明成立.