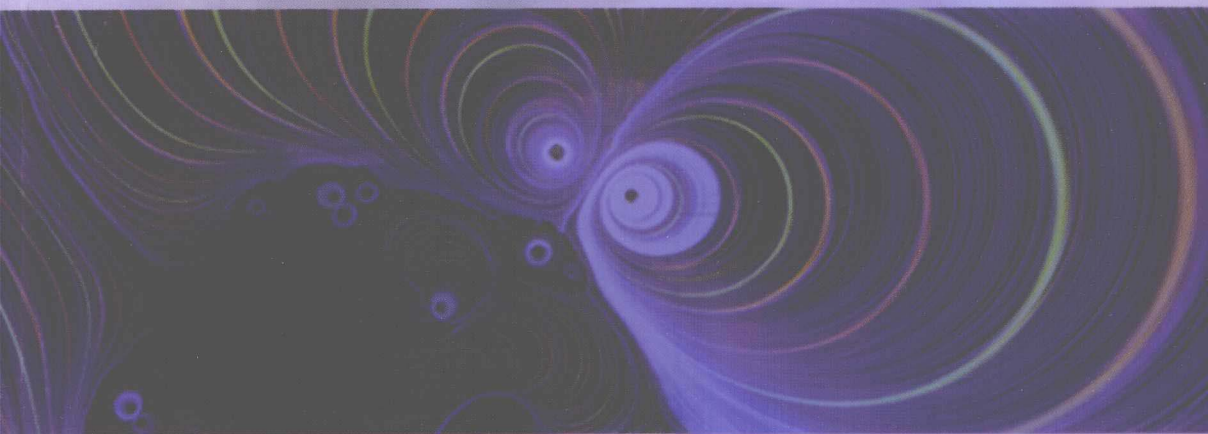


数学分析

习题演练 (第三册)

(第二版)

周民强 编著



科学出版社

数学分析习题演练

(第三册)

(第二版)

周民强 编著

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书是基于作者多年教学实践的积累,整理编写而成的.全书共分三册,本书为第三册,包括8章:多元函数的极限与连续性、多元函数微分学、隐函数存在定理、一般极值与条件极值、含参变量的积分、重积分、曲线积分与曲面积分、各种积分之间的联系.本书选择的习题起点适当提高,侧重理论性和典范性.书中还添加了若干注记,便于读者厘清某些误解.

本书适合理工科院校及师范院校数学专业的本科生、研究生及教师参考使用.

图书在版编目(CIP)数据

数学分析习题演练.第3册/周民强编著.—2版.—北京:科学出版社,2012

ISBN 978-7-03-033372-8

I. 数… II. 周… III. 数学分析-高等学校-习题集 IV. O17-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第007197号

责任编辑:林 鹏 刘嘉善 姚莉丽 / 责任校对:宋玲玲

责任印制:张克忠 / 封面设计:陈 敬

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

北京中新伟业印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009年5月第 一 版 开本:720×1000 1/16

2012年2月第 二 版 印张:27

2012年2月第二次印刷 字数:540 000

定价:49.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前 言

学数学必须演算习题,这是大家的共识.通过演算我们不仅能熟悉理论的意义和应用,掌握解题的方法和操作过程,同时还可以洞察理论本身的适应性,预测其扩展前景.因此,关于数学各分支,都编写出了众多习题集或学习参考书,尤以微积分(或数学分析)类为最.作者在多年的教学实践中,积累了相当数量的练习题,且在培训学生过程中收到较好的效果.把它们整理并编写出版,供读者参考,以开阔视野和启示思路.

本习题集以上海科学技术出版社(2002年)出版的《数学分析》教材为蓝本.因此,总的说来,选题的起点适当提高,侧重理论性和典范性,并力求多角度展示,减少了它在几何、力学方面的应用练习.解答也从简,不再在文字上多下功夫.书中还添加了若干注记,便于读者加深认识和厘清某些误解.带“*”的习题可酌情阅读.

第二版与第一版相比,补充了若干内容,也修正了若干笔误.这必将会提高读者的阅读兴趣,增添参考价值.

全书共分三册,本书是第三册,包括8章:多元函数的极限与连续性、多元函数微分学、隐函数存在定理、一般极值与条件极值、含参变量的积分、重积分、曲线积分与曲面积分、各种积分之间的联系.

由于作者的水平和视野所限,书中难免存在错误和不足,欢迎读者给予批评指正.

作 者

2012 年

技重于练,

巧重于悟.

目 录

前言

第 1 章 多元函数的极限与连续性	1
1.1 集合与点集论	1
1.2 多元函数及其极限	3
1.3 多元函数的连续性	13
第 2 章 多元函数微分学	23
2.1 一阶偏导数与(全)微分(主要以二、三元函数为例)	23
2.2 高阶偏导数与高阶(全)微分(以二元函数为例)	49
2.3 隐函数的求导法(以二、三元函数为例)	68
2.4 三维空间几何形态的描述	77
2.5 方向导数、梯度(以二、三元函数为例)	88
2.6 Taylor 公式(以二元函数为例)	98
第 3 章 隐函数存在定理	111
3.1 隐函数存在定理	111
3.2 逆变换存在定理	118
3.3 函数相关性(以二元函数为例)	123
第 4 章 一般极值与条件极值	127
4.1 一般极值问题	127
4.2 条件极值问题	148
第 5 章 含参变量的积分	171
5.1 含参变量的定积分	171
5.2 含参变量的反常积分	183
5.3 Euler 积分——B 函数与 Γ 函数	212
第 6 章 重积分	224
6.1 重积分与累次积分	224
6.2 重积分的变量替换	247
* 6.3 n 重积分	274

6.4 反常重积分(以二重积分为例)	281
第7章 曲线积分与曲面积分	303
7.1 第一型曲线积分	303
7.2 第二型曲线积分	308
7.3 曲面面积	320
7.4 第一型曲面积分	329
7.5 第二型曲面积分	339
第8章 各种积分之间的联系	347
8.1 Green 公式	347
8.2 Gauss 公式	363
8.3 Stokes 公式	378
8.4 曲线积分与路径无关性	384
补充练习及解答	395

第 1 章 多元函数的极限与连续性

1.1 集合与点集论

实数全体记为 $\mathbf{R}^1$, 称为一维欧氏空间, 即带有实数坐标的点组成的一条直线; 由 n 个实数组成的有序组 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 之全体称为 n 维欧氏空间, 记为 $\mathbf{R}^n$. 该有序组也简记为 $\mathbf{X}$, 也称为 $\mathbf{R}^n$ 中的点或向量, 又称 $x_k (k=1, 2, \dots, n)$ 为点 $\mathbf{X}$ 的第 k 个坐标. 由点形成的集合称为点集. 特别地, 全体有理数记为 $\mathbf{Q}$, 全体正整数记为 $\mathbf{N}$.

定义 1.1.1 设 $\mathbf{X}=(x_1, x_2, \dots, x_n), \mathbf{Y}=(y_1, y_2, \dots, y_n)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的两个点, 令 $\alpha\mathbf{X}=(\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n), \mathbf{X}+\mathbf{Y}=(x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_n+y_n)$, 且称

$$\|\mathbf{X}-\mathbf{Y}\| = \sqrt{(y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2 + \dots + (y_n-x_n)^2} \quad (\text{也记为 } d(\mathbf{X}, \mathbf{Y}))$$

为点 $\mathbf{X}$ 到点 $\mathbf{Y}$ 的距离. $\|\mathbf{X}\|$ 表示点 $\mathbf{X}$ 到原点的距离, 称为向量 $\mathbf{X}$ 的长度, 又令

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} = \langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k,$$

称为向量 $\mathbf{X}$ 与 $\mathbf{Y}$ 的内积;

设 $E_1, E_2 \subset \mathbf{R}^n$, 则定义 $E_1 \times E_2 = \{(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) : \mathbf{X} \in E_1, \mathbf{Y} \in E_2\}$ (集合的乘积).

定义 1.1.2 设 $E \subset \mathbf{R}^n, \mathbf{X}_0 \in \mathbf{R}^n$, 令

$$d(\mathbf{X}_0, E) = \inf\{d(\mathbf{X}_0, \mathbf{X}) : \mathbf{X} \in E\},$$

称为点 $\mathbf{X}_0$ 到点集 E 的距离. 称 $\text{diam}\{E\} = \sup\{\|\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2\| : \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in E\}$ 为 E 的直径.

定义 1.1.3 设 $\mathbf{X}_0 \in \mathbf{R}^n, \delta > 0$, 令 $U_\delta(\mathbf{X}_0) = U(\mathbf{X}_0, \delta) = \{\mathbf{X} \in \mathbf{R}^n : \|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0\| < \delta\}$, 称为以 $\mathbf{X}_0$ 为中心 δ 为半径的开球, 也称为点 $\mathbf{X}_0$ 的 δ 邻域. 在不计及半径 δ 时, 简称为 $\mathbf{X}_0$ 的邻域, 记为 $U(\mathbf{X}_0)$.

定义 1.1.4 设 $E \subset \mathbf{R}^n$. 若存在 $M > 0$, 使得 $(\mathbf{X}=(x_1, x_2, \dots, x_n)) \|\mathbf{X}\| \leq M (\mathbf{X} \in E)$ 或 $E \subset U(0, M)$, 则称 E 为有界集.

定义 1.1.5 设 $\mathbf{X}_k = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \in \mathbf{R}^n (k \in \mathbf{N})$ 是一个点列, $\mathbf{X}_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \in \mathbf{R}^n$. 若对任给 $\varepsilon > 0$, 存在 N , 使得 $\|\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_0\| < \varepsilon$ 或 $\mathbf{X}_k \in U(\mathbf{X}_0, \varepsilon) (k \geq N)$, 则称 $\{\mathbf{X}_k\}$ 为收敛于 $\mathbf{X}_0$ 的收敛(点)列, 也称当 $k \rightarrow \infty$ 时, $\{\mathbf{X}_k\}$ 有极限 $\mathbf{X}_0$, 记为

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{X}_k = \mathbf{X}_0 \quad \text{或} \quad \mathbf{X}_k \rightarrow \mathbf{X}_0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

由等式 $\|\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_0\| = \sqrt{(x_1^{(k)} - x_1^{(0)})^2 + \dots + (x_n^{(k)} - x_n^{(0)})^2}$ 易知, $\{\mathbf{X}_k\}$ 收敛于 $\mathbf{X}_0$ 当且仅当有

$$x_1^{(k)} \rightarrow x_1^{(0)}, x_2^{(k)} \rightarrow x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(k)} \rightarrow x_n^{(0)} \quad (k \rightarrow \infty).$$

定义 1.1.6 设 $E \subset \mathbf{R}^n, \mathbf{X}_0 \in \mathbf{R}^n$. 若有 E 中互异点列 $\{\mathbf{X}_k\}$, 使得 $\mathbf{X}_k \rightarrow \mathbf{X}_0 (k \rightarrow \infty)$, 则称 $\mathbf{X}_0$ 为 E 的极限点(聚点); E 的极限点全体记为 E' , 称为 E 的导集; 若 $E' \subset E$, 则称 E 为闭集; 记 $\bar{E} = E \cup E'$, 称为 E 的闭包, $\bar{E}$ 是闭集; 若 $\bar{E} = \mathbf{R}^n$, 则称 E 为 $\mathbf{R}^n$ 中的稠密集, E 在 $\mathbf{R}^n$ 中稠密.

定义 1.1.7 设 $E \subset \mathbf{R}^n$. 若 $\mathbf{X}_0 \in E$ 但 $\mathbf{X}_0 \notin E'$, 则称 $\mathbf{X}_0$ 为 E 的孤立点; 若 $\mathbf{X}_0 \in \bar{E}$ 但 $\mathbf{X}_0$ 不是

E 的内点, 则称 X_0 为 E 的边界点. E 的边界点全体记为 ∂E .

定义 1.1.8 设 $E \subset \mathbf{R}^n$, $X_0 \in E$. 若存在 $\delta > 0$, 使得 $U(X_0, \delta) \subset E$, 则称 X_0 为 E 的内点. 若 E 中每一点均为 E 的内点, 则称 E 为开集; 点 X_0 的邻域 $U(X_0)$ 是开集. 开集与闭集互补.

定义 1.1.9 设 $D \subset \mathbf{R}^n$. 若对 D 中任意两点, 均可用连续曲(折)线联结起来, 此曲线上的点均属于 D , 则称 D 为(道路)连通集; 若 D 是连通集又是开集, 则称 D 是区域; 若 D 是区域, 则称 $\bar{D}$ 为闭区域.

定义 1.1.10 设 $E \subset \mathbf{R}^n$. 若在 E 中任意两点 X_1, X_2 之间, 均可用属于 E 的直线段 $\overline{X_1 X_2}$ 联结起来, 则称 E 为凸集.

定理 1.1.1 若 $\{X_k\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的收敛列, 则 $\{X_k\}$ 是有界点列; 有界点列必存在收敛子列.

定理 1.1.2 (收敛点列的充分必要条件) $\mathbf{R}^n$ 中点列 $\{X_k\}$ 是收敛列的充分必要条件是: 对任给 $\epsilon > 0$, 存在 N , 使得 $\|X_i - X_j\| < \epsilon (i, j \geq N)$ (即 Cauchy 列).

定理 1.1.3 设 $\{F_k\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的非空闭集列. 若有

(i) $F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_k \supset \cdots$, (ii) $\text{diam}\{F_k\} \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty)$,

则存在唯一的 $X_0 \in F_k (k=1, 2, \cdots)$.

定理 1.1.4 (有限覆盖) 设 $F \subset \mathbf{R}^n$ 是非空有界闭集(也称紧集), $\mathcal{A} = \{G_\alpha\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中一族开集. 若对任意的 $X \in F$, 均存在 $G_\alpha \in \mathcal{A}$, 使得 $X \in G_\alpha$ (此时称 $\mathcal{A}$ 是 E 的开覆盖), 则 $\mathcal{A}$ 中存在有限个开集 $G_{\alpha_1}, G_{\alpha_2}, \cdots, G_{\alpha_m}; E \subset \bigcup_{i=1}^m G_{\alpha_i}$.

例 1.1.1 试证明下列命题:

(1) 设 $E \subset \mathbf{R}^2$, 则 ∂E 是闭集.

(2) 设 $f \in C(\mathbf{R}^1)$, 则 $E = \{(x, f(x)): x \in \mathbf{R}^1\}$ 是闭集.

(3) 设 $F \subset \mathbf{R}^n$ 是非空闭集, $G \subset \mathbf{R}^n$ 是有界开集, $F \subset G$, 则存在开集 D , 使得 $F \subset D \subset \bar{D} \subset G$.

证明 (1) 只需指出 $(\partial E)^c$ 是开集. 为此, 设 $X \in (\partial E)^c$.

(i) 若 X 是 E 的内点, 则存在 $U(X, \delta) \subset E$. 易知 $U(X, \delta)$ 是开集, 故 $U(X, \delta) \cap \partial E = \emptyset$, 即 X 是 $(\partial E)^c$ 之内点.

(ii) 若 $X \notin E$, 则由 $X \in (\partial E)^c$ 可知, 存在 $U(X, \delta) \cap E = \emptyset$. 这说明 $U(X, \delta) \subset E^c$. 由于 $U(X, \delta)$ 中点均非 E 之边界点, 故 $U(X, \delta) \in (\partial E)^c$.

(2) 设 $(x_0, y_0) \in E'$, 则存在 $(x_n, y_n) \in E (n \in \mathbf{N}, y_n = f(x_n))$, 使得 $(x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0) (n \rightarrow \infty)$. 由此知 $x_n \rightarrow x_0 (n \rightarrow \infty)$, 注意到 f 的连续性, 故得 $f(x_n) = y_n \rightarrow y_0$. 即 $y_0 = f(x_0)$, 这说明 $(x_0, y_0) \in E'$.

(3) 对 $X \in F$, 注意到 ∂G 是闭集且 $X_0 \notin \partial G$, 故知 $d_X = d(X, \partial G) > 0$. 由于 $X \in G$, 故存在邻域 $U_X = U(X, d_X/2) \subset G$. 从而可得 F 的一个开覆盖 $\{U_X\}_{X \in F}$, 并可选出有限覆盖 $U_{X_i} (i=1, 2, \cdots, m); F \subset \bigcup_{i=1}^m U_{X_i} \triangleq D$ (开集). 因此,

$$\bar{D} = \bigcup_{i=1}^m \bar{D}_{X_i} \subset \bigcup_{i=1}^m U(X_i, d_{X_i}) \subset G.$$

例 1.1.2 试证明下列命题:

(1) 设 $E \subset \mathbf{R}^n$ 是非空点集, 则 $d(\mathbf{X}, E)$ 作为 $\mathbf{X} \in \mathbf{R}^n$ 的函数是一致连续的.

(2) 设 $F \subset \mathbf{R}^n$ 是非空闭集, $\mathbf{X}_0 \in \mathbf{R}^n$, 则存在 $\mathbf{Y}_0 \in F$, 使得 $\|\mathbf{X}_0 - \mathbf{Y}_0\| = d(\mathbf{X}_0, F)$.

(3) 设 $E \subset \mathbf{R}^2$ 是凸集, 则 $\bar{E}$ 是凸集.

证明 (3) 设 $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in \bar{E}$, 且不妨认定 $\mathbf{X}_i \in \partial E \setminus E (i=1, 2)$. 现在假定过点 $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ 之直线段 $\overline{\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2}$ 中有点 $\mathbf{X}_0: \mathbf{X}_0 \notin \bar{E}$, 则存在邻域 $U(\mathbf{X}_0, \delta): U(\mathbf{X}_0, \delta) \cap \bar{E} = \emptyset$.

再作 $U_1 = U(\mathbf{X}_1, \delta/2), U_2 = U(\mathbf{X}_2, \delta/2)$, 以及此两圆之平行公切线 $\overline{P_1P_2}, \overline{Q_1Q_2}$, 由于 $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ 是 E 的极限点, 故存在 $\mathbf{X}'_1 \in U_1 \cap E, \mathbf{X}'_2 \in U_2 \cap E$, 且 $\overline{\mathbf{X}'_1\mathbf{X}'_2} \cap U(\mathbf{X}_0, \delta) \neq \emptyset$. 但根据 E 的凸性, 必有 $\overline{\mathbf{X}'_1\mathbf{X}'_2} \subset E$, 导致矛盾.

1.2 多元函数及其极限

设 $E, \bar{E}$ 是两个集合, f 是一种对应规则: 对 $X \in E$, 可由 f 唯一确定 $Y \in \bar{E}$ (称为对应着一个元 Y). 这种从 E 到 $\bar{E}$ 的对应规则 f 称为映射或变换, 记作

$$f: E \rightarrow \bar{E}, \quad Y = f(X) \in \bar{E} \quad (X \in E).$$

此时, 称 E 为 f 的定义域; $\bar{E}$ 称为 f 的取值域, 而点集 $f(E) = \{Y: Y = f(X), X \in E\}$ 称为 f 的值域.

定义 1.2.1 设 $f: E \rightarrow \bar{E}$. 若对 $X_1 \in E, X_2 \in E$, 总有 $f(X_1) \neq f(X_2)$, 则称 f 为单(映)射; 若 $T(E) = \bar{E}$, 则称 f 为满(映)射; 若 f 是单射且是满射, 则称 f 为双射 (E 与 $\bar{E}$ 的元素之间存在一一对应); 此时可定义逆映射 (仍记为) $f^{-1}: \bar{E} \rightarrow E$ 为 $Y \in \bar{E}, f^{-1}(Y) = X \in E$ (其中 $f(X) = Y$). 易知 $f^{-1}[f(X)] = X (X \in E)$.

定义 1.2.2 设 $\bar{E} \subset \mathbf{R}^n$, 称 $f: \bar{E} \rightarrow \mathbf{R}^m$ 为多元向量函数. 若 $m=1$, 则 f 是 $\mathbf{R}^n$ 上的多元(实值)函数. 如二元函数 $z = f(x, y)$, 其中 $(x, y) \in \mathbf{R}^2, z \in \mathbf{R}^1$.

向量函数可用多元函数组成向量表示, 例如 $f: \bar{E} \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$, 则

$$f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y)), \quad f_1: \bar{E} \rightarrow \mathbf{R}^1, \quad f_2: \bar{E} \rightarrow \mathbf{R}^1.$$

n 元函数 $z = f(\mathbf{X}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 可在 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中用一个点集 $\{(x_1, x_2, \dots, x_n, z): (x_1, \dots, x_n) \in \bar{E}, z \in \mathbf{R}^1\}$ 表示. 二元函数的几何意义就是 $\mathbf{R}^3$ 中通常意义下的曲面.

二元函数除用曲面表示外, 也可用平面上一系列等位线来表示. 称平面点集

$$\{(x, y): f(x, y) = C\}$$

为曲面 $z = f(x, y)$ 的等位线或等高线, 它是垂直于 z 轴的平面 $z = C$ 与曲面 $z = f(x, y)$ 的交线在 xOy 平面上的投影 (图 1.1).

三元函数 $u = f(x, y, z)$ 是四维空间中的点集, 用等位面的方法可以给出它在三维空间中的几何表示.

定义 1.2.3 设 $f(x, y)$ 是定义在凸区域 $D \subset \mathbf{R}^2$ 上的函数. 若对 D 内任意两点 $\mathbf{X}_1 = (x_1, y_1), \mathbf{X}_2 = (x_2, y_2)$, 均有

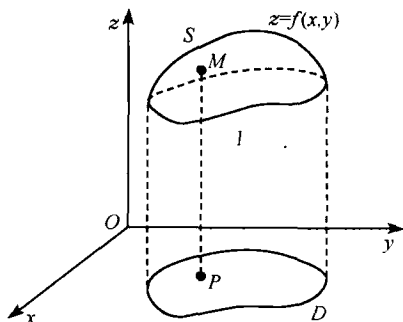


图 1.1

$$f[tx_1 + (1-t)x_2, ty_1 + (1-t)y_2] \leq tf(x_1, y_1) + (1-t)f(x_2, y_2),$$

则称 $f(x, y)$ 是凸域 D 上的凸函数.

定义 1.2.4 设在 $\mathbf{R}^n$ 上的函数满足: 对任意的 $t > 0$, 均有

$$f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = t^k f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

则称 f 是 k 次齐次函数.

定义 1.2.5 (重极限) 设 $E \subset \mathbf{R}^n, f: E \rightarrow \mathbf{R}^m, X_0 \in E', Y_0 \in \mathbf{R}^m$. 对任给 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得

$$\|f(X) - Y_0\| < \epsilon \quad (0 < \|X - X_0\| < \delta),$$

则称 $f(X)$ 在点 X 趋于 X_0 时有极限 Y_0 , 记为

$$\lim_{\substack{X \rightarrow X_0 \\ X \in E}} f(X) = Y_0 \quad (X_0 \text{ 是 } E \text{ 之内点时, 记为 } \lim_{X \rightarrow X_0} f(X) = Y_0).$$

定理 1.2.1 设 $f: E \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$, 则 $\lim_{\substack{X \rightarrow X_0 \\ X \in E}} f(X) = Y_0$ 当且仅当, 对任意点列 $\{X_k\} \subset E, X_k \rightarrow X_0$

($k \rightarrow \infty$), 必有 $\lim_{k \rightarrow \infty} f(X_k) = Y_0$ ($f(X_k) \rightarrow Y_0$ ($k \rightarrow \infty$)).

类似一元函数, 多元函数仍具有极限唯一性、保序性、局部有界性, 四则运算规则仍成立.

定义 1.2.6 设 $f(x, y)$ 在 $0 < |x - x_0| < a, 0 < |y - y_0| < a$ 上定义. 若对任意固定的值 y ($0 < |y - y_0| < a$), 当 $x \rightarrow x_0$ 时, 函数 $f(x, y)$ 的极限存在, 记为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = \varphi(y)$; 又当 $y \rightarrow y_0$ 时, 函数 $\varphi(y)$ 的极限存在, 记 $\lim_{y \rightarrow y_0} \varphi(y) = A$. 则称 A 是函数 $f(x, y)$ 先对 x 后对 y 的累次极限, 记作 $\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = A$.

同样可定义先对 y 后对 x 的累次极限: $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$.

从上述定义可以悟出, 我们还能引进所谓路径极限的概念. 以 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的情形为例. 设 $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ 是过点 (x_0, y_0) 的任一条连续曲线 ($x_0 = \varphi(t_0), y_0 = \psi(t_0)$), 若有

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(\varphi(t), \psi(t)) = A,$$

则称 $f(x, y)$ 在动点 (x, y) 沿路径 (φ, ψ) 趋于 (x_0, y_0) 时有极限 A .

注 1 显然若重极限 $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = A$ 存在, 则 $f(x, y)$ 的任一路径极限也存在且等于 A . 特别在路径为 $x = x, y = kx$ (k 是常数) 时, 称该极限为方向 (或向径) 极限. 由此可知, 如果 f 存在不同的路径极限, 那么其重极限一定不存在.

注 2 设 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 的邻域上有定义. 若对任一满足 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = y_0$ 的曲线 $y = g(x)$, 均有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, g(x)) = A$, 则未必存在 $\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = A$. 例如 $f(0, y) = 1, f(x, y) = 0 (x \neq 0)$.

定理 1.2.2 设 $f(x, y)$ 在 $0 < |x - x_0| < a, 0 < |y - y_0| < a$ 上定义, 且 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A$ (有
限或无限), 又对任意固定的 y ($0 < |y - y_0| < a$), 有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = \varphi(y)$, 则

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow y_0} \varphi(y) = A.$$

注 若定理中 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = \varphi(y)$ 存在改为 $\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = \psi(x)$ 存在, 则有 $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = A$.

上述定理说明, 若全面极限存在, 两个内层极限存在, 则两个累次极限一定存在且相等, 或两个累次极限可交换求极限顺序:

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y).$$

反之,若两个累次极限存在但不等,则全面极限一定不存在.

定义 1.2.7 设 $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^1, A \in \mathbf{R}^1$. 若对任给 $\epsilon > 0$, 存在 $M > 0$, 使得

$$|f(\mathbf{X}) - A| < \epsilon \quad (\|\mathbf{X}\| \geq M),$$

则称 $f(\mathbf{X})$ 在 $\mathbf{X}$ 趋于无穷时有极限 A , 记为 $\lim_{\mathbf{X} \rightarrow \infty} f(\mathbf{X}) = A$.

例 1.2.1 设 $f(x, y)$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上单变量连续的函数, 则 f 不是单射.

证明 反证法. 假定 f 是单射, 我们令 $\varphi(x) = f(x, 0) (x \in \mathbf{R}^1)$, 则 $\varphi \in C(\mathbf{R}^1)$. 又记 $\varphi(0) = a, \varphi(1) = b$, 则由单射可知 $a \neq b$. 不妨设 $a < b$, 注意到 φ 的连续性, 可得 $[\varphi(0), \varphi(1)] = [a, b]$. 特别地, 存在 $x_0 \in (0, 1)$, 使得 $\varphi(x_0) = (a+b)/2$.

现在令 $\psi(y) = f(x_0, y) (y \in \mathbf{R}^1)$, 则 $\psi \in C(\mathbf{R}^1)$, 且有

$$\psi(0) = f(x_0, 0) = \varphi(x_0) = (a+b)/2.$$

因此, $a < \psi(0) < b, a < \psi(y) < b (y \in U(0, \delta))$. 即 $a < f(x_0, y) < b (y \in U(0, \delta))$.

此外, 易知 $\{f(x, 0); 0 \leq x < 1\} \supset (a, b)$. 也就是说, 对某个 $y_0 \neq 0$ 与 x_1 , 有等式 $f(x_0, y_0) = f(x_1, 0)$, 这与单射矛盾.

例 1.2.2 设 D 是 $\mathbf{R}^2$ 中的凸区域, $f: D \rightarrow \mathbf{R}^1$ 是凸函数, 则对任意的 $\alpha \in \mathbf{R}^1$, 点集 $E = \{(x, y) \in D; f(x, y) \leq \alpha\}$ 是凸集.

证明 设 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 是 E 中任意两点, 则 $f(x_1, y_1) \leq \alpha, f(x_2, y_2) \leq \alpha$. 从而对 $0 < t < 1$, 我们有

$$\begin{aligned} f(tx_1 + (1-t)x_2, ty_1 + (1-t)y_2) &\leq tf(x_1, y_1) + (1-t)f(x_2, y_2) \\ &\leq t\alpha + (1-t)\alpha = \alpha. \end{aligned}$$

这说明 $(tx_1 + (1-t)x_2, ty_1 + (1-t)y_2) \in E$, 即 E 是凸集.

例 1.2.3 试论下列函数在指定点的重极限, 累次极限:

$$(1) f(x, y) = (x-y)/(x+y), \quad (x_0, y_0) = (0, 0).$$

$$(2) f(x, y) = x^2 y^2 / (x^2 y^2 + (x-y)^2), \quad (x_0, y_0) = (0, 0).$$

$$(3) f(x, y) = (x+y) \sin(1/x) \sin(1/y), \quad (x_0, y_0) = (0, 0).$$

解 (1) 累次极限存在:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1, \quad \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y}{y} = -1.$$

而对两点列 $(x'_n, y'_n) = (1/n, 1/n), (x''_n, y''_n) = (2/n, 1/n) (n \in \mathbf{N})$, 我们有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n, y'_n) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x''_n, y''_n) = 1/3.$$

这说明重极限不存在.

(2) 注意到 $\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = 0 (x \neq 0), \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 0 (y \neq 0)$, 故知两个累次极限均为 0. 但是因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(1/n, 1/n) = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} f(1/n, -1/n) = 0$, 所以重极限不存在.

(3) 注意到 $f(1/n\pi, y) = 0, f(2/(4n+1)\pi, y) \rightarrow y \sin \frac{1}{y} (n \rightarrow \infty)$, 故知累次极限不存在. 此外, 因为有 $0 \leq |f(x, y)| \leq |x| + |y|$, 所以 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0$.

例 1.2.4 解答下列问题:

(1) 试求 $f(x, y) = (x^2 + 4x - 4y)/(y^2 + 6y - 6x)$ 当点 (x, y) 沿曲线 $y^2 + x^2 y - x^2 = 0$ 趋于 $(0, 0)$ 时的路径极限.

(2) 试论 $f(x, y) = \begin{cases} 0, & |y| \leq x^2 \text{ 或 } y \neq 0, \\ 1, & |y| > x^2 \text{ 或 } y = 0 \end{cases}$ 的向径极限(包括累次极限).

(3) 试论 $f(x, y) = x^2 e^{-(x^2 - y)}$ 在动点 $x = t \cos \theta, y = t \sin \theta$ 以 $t \rightarrow +\infty$ 时的极限.

解 (1) 易知该路径曲线在原点的切线有两条: $y = \pm x$, 因此用变量替换 $y = tx$, 该曲线及其极限过程可表示为

$$x = (1 - t^2)/t, \quad y = 1 - t^2; \quad (x, y) \rightarrow (0, 0) \sim t \rightarrow \pm 1.$$

从而我们有

$$\begin{aligned} \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) &= \lim_{t \rightarrow \pm 1} \frac{(1 - t^2)^2/t^2 + 4(1 - t^2)/t - 4(1 - t^2)}{(1 - t^2)^2 + 6(1 - t^2) - 6(1 - t^2)/t} \\ &= \begin{cases} -3/2, & t \rightarrow +1, \\ -2/3, & t \rightarrow -1. \end{cases} \end{aligned}$$

(2) 易知各方向的方向极限为 0, 累次极限为

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0, \quad \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} 1 = 1.$$

(3) 令 $F(t, \theta) = f(t \cos \theta, t \sin \theta)$, 则

$$F(t, \theta) = t^2 \cos^2 \theta e^{-t^2 \cos^2 \theta + t \sin \theta} \quad (-\pi \leq \theta \leq \pi).$$

若 $\theta = \pm \pi/2$, 则 $F(t, \pm \pi/2) = 0$. 从而 $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t, \pm \pi/2) = 0$.

若 $\theta \neq \pm \pi/2$, 则 $\cos \theta \neq 0$, 且知 $\lim_{t \rightarrow +\infty} (t^2 \cos^2 \theta - t \sin \theta) = +\infty$. 从而依 L'Hospital 法则可得

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} F(t, \theta) &= \cos^2 \theta \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2}{e^{t^2 \cos^2 \theta - t \sin \theta}} = \cos^2 \theta \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2t}{(2t \cos^2 \theta - \sin \theta) e^{t^2 \cos^2 \theta - t \sin \theta}} \\ &= \cos^2 \theta \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{(\cos^2 \theta - \sin \theta / 2t) e^{t^2 \cos^2 \theta - t \sin \theta}} = 0 \quad (\lim_{n \rightarrow \infty} f(n, n^2) = +\infty). \end{aligned}$$

例 1.2.5 试论下列函数 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点处的重极限:

- (1) $\frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + (x - y)^2}$. (2) $\frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$. (3) $\frac{xy}{x + y}$. (4) $\frac{x^2 + y^4}{x^4 + y^2}$.
 (5) $\frac{x^3 + y^3}{x^2 + y}$. (6) $\frac{x^2 y^2}{x^3 + y^3}$. (7) $|y|^{|x|}$. (8) $|y| \ln |x|$.

解 (1) 考察向径极限, 即令 $y = kx$, 我们有

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, kx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + k^2)x^2}{[(1 + k^2) + (1 - k)^2]x^2} = \frac{1 + k^2}{1 + k^2 + (1 - k)^2}.$$

由于 k 可取不同值, 故重极限不存在.

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, kx^2) = k/(1+k^2)$, 重极限不存在.

(3) 注意到 $f(x, kx) = kx^2/(1+k)x \rightarrow 0 (x \rightarrow 0)$, 又有

$$f(x, -x+x^2) = (-x^2+x^3)/x^2 \rightarrow -1 \quad (x \rightarrow 0),$$

故重极限不存在.

(4) 注意到 $f(x, 0) = 1/x^2 \rightarrow +\infty (x \rightarrow 0)$, 又有

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + x^4)/(x^2 + x^4) = 1,$$

故重极限不存在.

(5) 注意到 $f(x, 0) = x \rightarrow 0 (x \rightarrow 0)$, 又有

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x^3 - x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} [x^3 + (x^3 - x^2)^3]/x^3 = \lim_{x \rightarrow 0} [1 + (x^2 - x)^3] = 1,$$

故重极限不存在.

(6) 注意到 $f(x, x) = x/2 \rightarrow 0 (x \rightarrow 0)$, 又有

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x^2 - x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - 2x^5 + x^6}{3x^4 - 3x^5 + x^6} = \frac{1}{3}.$$

故重极限不存在.

(7) 令 $|y| = e^{-\lambda/|x|} (\lambda > 0)$, 易知 $|y| \rightarrow 0 (|x| \rightarrow 0)$, 又有

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, e^{-\lambda/|x|}) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{|x| \cdot \ln e^{-\lambda/|x|}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{|x|(-\lambda/|x|)} = e^{-\lambda}.$$

故重极限不存在.

(8) 注意到 $f(x, x) \rightarrow 0 (x \rightarrow 0)$. 又有 $f(x, a/\ln|x|) = |a|$, 故重极限不存在.

例 1.2.6 试证明下列极限等式:

$$(1) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2|y|^{3/2}}{x^4+y^2} = 0, \quad (2) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} = 0.$$

$$(3) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

证明 (1) 只需注意

$$0 \leq \frac{x^2|y|^{3/2}}{x^4+y^2} = \frac{2x^2|y|}{x^4+y^2} \cdot \frac{|y|^{1/2}}{2} \leq \frac{|y|^{1/2}}{2} \rightarrow 0 \quad (y \rightarrow 0).$$

(2) 只需注意

$$\begin{aligned} \left| \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} \right| &= \left| (x^2+y^2) - xy \frac{2xy}{x^2+y^2} \right| \leq |x^2+y^2| + |xy| \left| \frac{2xy}{x^2+y^2} \right| \\ &\leq |x^2+y^2| + |xy| \leq \frac{3|x^2+y^2|}{2}. \quad (\text{也可采用下一题的解法}) \end{aligned}$$

(3) 令 $x = r \cos t, y = r \sin t$, 则

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| = \lim_{r \rightarrow 0} |r \sin t \cos t| \leq \lim_{r \rightarrow 0} r = 0.$$

例 1.2.7 试证明下列极限等式:

$$(1) I = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2} = 0, \quad (2) I = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow a}} \frac{\sin xy}{x} = a.$$

证明 (1) 令 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, 并注意不等式

$$\left| \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2} \right| \leq \left| \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \right| = |r(\cos^3 \theta + \sin^3 \theta)| \leq |2r|.$$

$$(2) \text{ 注意 } \frac{\sin xy}{x} = y \cdot \frac{\sin xy}{xy} \rightarrow a \cdot 1 \quad (x \rightarrow 0).$$

例 1.2.8 试论下列函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处的重极限:

$$(1) (x+y) \ln(x^2+y^2). \quad (2) \ln(1+xy)/(x+\tan y). \quad (3) (x^2+y^2)^{x^2 y^2}.$$

解 (1) 令 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, 我们有

$$|f(x, y)| = |r(\cos \theta + \sin \theta) \ln r^2| \leq |4r \ln r|.$$

故 $f(x, y) \rightarrow 0 ((x, y) \rightarrow (0, 0))$.

(2) 注意到 $f(x, 0) = 0$, 另一方面又有

$$f(x, -x) = \frac{\ln(1-x^2)}{x-\tan x} = \frac{-x^2}{x-\tan x} \cdot \ln(1-x^2)^{-1/x^2},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1-x^2)^{-1/x^2} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{x-\tan x} = +\infty.$$

故重极限不存在.

(3) 取对数再用参变量, 我们有

$$f(x, y) = e^{x^2 y^2 \ln(x^2+y^2)} \leq e^{(x^2+y^2)^2 \ln(x^2+y^2)},$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} e^{(x^2+y^2)^2 \ln(x^2+y^2)} = \lim_{r \rightarrow 0} e^{r^4 \ln r} = 1.$$

例 1.2.9 试求下列函数 $f(x, y)$ 的累次极限:

$$I_1 = \lim_{x \rightarrow a} \lim_{y \rightarrow b} f(x, y), \quad I_2 = \lim_{y \rightarrow b} \lim_{x \rightarrow a} f(x, y).$$

$$(1) \frac{x^2+y^2}{x^2+y^4} \left(\begin{matrix} a=\infty \\ b=\infty \end{matrix} \right). \quad (2) \frac{x^y}{1+x^y} \left(\begin{matrix} a=+\infty \\ b=0^+ \end{matrix} \right).$$

$$(3) \sin \frac{\pi x}{2x+y} \left(\begin{matrix} a=\infty \\ b=\infty \end{matrix} \right). \quad (4) \frac{1}{xy} \tan \frac{xy}{1+xy} \left(\begin{matrix} a=0 \\ b=\infty \end{matrix} \right).$$

$$(5) \log_r(x+y) \left(\begin{matrix} a=1 \\ b=0 \end{matrix} \right).$$

$$\text{解 } (1) I_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{x^2/y^2+1}{x^2/y^2+y^2} = 0; I_2 = \lim_{y \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+y^2/x^2}{1+y^4/x^2} = 1.$$

$$(2) \text{ 注意到 } \lim_{y \rightarrow 0^+} x^y = 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^y = +\infty (y > 0), \text{ 故 } I_1 = \frac{1}{2}, I_2 = 1.$$

$$(3) \text{ 易知 } \lim_{y \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi x}{2x+y} = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi x}{2x+y} = 1, \text{ 故 } I_1 = 0, I_2 = 1.$$

(4) 因为我们有 $\lim_{y \rightarrow \infty} f(x, y) = 0 (x \neq 0)$, 以及

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan[xy/(1+xy)]}{xy/(1+xy)} (1+xy)^{-1} = 1,$$

所以 $I_1 = 0, I_2 = 1$.

(5) 改写 $f(x, y) = \ln(x+y)/\ln x (x > 0, x+y > 0, x \neq 1)$, 易知

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(x+y)}{\ln x} = 1, \quad I_1 = 1.$$

此外, 因为我们有

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln(x+y)}{\ln x} &= \begin{cases} +\infty, & -1 < y < 0, \\ -\infty, & 0 < y < +\infty; \end{cases} \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(x+y)}{\ln x} &= \begin{cases} -\infty, & -1 < y < 0, \\ +\infty, & 0 < y < +\infty; \end{cases} \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x+y)}{\ln x} &= 1 \quad (y = 0), \end{aligned}$$

所以不存在 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x, y)$. 从而 I_2 不存在.

例 1.2.10 试求下列函数 $f(x, y)$ 的重极限 I :

- (1) $\frac{x+y}{x^2-xy+y^2} \left(\begin{smallmatrix} x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty \end{smallmatrix} \right).$ (2) $\frac{x^2+y^2}{x^4+y^4} \left(\begin{smallmatrix} x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty \end{smallmatrix} \right).$
 (3) $(x^2+y^2)e^{-(x+y)} \left(\begin{smallmatrix} x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty \end{smallmatrix} \right).$ (4) $\left(\frac{xy}{x^2+y^2} \right)^{x^2} \left(\begin{smallmatrix} x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty \end{smallmatrix} \right).$
 (5) $\left(1 + \frac{1}{x} \right)^{x^2/(x+y)} \left(\begin{smallmatrix} x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow a \end{smallmatrix} \right).$

解 (1) 注意到 $x^2 - xy + y^2 \geq xy$, 故可得

$$0 < \left| \frac{x+y}{x^2-xy+y^2} \right| \leq \left| \frac{x+y}{xy} \right| \leq \frac{1}{|y|} + \frac{1}{|x|}, \quad I = 0.$$

(2) 注意到 $0 < f(x, y) = \frac{x^2}{x^4+y^4} + \frac{y^2}{x^4+y^4} \leq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}$, 故 $I = 0$.

(3) 注意到 $f(x, y) = x^2/e^{x+y} + y^2/e^{x+y} < x^2/e^x + y^2/e^y$, 故 $I = 0$.

(4) 注意到 $0 < f(x, y) \leq (1/2)^{x^2}$, 故 $I = 0$.

(5) 取对数, 我们有 $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow a}} f(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow a}} e^{\ln(1+1/x)^{x^2/(1+y/x)}} = e$.

例 1.2.11 试论下列函数 $f(x, y)$ 在指定点的极限状况:

- (1) $e^{x/(x^2+y^2)}, (0, 0).$ (2) $e^{x^2-y^2} \cdot \sin(2xy), (-\infty, +\infty).$

解 (1) 因为 $f(x, y) = e^{\cos\theta/r}$, 所以当 $\cos\theta \leq 0$ 即 $\pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/2$ 时, 极限存在.

(2) 作变量替换 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, 我们有

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} f(x, y) = \lim_{r \rightarrow +\infty} e^{r^2 \cos 2\theta} \cdot \sin(r^2 \sin 2\theta).$$

由此可知, 当 $\cos 2\theta < 0$ 或 $\sin 2\theta = 0$ 即 $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4} < \theta < \frac{7\pi}{4}$, $\theta = 0$, $\theta = \pi$ 时极限存在.

例 1.2.12 试证明下列命题:

(1) 设 $f(x, y)$ 在区域 D 上定义, $(x_0, y_0) \in D$. 若

$$(i) \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = A, \quad (ii) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = \varphi(y) \quad (y \neq y_0),$$

则 $\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = A$.

(2) 设 $f(x, y)$ 在区域 D 上定义, $(x_0, y_0) \in D$. 若

$$(i) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = \psi(y) \quad (y \neq y_0),$$

(ii) 存在 $\eta > 0$, $I = \{x, 0 < |x - x_0| < \eta\}$, 使得

$$\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = \varphi(x) \quad (\text{关于 } x \in I \text{ 一致}),$$

则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$.

证明 (1) 只需指出存在极限 $\lim_{y \rightarrow y_0} \varphi(y)$, 这是因为由此必知其极限为 A . 事实上,

对任给 $\epsilon > 0$, 根据题设可知, 存在 $\delta > 0$, 使得

$$|f(x, y') - A| < \epsilon, \quad |f(x, y') - \varphi(y')| < \epsilon \quad (0 < |x - x_0|, |y' - y_0| < \delta).$$

由此推得 $|\varphi(y') - A| < 2\epsilon$ ($0 < |y' - y_0| < \delta$).

现在对上述 ϵ, δ , 在 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 我们有

$$|f(x, y') - f(x, y'')| < \epsilon \quad (0 < |y' - y_0|, |y'' - y_0| < \delta).$$

令 $x \rightarrow x_0$, 即得 $|\varphi(y') - \varphi(y'')| < \epsilon$. 这说明存在极限 $\lim_{y \rightarrow y_0} \varphi(y)$.

(2) 由(ii)知, 对任给 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得

$$|f(x, y) - \varphi(x)| < \epsilon/2 \quad (0 < |y - y_0| < \delta, x \in I).$$

从而当 $0 < |y' - y_0| < \delta$ 且 $x \in I$ 时, 就有 $|f(x, y) - f(x, y')| < \epsilon$. 令 $x \rightarrow x_0$, 由(i)

可得 $|\psi(y) - \psi(y')| \leq \epsilon$. 这说明存在 $\lim_{y \rightarrow y_0} \psi(y) \triangleq A$. 因此, 存在 $\delta' > 0$: $\delta' < \delta$, 当 $0 < |y - y_0| < \delta'$ 时, 导出

$$f(x, y) - \epsilon/2 < \varphi(x) < f(x, y) + \epsilon/2 \quad (x \in I),$$

以及 $A - \epsilon/2 < \psi(y) < A + \epsilon/2$. 综合上述结果, 我们有

$$A - \epsilon < \psi(y) - \epsilon/2 \leq \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) \leq \psi(y) + \epsilon/2 < A + \epsilon.$$

因为 ϵ 是任意给定的, 所以 $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = A$.

例 1.2.13 试证明下列命题:

(1) 设 $f(x)$ 在区间 $I \subset \mathbf{R}^1$ 上一致连续, J_1, J_2 是 $\mathbf{R}^1$ 中两个区间, $g(x, y)$ 定义

在 $J_1 \times J_2$ 上, $x_0 \in J_1$, 且 $g(x, y) \in I (0 < |x - x_0| < \delta, y \in J_2)$. 若有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x, y) = \varphi(y) \quad (\text{对 } y \in J_2 \text{ 一致}), \quad \varphi(y) \in I,$$

则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x, y)] = f(\varphi(y))$ (关于 $y \in J_2$ 一致).

(2) 设 $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y < y_0\}$, $f(x, y)$ 在 D 上关于变量 x 是连续的, 又在 D 内当 y 递增趋于 y_0 时, $f(x, y)$ 随 y 也递增且收敛于 $\varphi(x) (a \leq x \leq b)$, 则

$$\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = \varphi(x) \quad (\text{关于 } x \in [a, b] \text{ 一致}).$$

(3) 设定义在 $I = [a, b] \times [c, d]$ 上的 $f(x, y)$ 是单变量 x 的连续函数, 又 $y_0 \in [c, d]$, $\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = \varphi(x)$ (关于 $x \in [a, b]$ 一致), 则 $\varphi \in C([a, b])$.

证明 (1) 依题设知, 对任意的 $\{x_n\} \subset J_1 : x_n \rightarrow x_0 (n \rightarrow \infty)$, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n, y) = \varphi(y)$ (关于 $y \in J_2$ 一致). 从而由 f 的一致连续性就有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f[g(x_n, y)] = f[\varphi(y)] \quad (\text{关于 } y \in J_2 \text{ 一致}),$$

由此即得所证.

(2) 取 $y_n : 0 < y_n < y_0, y_n < y_{n+1} (n \in \mathbb{N})$, 且 $y_n \rightarrow y_0 (n \rightarrow \infty)$, 并记 $\varphi_n(x) = f(x, y_n) (a \leq x \leq b)$, 则依题设知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = \varphi(x)$. 从而对任给 $\epsilon > 0$, 以及任意的 $x \in [a, b]$, 有指标 N_x , 使得 $|\varphi_{N_x}(x) - \varphi(x)| < \epsilon$. 而由连续性又知, 存在 $\delta_x > 0$, 使得

$$|\varphi_{N_x}(t) - \varphi(t)| < \epsilon \quad (|t - x| < \delta_x).$$

因为 $\varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$, 所以有

$$|\varphi_n(t) - \varphi(t)| < \epsilon \quad (t \in (x - \delta_x, x + \delta_x), n \geq N_x).$$

这说明 $\{(x - \delta_x, x + \delta_x)\}$ 形成闭区间 $[a, b]$ 的一个开覆盖, 因此根据有限覆盖定理, 立即可知当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\varphi_n(x)$ 是关于 $x \in [a, b]$ 一致收敛于 $\varphi(x)$ 的. 证毕.

(3) 设 $x_0 \in [a, b]$. 易知对任给 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 以及 $y' : |y' - y_0| < \delta$, 使得

$$|f(x_0, y') - \varphi(x_0)| < \epsilon/3, \quad |f(x, y') - \varphi(x)| < \epsilon/3 \quad (x \in [a, b]).$$

根据 f 对单变量 x 的连续性, 还存在 $\delta' > 0$, 使得

$$|f(x, y') - f(x_0, y')| < \epsilon/3 \quad (|x - x_0| < \delta').$$

从而我们有不等式

$$\begin{aligned} |\varphi(x) - \varphi(x_0)| &\leq |\varphi(x) - f(x, y')| + |f(x, y') - f(x_0, y')| \\ &\quad + |f(x_0, y') - \varphi(x_0)| < \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 \\ &= \epsilon \quad (|x - x_0| < \delta'). \end{aligned}$$

例 1.2.14 试证明下列命题:

(1) 设定义在 $D = \{(x, y) : 0 < x^2 + y^2 < 1\}$ 上的 $f(x, y)$ 满足

(i) 对任意的 $\theta \in [0, 2\pi]$, 有 $\lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos \theta, r \sin \theta) = 0$.

(ii) 存在 $M > 0$, 使得对任意的 $(x_i, y_i) \in D (i = 1, 2)$, 有