



文登教育集团课堂用书
聚骄公司全心专业设计



FOCUS
聚焦图书

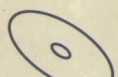
传承辉煌的历史 **【2010版】** 开启成功的未来

考研数学 复习指南 (理工类)

陈文灯 黄先开 编著

物超所值

内
含



DVD

陈文灯教授精妙复习方法指导视频

本书 **50** 小时的重难点视频讲解

本书全部习题答案详解手册+09年最新真题

世界图书出版公司

2250404



文登教育集团课堂用书
聚骄公司全心专业设计



013-44
74/-15

传承辉煌的历史 **【2010版】** 开启成功的未来

考研数学 复习指南

陈文灯 黄先开 编著

(理工类)



SEU 2250404

内
含



陈文灯教授精妙复习方法指导视频

本书**50**小时的重难点视频讲解

本书全部习题答案详解手册+09年最新真题

物超所值

世界图书出版公司

2007



中国出版集团世界图书出版公司

北京市东城区东直门内大街137号



图书在版编目(CIP)数据

数学复习指南. 理工类 / 陈文灯, 黄先开编著. —15版. —北京: 世界图书出版公司北京公司, 2002. 3

ISBN 978-7-5062-5211-2

I. 数... II. ①陈... ②黄... III. 高等数学-研究生-入学考试-解题 IV. 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 014886 号

数学复习指南(理工类)

(2010 版)

主 编: 陈文灯 黄先开

责任编辑: 世 华

装帧设计: 余曙敏

出 版: 世界图书出版公司北京公司

发 行: 世界图书出版公司北京公司

(北京朝内大街 137 号 邮编 100010)

销 售: 各地新华书店

印 刷: 北京忠信诚印刷厂

开 本: 787×1092 毫米 1/16

印 张: 38.75

字 数: 775 千字

版 次: 2009 年 1 月第 15 版 2009 年 1 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5062-5211-2/O · 332

定价: 69.80 元

服务热线: 010-88861708

前言

数学统考从 1987 年至今经历了 22 个年头。其间“数学考试大纲”虽然变化不大，但每年的试题均有所创新，不过仔细分析还是万变不离其宗。只要把本书归纳总结的题型、方法和技巧掌握住，研读我们精心设置的典型例题，即可达到触类旁通、融会贯通的境界。

我们要提醒读者的是，数学想要考高分，一定要了解考研数学究竟要考什么？综观一二十年试题可知，主要考查如下四方面：

- (1) 基础（基本概念、基本理论、基本方法）；
- (2) 解综合题的能力；
- (3) 分析问题和解决问题的能力，即解应用题的能力；
- (4) 解题的熟练程度（通过大题量、大计算量进行考核）。

真正了解了要考查的东西，复习时才能有的放矢。关于数学基础、数学题型与考试目标之间的逻辑关系，我写了四句话，供大家参考、体会：**数学基础树的根，技巧演练靠题型；勤学苦练强磨砺，功到高分自然成。**

本书特点：

(1) 对大纲要求的重要概念、公式、定理进行剖析，增强读者对这些内容的理解和记忆，避免犯概念性错误、错用公式和定理的错误。

(2) 归纳、总结了二十多个思维定式，无疑这对读者解题会有所帮助，但我们的目的是引导读者去归纳总结，养成习惯。这样应试的时候就能很快找到解题突破口。

(3) 用“举题型讲方法”的格式代替传统的“讲方法套题型”的做法，使读者应试时，思路畅通、有的放矢，许多书的跟进也说明这种做法的确很有效。

(4) 广泛采用表格法，使读者便于对照、比较，对要点一目了然。

(5) 介绍许多新的快速解题方法和技巧。例如，中值定理证明中的辅助函数的做法、不定积分中的凑微分法、不等式证明尤其是定积分不等式的证明方法等，都是我们教学研究的成果，对读者应试能起到“事半功倍”的效果。

(6) 创新设计出很多好的例题，以期提高读者识别题型变异的能力。

历经十四载的再版和修订，本书已成为广大考研读者的良师诤友，同时也有很多教师同行用该书做教学参考。为了精益求精，恳请朋友们拨冗指正。

陈文灯

目

录

篇要 高数解题的四种思维定势..... 1

第一篇 高等数学

第一章 函数·极限·连续..... 7

§ 1.1 函数..... 7

一、函数的定义..... 7

二、函数的定义域的求法..... 8

三、函数的基本性质..... 9

四、分段函数..... 13

五、初等函数..... 14

§ 1.2 函数的极限及其连续性..... 17

一、概念..... 17

二、重要定理与公式..... 20

§ 1.3 极限的求法..... 27

一、未定式的定值法..... 27

二、类未定式..... 30

三、数列的极限..... 32

四、极限式中常数的确定(重点)..... 36

五、杂例..... 39

习题一..... 43

第二章 导数与微分..... 46

§ 2.1 定义·定理·公式..... 46

一、导数与微分的定义..... 46

二、定理..... 48

三、导数与微分的运算法则..... 48

四、基本公式..... 49

五、弧微分..... 49

§ 2.2 各类函数导数的求法..... 50

一、复合函数微分法..... 50

二、参数方程微分法..... 51

三、隐函数微分法..... 52

四、幂指函数微分法..... 53

五、函数表达式为若干因子连乘积、乘方、开方或商形式的微分法..... 54

六、分段函数微分法..... 54

§ 2.3 高阶导数..... 55

一、定义与基本公式..... 55

二、高阶导数的求法..... 56

习题二..... 59

第三章 不定积分..... 63

§ 3.1 不定积分的概念与性质..... 63

一、不定积分的概念..... 63

二、基本性质..... 63

三、基本公式..... 64

§ 3.2 基本积分法..... 65

一、第一换元积分法(也称凑微分法)..... 65

二、第二换元积分法..... 69

三、分部积分法..... 73

§ 3.3 各类函数积分的技巧及分析..... 78

一、有理函数的积分..... 78

二、简单无理函数的积分..... 79

三、三角有理式的积分..... 81

四、含有反三角函数的不定积分..... 84

五、抽象函数的不定积分..... 85

六、分段函数的不定积分..... 86

习题三..... 87

第四章 定积分及反常积分..... 90

§ 4.1 定积分性质及有关定理与公式..... 90

一、基本性质..... 90

二、定理与公式..... 93

§ 4.2 定积分的计算法..... 96

一、牛顿—莱布尼兹公式..... 96

二、定积分的换元积分法..... 97

三、定积分的分部积分法..... 99

§ 4.3 特殊形式的定积分计算..... 100

一、分段函数的积分..... 100

二、被积函数带有绝对值符号的积分..... 102

三、被积函数中含有“变限积分”的积分..... 103

四、对称区间上的积分..... 105

五、被积函数的分母为两项,而分子为其中一项的积分..... 106

六、由三角有理式与其它初等函数通过四则或复合而成的函数的积分..... 107

七、杂例..... 108

§ 4.4 定积分有关命题证明的技巧..... 110

一、定积分等式的证明	110
二、定积分不等式的证明	118
习题四(1)	123
§ 4.5 反常积分	125
一、基本概念	125
二、题型归纳及思路提示	126
习题四(2)	128
第五章 中值定理的证明技巧	129
§ 5.1 连续函数在闭区间上的性质	129
一、基本定理	129
二、有关闭区间上连续函数的命题的证法	129
习题五(1)	131
§ 5.2 微分中值定理及泰勒公式	132
一、基本定理	132
二、泰勒公式	133
§ 5.3 证题技巧分析	136
一、欲证结论:至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f^{(n)}(\xi) = 0$ 的命题证法	136
二、欲证结论:至少 $\exists$ 一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f^{(n)}(\xi) = k (k \neq 0)$ 及其代数式的证法	138
三、欲证结论:在 (a, b) 内至少 $\exists \xi, \eta$, $\xi \neq \eta$ 满足某种关系式的命题的证法	143
习题五(2)	144
第六章 常微分方程	145
§ 6.1 基本概念	145
一、微分方程	145
二、微分方程的阶	145
三、微分方程的解	145
§ 6.2 一阶微分方程	146
一、各类一阶方程解法一览表	146
二、解题技巧及分析	147
§ 6.3 可降阶的高阶方程	155
一、可降阶的高阶方程解法一览表	155
二、解题技巧及分析	155
§ 6.4 高阶线性微分方程	156
一、二阶线性微分方程解的结构	156
二、二阶常系数线性微分方程	158
三、 n 阶常系数线性方程	159
四、欧拉方程	164
§ 6.5 微分方程的应用	165
一、在几何中的应用	165
二、在力学中的应用	167
习题六	168

第七章 一元微积分的应用	171
§ 7.1 导数的应用	171
一、利用导数判别函数的单调增减性	171
二、利用导数研究函数的极值与最值	172
三、关于方程根的研究	178
四、函数作图	182
§ 7.2 定积分的应用	185
一、微元法及其应用	185
二、平面图形的面积	187
三、立体体积	189
四、平面曲线的弧长	190
五、旋转体的侧面积	190
六、变力作功、引力、液体的静压力	191
习题七	193
第八章* 无穷级数	196
§ 8.1 基本概念及其性质	196
§ 8.2 数项级数敛散性	197
一、正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n (u_n \geq 0)$ 敛散性的判别法	197
二、交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n (u_n > 0)$ 的判别法	202
三、任意项级数	203
四、杂例	205
§ 8.3 幂级数	208
一、函数项级数的概念	208
二、幂级数	210
§ 8.4 无穷级数求和	216
一、幂级数求和函数	216
二、数项级数求和	220
§ 8.5 傅里叶级数	223
一、概念、定理	223
二、周期与非周期函数的傅里叶级数	225
习题八	229
第九章* 矢量代数与空间解析几何	233
§ 9.1 矢量的概念及其性质	233
一、概念及其运算	233
二、矢量之间的关系	234
§ 9.2 平面与直线	238
§ 9.3 投影方程	243
§ 9.4 曲面方程	245
习题九	249

第十章 多元函数微分学	251
§ 10.1 基本概念及定理与公式	251
一、二元函数的定义	251
二、二元函数的极限及连续性	252
三、偏导数、全导数及全微分	253
四、基本定理	254
§ 10.2 多元函数微分法	256
一、简单显函数 $u=f(x,y,z)$ 的 微分法	256
二、复合函数微分法	257
三、隐函数微分法	260
§ 10.3 多元函数微分学在几何上的应用	263
一、空间曲线在某点处的切线和法 平面方程	263
二、空间曲面在其上某点处的切平 面和法线方程	264
§ 10.4 多元函数的极值	266
一、概念、定理与公式	266
二、条件极值与无条件极值	266
习题十	271
第十一章 重积分	274
§ 11.1 概念·性质·公式	274
一、概念	274
二、性质	274
三、公式	277
§ 11.2 二重积分的解题技巧	278
一、 $\iint_D f(x,y)d\sigma$ 的解题程序	278
二、极坐标系中积分限的确定	279
三、典型例题分析	280
§ 11.3 二重积分的证题技巧	286
一、有关等式的证明	286
二、二重积分不等式的证明	288
§ 11.4 三重积分的计算	290
一、 $\iiint_\Omega f(x,y,z)d\omega$ 的解题程序	290
二、坐标系的选择	290
三、球面坐标系中积分限的确定	291
四、更换积分次序	292
五、三重积分计算	293
习题十一	294
第十二章 曲线、曲面积分及 场论初步	299
§ 12.1 曲线积分的概念及性质	299
一、对弧长的曲线积分	299

二、对坐标的曲线积分	299
三、两种曲线积分之间的关系	300
§ 12.2 曲线积分的理论及计算方法	300
一、基本定理	300
二、对弧长的曲线积分的计算方法	301
三、对坐标的曲线积分 $\int_L P(x,y)dx +$ $Q(x,y)dy$ 的计算法	302
§ 12.3 曲面积分的概念与性质	308
一、对面积的曲面积分	308
二、对坐标的曲面积分	308
三、两种曲面积分之间的关系	309
§ 12.4 曲面积分的理论与计算方法	309
一、基本定理	309
二、对面积的曲面积分的计算法	310
三、对坐标的曲面积分的计算法	311
§ 12.5 曲面面积的计算法	316
§ 12.6 场论初步	317
一、概念与公式	317
二、例题选讲	318
习题十二	321

第十三章 函数方程与不等式证明	323
§ 13.1 函数方程	323
一、利用函数表示法与用何字母表示 无关的“特性”求解方程	323
二、利用极限求解函数方程	324
三、利用导数的定义求解方程	325
四、利用变上限积分的可导性求解方程	325
五、利用连续函数的可积性及原函数的 连续性求解	326
六、利用解微分方程的方法求解 $f(x)$	327
§ 13.2 不等式的证明	330
一、引入参数法	330
二、利用微分中值定理	331
三、利用函数的单调增减性(重点)	333
四、利用函数的极值与最值	334
五、利用函数图形的凹凸性	336
六、利用泰勒展开式	336
七、杂例	338
习题十三	339

第二篇 线性代数

第一章 行列式	342
§ 1.1 行列式的概念	342
一、排列与逆序	342

二、 n 阶行列式的定义	343
§ 1.2 性质、定理与公式	344
一、行列式的基本性质	344
二、行列式按行(列)展开定理	347
三、重要公式与结论	347
§ 1.3 典型题型分析	348
题型一 抽象行列式的计算	348
题型二 低阶行列式的计算	349
题型三 n 阶行列式的计算	351
§ 1.4 杂例	356
习题一	358
第二章 矩阵	361
§ 2.1 矩阵的概念与运算	361
一、矩阵的概念	361
二、矩阵的运算	361
§ 2.2 逆矩阵	364
一、逆矩阵的概念	364
二、利用伴随矩阵求逆矩阵	365
三、矩阵的初等变换与求逆	366
四、分块矩阵及其求逆	367
§ 2.3 典型题型分析	367
题型一 求逆矩阵	367
题型二 求矩阵的高次幂 A^m	370
题型三 有关初等矩阵的命题	372
题型四 解矩阵方程	372
题型五 求矩阵的秩	374
题型六 关于矩阵对称、反对称命题	376
的证明	376
题型七 关于方阵 A 可逆的证明	376
题型八 与 A 的伴随阵 A^* 有关联的	377
命题的证明	377
题型九 关于矩阵秩的命题的证明	379
习题二	380
第三章 向量	385
§ 3.1 基本概念	385
一、向量的概念与运算	385
二、向量间的线性关系	385
三、向量组的秩和矩阵的秩	386
四、向量空间	387
§ 3.2 重要定理与公式	389
§ 3.3 典型题型分析	390
题型一 讨论向量组的线性相关性	390
题型二 有关向量组线性相关性命题	393
的证明	393
题型三 判定一个向量是否可由一组	393

向量线性表示	399
题型四 有关向量组线性表示命题的	400
证明	400
题型五 求向量组的极大线性无关组	402
题型六 有关向量组或矩阵秩的计算	404
与证明	404
题型七 与向量空间有关的命题	408
习题三	410
第四章 线性方程组	413
§ 4.1 概念、性质、定理	413
一、克莱姆法则	413
二、线性方程组的基本概念	413
三、线性方程组解的判定	414
四、非齐次组 $Ax=b$ 与齐次组 $Ax=0$	415
解的关系	415
五、线性方程组解的性质	415
六、线性方程组解的结构	415
§ 4.2 典型题型分析	416
题型一 基本概念题(解的判定、性质、	416
结构)	416
题型二 含有参数的线性方程组解	419
的讨论	419
题型三 讨论两个方程组的公共解	424
题型四 有关基础解系的证明	426
题型五 综合题	427
习题四	432
第五章 特征值和特征向量	436
§ 5.1 概念与性质	436
一、矩阵的特征值和特征向量的概念	436
二、特征值与特征向量的计算方法	436
三、相似矩阵及其性质	437
四、矩阵可相似对角化的充要条件	437
五、对称矩阵及其性质	437
§ 5.2 重要公式与结论	438
§ 5.3 典型题型分析	439
题型一 求数值矩阵的特征值与特	439
征向量	439
题型二 求抽象矩阵的特征值、特征向量	440
题型三 特征值、特征向量的逆问题	441
题型四 相似的判定及其逆问题	443
题型五 判断 A 是否可对角化	445
题型六 综合应用问题	447
题型七 有关特征值、特征向量的证明题	452
习题五	454

第六章* 二次型	457
§ 6.1 基本概念与定理	457
一、二次型及其矩阵表示	457
二、化二次型为标准型	457
三、用正交变换法化二次型为标准形	458
四、二次型和矩阵的正定性及其判别法	458
§ 6.2 典型题型分析	461
题型一 二次型所对应的矩阵及其性质	461
题型二 化二次型为标准形	462
题型三 已知二次型通过正交变换化 (一) 为标准形,反求参数	465
题型四 有关二次型及其矩阵正定性 (二) 的判定与证明	467
习题六	470

第三篇* 概率论与数理统计

第一章 随机事件和概率	472
§ 1 基本概念、性质与公式	472
一、随机试验和随机事件	472
二、事件的关系及其运算	472
三、事件的概率及其性质	474
四、条件概率与事件的独立性	475
五、重要概型	477
六、重要公式	477
§ 2 典型题型分析	478
题型一 古典概型与几何概型	478
题型二 事件的关系和概率性质的命题	481
题型三 条件概率与积事件概率的计算	483
题型四 全概率公式与 Bayes 公式 的命题	484
题型五 有关 Bernoulli 概型的命题	487
习题一	489
第二章 随机变量及其分布	492
§ 1 基本概念、性质与公式	492
一、概念与公式一览表	492
二、重要的一维分布	495
三、重要的二维分布	497
§ 2 典型题型分析	498
题型一 一维随机变量及其分布的概念、 性质的命题	498
题型二 求一维随机变量的分布律、概率 密度或分布函数	501
题型三 求一维随机变量函数的分布	505
题型四 二维随机变量及其分布的概念、 性质的考查	508

题型五 求二维随机变量的各种分布与随 机变量独立性的讨论	510
题型六 求两个随机变量的简单函数的 分布	517
习题二	521

第三章 随机变量的数字特征

§ 1 基本概念、性质与公式	528
一、一维随机变量的数字特征	528
二、二维随机变量的数字特征	530
三、几种重要的数学期望与方差	531
四、重要公式与结论	532
§ 2 典型题型分析	532
题型一 求一维随机变量的数字特征	532
题型二 求一维随机变量函数的数学 期望	536
题型三 求二维随机变量及其函数的 数字特征	539
题型四 有关数字特征的证明题	548
题型五 应用题	549
习题三	552

第四章 大数定律和中心极限定理

§ 1 基本概念与定理	556
一、切比雪夫不等式	556
二、中心极限定理	556
三、重要公式与结论	557
四、注意	557
§ 2 典型题型分析	558
题型一 有关切比雪夫不等式与大数定 律的命题	558
题型二 有关中心极限定理的命题	559
习题四	562

第五章 数理统计的基本概念

§ 1 基本概念、性质与公式	563
一、几个基本概念	563
二、三个抽样分布—— χ^2 分布、 t 分布 与 F 分布	564
三、正态总体下常用统计量的性质	564
四、重要公式与结论	565
§ 2 典型题型分析	566
题型一 求统计量的数字特征或取值 的概率、样本的容量	566
题型二 求统计量的分布	568
习题五	569

第六章 参数估计 572

§1 基本概念、性质与公式 572

一、矩估计与极大似然估计 572

二、估计量的评选标准 573

三、区间估计 574

四、重要公式与结论 575

§2 典型题型分析 576

题型一 求矩估计和极大似然估计 576

题型二 评价估计的优劣 580

题型三 区间估计或置信区间的命题 581

习题六 583

第七章 假设检验 586

§1 基本概念与公式 586

一、显著性检验的基本思想 586

二、假设检验的基本步骤 586

三、两类错误 586

四、正态总体未知参数的假设检验 587

五、假设检验与区间估计的联系 587

§2 典型题型分析 588

题型一 正态总体的均值和方差的

假设检验 588

题型二 有关两类错误的命题 589

习题七 590

附录

2008年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)

..... 592

2008年全国硕士研究生入学统一考试数学(二)

..... 601

注:带*篇、章,数二考生不作要求。

篇要 高数解题的四种思维定势

先赠送给大家四句话,相信在考研中能起到关键作用,请考生务必牢记.

第一句话:在题设条件中若函数 $f(x)$ 二阶或二阶以上可导,“不管三七二十一”,把 $f(x)$ 在指定点展成泰勒公式再说.

【例 1】设 C 为实数,函数 $f(x)$ 满足下列两个等式:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = C, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f'''(x) = 0.$$

求证: $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} f''(x) = 0$.

【证明】由泰勒公式有

$$f(x+1) = f(x) + f'(x) + \frac{1}{2!}f''(x) + \frac{1}{6}f'''(\xi_1), \quad x < \xi_1 < x+1, \quad (1)$$

$$f(x-1) = f(x) - f'(x) + \frac{1}{2!}f''(x) - \frac{1}{6}f'''(\xi_2), \quad x-1 < \xi_2 < x. \quad (2)$$

$$\text{由 } (1) + (2) \text{ 得, } f''(x) = f(x+1) + f(x-1) - 2f(x) + \frac{1}{6}f'''(\xi_2) - \frac{1}{6}f'''(\xi_1). \quad (3)$$

$$\text{由 } (1) - (2) \text{ 得, } 2f'(x) = f(x+1) - f(x-1) - \frac{1}{6}f'''(\xi_1) - \frac{1}{6}f'''(\xi_2). \quad (4)$$

当 $x \rightarrow \infty$ 时, $\xi_1 \rightarrow \infty, \xi_2 \rightarrow \infty$, 于是有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f''(x) = 2C - 2C + \frac{1}{6} \times 0 - \frac{1}{6} \times 0 = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 2f'(x) = C - C - \frac{1}{6} \times 0 - \frac{1}{6} \times 0 = 0.$$

因此 $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} f''(x) = 0$.

【例 2】设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二阶导数连续, $f(0) = f(1) = 0$, 并且当 $x \in (0, 1)$ 时, $|f''(x)| \leq A$.

求证: $|f'(x)| \leq \frac{A}{2}, x \in [0, 1]$.

【证明】由于 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上具有二阶连续导数, 则 $f(x)$ 可展成一阶泰勒公式, 即

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(\xi)(x - x_0)^2, \quad \xi \text{ 在 } x \text{ 与 } x_0 \text{ 之间.}$$

取 $x = 0, x_0 = x$, 则

$$f(0) = f(x) + f'(x)(0 - x) + f''(\xi_1) \frac{(0 - x)^2}{2!}, \quad 0 < \xi_1 < x \leq 1; \quad (1)$$

取 $x = 1, x_0 = x$, 则

$$f(1) = f(x) + f'(x)(1 - x) + f''(\xi_2) \frac{(1 - x)^2}{2!}, \quad 0 \leq x < \xi_2 < 1. \quad (2)$$

② - ① 得

$$f'(x) = f(1) - f(0) + \frac{1}{2!}[f''(\xi_1)x^2 - f''(\xi_2)(1-x)^2]$$

$$\frac{f(0) = f(1) = 0}{2!}[f''(\xi_1)x^2 - f''(\xi_2)(1-x)^2].$$

又 $|f''(x)| \leq A, x \in (0, 1)$, 则

$$|f'(x)| \leq \frac{A}{2}[x^2 + (1-x)^2] = \frac{A}{2}(2x^2 - 2x + 1).$$

当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $2x^2 - 2x + 1 \leq 1$. 故 $|f'(x)| \leq \frac{A}{2}$.

【例3】试证:若偶函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某邻域内具有连续的二阶导数,且 $f(0)=1$,则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[f\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \right] \text{ 绝对收敛.}$$

【证明】因 $f(x)$ 为偶函数,故 $f'(x)$ 为奇函数, $f'(0)=0$. 又

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2),$$

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{f''(0)}{2} \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

故

$$u_n = f\left(\frac{1}{n}\right) - 1 = \frac{f''(0)}{2} \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

从而

$$|u_n| = \left| f\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \right| \sim \frac{|f''(0)|}{2n^2}.$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f''(0)|}{2n^2}$ 收敛,故 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛,所以 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛.

【例4】设函数 $f(x)$ 二阶可导,且 $f''(x) \geq 0, x \in (-\infty, +\infty)$, 函数 u 在区间 $[0, a] (a > 0)$ 上连续. 证明:

$$\frac{1}{a} \int_0^a f[u(t)] dt \geq f\left[\frac{1}{a} \int_0^a u(t) dt\right].$$

【证明】令 $x_0 = \frac{1}{a} \int_0^a u(t) dt$, 将 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处展成一阶泰勒公式:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(\xi)(x - x_0)^2.$$

由于 $f''(x) \geq 0$, 则 $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

令 $x = u(t)$, 则 $f[u(t)] \geq f(x_0) + f'(x_0)[u(t) - x_0]$.

上式两边在 $[0, a]$ 上对 t 积分,得

$$\begin{aligned} \int_0^a f[u(t)] dt &\geq \int_0^a f(x_0) dt + \int_0^a f'(x_0)[u(t) - x_0] dt \\ &= af(x_0) + f'(x_0) \left[\int_0^a u(t) dt - ax_0 \right] = af(x_0). \end{aligned}$$

故 $\frac{1}{a} \int_0^a f[u(t)] dt \geq f\left[\frac{1}{a} \int_0^a u(t) dt\right]$.

【另证】因 $f''(x) \geq 0$, 所以 $f(x)$ 为凸函数. 因此, 具有性质:

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) \quad (\text{其中 } \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1).$$

由 u 在 $[0, a]$ 上连续, 从而可积. 将 $[0, a]$ 分成 n 等分, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{u(\xi_i)}{a} \frac{a}{n} = \frac{1}{a} \int_0^a u(t) dt.$$

由 f 的凸性及连续性,有

$$f\left(\sum_{i=1}^n \frac{u(\xi_i)}{a} \frac{a}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f[u(\xi_i)] = \sum_{i=1}^n \frac{f(u(\xi_i))}{a} \frac{a}{n}.$$

对上式两边令 $n \rightarrow \infty$ 取极限,由可积性可得

$$f\left(\frac{1}{a} \int_0^a u(t) dt\right) \leq \frac{1}{a} \int_0^a f(u(t)) dt.$$

第二句话:在题设条件或欲证结论中有定积分表达式时,则“不管三七二十一”先用积分中值定理对该积分式处理一下再说.

【例 5】 设 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上连续, 在 $(0, 2)$ 内二阶可导, 且 $f(0) = f(\frac{1}{2})$, $2 \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx = f(2)$.

证明: 存在一个 $\xi \in (0, 2)$, 使 $f''(\xi) = 0$.

【证明】 $f(2) = 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx \xrightarrow{\text{积分中值定理}} 2(1 - \frac{1}{2})f(\eta) = f(\eta), \frac{1}{2} \leq \eta \leq 1.$

于是 $f(x)$ 在 $[\eta, 2]$ 上满足罗尔定理, 即存在一个 $\xi_1 \in (\eta, 2)$, 使

$$f'(\xi_1) = 0. \quad ①$$

又 $f(x)$ 在 $[0, \frac{1}{2}]$ 上满足罗尔定理, 于是存在一个 $\xi_2 \in (0, \frac{1}{2})$, 使

$$f'(\xi_2) = 0. \quad ②$$

由 ①, ② 可知 $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$. 再对 $f'(x)$ 在 $[\xi_2, \xi_1]$ 上使用罗尔定理, 于是 $\exists \xi \in (\xi_2, \xi_1) \subset (0, 2)$, 使 $f''(\xi) = 0$.

【例 6】 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上是非负、单调递减的连续函数, 且 $0 < a < b < 1$. 证明:

$$\int_0^a f(x) dx \geq \frac{a}{b} \int_a^b f(x) dx.$$

【证明】 由积分中值定理

$$\int_0^a f(x) dx = af(\xi_1) \geq af(a), \quad \xi_1 \in [0, a],$$

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f(\xi_2) \leq (b-a)f(a), \quad \xi_2 \in [a, b].$$

于是

$$\frac{1}{a} \int_0^a f(x) dx \geq f(a) \geq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \geq \frac{1}{b} \int_a^b f(x) dx.$$

故

$$\int_0^a f(x) dx \geq \frac{a}{b} \int_a^b f(x) dx.$$

【另证】 $\int_0^a f(x) dx \geq \frac{a}{b} \int_a^b f(x) dx \Leftrightarrow b \int_0^a f(x) dx \geq a \int_a^b f(x) dx.$

令 $F(x) = b \int_0^x f(t) dt - x \int_x^b f(t) dt$, 则

$$\begin{aligned} F'(x) &= bf(x) - \int_x^b f(t) dt + xf(x) = \int_x^b f(x) dt - \int_x^b f(t) dt + 2xf(x) \\ &= \int_x^b [f(x) - f(t)] dt + 2xf(x) \geq 0, \quad (\text{由于 } f(x) \geq f(t) \geq 0). \end{aligned}$$

所以 $F(x)$ 单调递增. 又 $F(0) = 0$, 故

$$F(a) > F(0) = 0, \text{ 即 } b \int_0^a f(x) dx - a \int_a^b f(x) dx > 0,$$

亦即
$$\int_0^a f(x) dx \geq \frac{a}{b} \int_a^b f(x) dx.$$

第三句话: 在题设条件中函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $f(a) = 0$ 或 $f(b) = 0$ 或 $f(a) = f(b) = 0$, 则“不管三七二十一”先用拉格朗日中值定理处理一下再说.

$$f(x) \stackrel{f(a)=0}{=} f(x) - f(a) = f'(\xi)(x-a), \quad a < \xi < x.$$

或
$$f(x) \stackrel{f(b)=0}{=} f(x) - f(b) = f'(\xi)(x-b), \quad x < \xi < b.$$

若 $f(a) = f(b) = 0$, 则
$$\begin{cases} f(x) = f(x) - f(a) = f'(\xi_1)(x-a), & a < \xi_1 < x, \\ f(x) = f(x) - f(b) = f'(\xi_2)(x-b), & x < \xi_2 < b. \end{cases}$$

【例 7】设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有连续的导数, 且 $f(a) = f(b) = 0, M = \max_{x \in [a, b]} |f'(x)|$, 试证:

$$\frac{4}{(b-a)^2} \int_a^b f(x) dx \leq M.$$

【证明】 $f(x) \stackrel{f(a)=0}{=} f(x) - f(a) = (x-a)f'(\xi_1), a < \xi_1 < x$, 则

$$|f(x)| = (x-a)|f'(\xi_1)| \leq (x-a)M.$$

同理 $|f(x)| \leq (b-x)M.$

于是
$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x)| dx &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} |f(x)| dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b |f(x)| dx \\ &\leq \int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)M dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b (b-x)M dx = \frac{(b-a)^2}{4} M. \end{aligned}$$

故
$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx \leq \frac{(b-a)^2}{4} M.$$

即
$$\frac{4}{(b-a)^2} \int_a^b f(x) dx \leq M.$$

【例 8】已知在 $[0, a]$ 上 $|f''(x)| \leq M$, 且 $f(x)$ 在 $(0, a)$ 内取最大值, 试证:

$$|f'(0)| + |f'(a)| \leq Ma.$$

【证明】设 $f(c) = \max_{x \in (0, a)} \{f(x)\}$, 则 $f'(c) = 0$. (费尔马定理)

对 $f'(x)$ 在 $[0, c]$ 与 $[c, a]$ 内分别用拉格朗日中值定理, 有

$$f'(c) - f'(0) = f''(\xi_1)c, \quad 0 < \xi_1 < c,$$

$$f'(a) - f'(c) = f''(\xi_2)(a-c), \quad c < \xi_2 < a.$$

于是 $|f'(0)| = |f''(\xi_1)c| \leq Mc,$

$$|f'(a)| = |f''(\xi_2)(a-c)| \leq M(a-c).$$

故 $|f'(0)| + |f'(a)| \leq Mc + M(a-c) = Ma.$

【例 9】设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有连续的 $f''(x)$, 且 $f''(x) < 0, f(a) = f(b) = 0$, 则在 (a, b) 上 $f(x) > 0$, 且

$$\int_a^b \left| \frac{f''(x)}{f(x)} \right| dx > \frac{4}{b-a}.$$

【证明】由 $f''(x) < 0$ 可知, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是凹函数(图形上凸); 由凹函数性质知, $f(x)$ 大于连接 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ 线段上点的纵坐标. 而此线段所在直线即为 $y = 0$ (x 轴), 所以在 (a, b) 上 $f(x) > 0$. 再由 $f''(x) < 0$ 知, $f'(x)$ 是严格单调减少的, 从而知 $f(x)$ 在 (a, b) 内有唯一的极大值点, 记为 $x = c$. 此时 $f'(c) = 0$, 如右图所示, 而在 (a, c) 上, $f'(x) > 0$, 在 (c, b) 上 $f'(x) < 0$. 由拉格朗日中值定理, 当 $x \in [a, c]$ 时,

$$f(x) = f'(\xi_1)(x-a) + f(a), \quad \xi_1 \in (a, x).$$

由 $f'(x)$ 严格递减, $f'(\xi_1) < f'_+(a)$, 注意到 $f(a) = 0$, 有

$$f(x) < f'_+(a)(c-a), \quad x \in [a, c].$$

当 $x \in [c, b]$ 时, 同理可得

$$f(x) < [-f'_-(b)](b-c), \quad x \in [c, b].$$

于是
$$\frac{1}{f(x)} > \frac{1}{(c-a)f'_+(a)}, \quad x \in [a, c],$$

$$\frac{1}{f(x)} > \frac{1}{(b-c)(-f'_-(b))}, \quad x \in [c, b].$$

$$\begin{aligned} \text{则 } \int_a^b \left| \frac{f''(x)}{f(x)} \right| dx &= - \int_a^b \frac{f''(x)}{f(x)} dx = \int_a^c \frac{-f''(x)}{f(x)} dx + \int_c^b \frac{-f''(x)}{f(x)} dx \\ &> \int_a^c \frac{-f''(x)}{(c-a)f'_+(a)} dx + \int_c^b \frac{-f''(x)}{(b-c)(-f'_-(b))} dx \\ &= \frac{1}{(c-a)f'_+(a)} [f'_+(a) - f'(c)] + \frac{1}{(b-c)(-f'_-(b))} [f'(c) - f'_-(b)] \\ &= \frac{1}{c-a} + \frac{1}{b-c} = \frac{b-a}{(c-a)(b-c)} > (b-a) \frac{1}{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2} = \frac{4}{b-a}. \end{aligned}$$

第四句话: 对定限或变限积分, 若被积函数或其主要部分为复合函数, 则“不管三七二十一”先做变量替换使之成为简单形式 $f(u)$ 再说.

【例 10】求下列函数的导数(设 $f(u)$ 是 u 的连续函数):

$$(1) F(y) = \int_0^y f(x-y) dx, \text{ 求 } F'(y); \quad (2) F(x) = \int_0^{x^2} tf(x-t) dt, \text{ 求 } F'(x);$$

$$(3) F(x) = \int_0^1 f(te^x) dt, \text{ 求 } F'(x); \quad (4) F(x) = \int_0^{x^2} xf(x+t) dt, \text{ 求 } F'(x).$$

【解】(1) $F(y) \xrightarrow{\text{令 } u=x-y} \int_{-y}^0 f(u) du, \text{ 则 } F'(y) = -f(-y) \cdot (-1) = f(-y).$

$$(2) F(x) \xrightarrow{\text{令 } u=x-t} \int_x^{x-x^2} (x-u)f(u)(-du) = -x \int_x^{x-x^2} f(u) du + \int_x^{x-x^2} uf(u) du,$$

则
$$F'(x) = - \int_x^{x-x^2} f(u) du - x[f(x-x^2) \cdot (1-2x) - f(x)]$$

$$+ (1-2x)(x-x^2)f(x-x^2) - xf(x) \\ = \int_{x-x^2}^x f(u)du + x^2(2x-1)f(x-x^2).$$

$$(3) F(x) \xrightarrow{\text{令 } u=te^x} \int_0^{e^x} f(u) \frac{1}{e^x} du = \frac{1}{e^x} \int_0^{e^x} f(u) du = e^{-x} \int_0^{e^x} f(u) du,$$

$$\text{则 } F'(x) = -e^{-x} \int_0^{e^x} f(u) du + e^{-x} f(e^x) \cdot e^x = f(e^x) - e^{-x} \int_0^{e^x} f(u) du.$$

$$(4) \int_0^{x^2} f(x+t) dt \xrightarrow{\text{令 } u=x+t} \int_x^{x+x^2} f(u) du, \text{ 于是有 } F(x) = x \int_x^{x+x^2} f(u) du, \text{ 则}$$

$$F'(x) = \int_{x+x^2}^{x+x^2} f(u) du + x[f(x+x^2)(1+2x) - f(x)].$$

【例 11】设 $f(x)$ 可微, 且满足 $x = \int_0^x f(t) dt + \int_0^x tf(t-x) dt$, 求 $f(x)$.

$$\text{【解】} \int_0^x tf(t-x) dt \xrightarrow{\text{令 } u=t-x} \int_{-x}^0 (u+x)f(u) du = -\int_0^{-x} uf(u) du + x \int_0^{-x} f(u) du.$$

$$\text{于是原方程变为 } x = \int_0^x f(t) dt - \int_0^{-x} uf(u) du + x \int_0^{-x} f(u) du.$$

$$\text{两边对 } x \text{ 求导, 得 } 1 = f(x) - (-x)f(-x)(-1) - \int_0^{-x} f(u) du - xf(-x)(-1).$$

$$\text{整理, 得 } 1 = f(x) - \int_0^{-x} f(u) du,$$

$$\text{两边再对 } x \text{ 求导, 得 } 0 = f'(x) - f(-x)(-1), \quad \text{即 } f'(x) = -f(-x), \quad \text{①}$$

$$\text{上式两边对 } x \text{ 求导, 得 } f''(x) = f'(-x), \quad \text{②}$$

$$\text{由 ①, ② 得 } f''(x) = -f(x),$$

$$\text{即 } f''(x) + f(x) = 0,$$

$$\text{解此方程得 } f(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

$$\text{注意到 } f(0) = 1, f'(0) = -1, \text{ 故 } f(x) = \cos x - \sin x.$$

【注】第四句话可推广为: 若给定的函数为抽象的复合函数, 则运算之前应先做变量替换, 使之成为简单的形式.

$$\text{例如: } f[\varphi(x)] \xrightarrow{\text{令 } u=\varphi(x)} f(u).$$

【例 12】设 $f(x^2-1) = \ln \frac{x^2}{x^2-2}$, $f[\varphi(x)] = \ln x$, 计算 $\int \varphi(x) dx$.

$$\text{【解】令 } x^2-1=t, \text{ 则 } f(t) = \ln \frac{t+1}{t-1}, \quad f[\varphi(x)] = \ln \frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1} = \ln x,$$

$$\Rightarrow \frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1} = x \Rightarrow \varphi(x) = \frac{x+1}{x-1},$$

$$\text{故 } \int \varphi(x) dx = \int \frac{x+1}{x-1} dx = x + 2 \ln |x-1| + C.$$

第一篇 高等数学

第一章 函数 · 极限 · 连续

§ 1.1 函 数

一、函数的定义

设有两个变量 x 和 y , 变量 x 的变域为 D , 如果对于 D 中的每一个 x 值, 按照一定的法则, 变量 y 有一个确定的值与之对应, 则称变量 y 为变量 x 的函数, 记作

$$y = f(x)$$

x ——自变量, y ——因变量, 变域 D 为定义域, 记为 D_f , 变量 y 的取值的集合称为函数的值域, 记作 Z_f .

函数概念的两要素:

(1) 定义域 $\triangle$ 自变量 x 的变化范围 (若函数是解析式子表示的, 则使运算有意义的实自变量值的集合即为定义域).

(2) 对应关系 $\triangle$ 给定 x 值, 求 y 值的方法.

【点拨】 当且仅当给定的两个函数, 其定义域和对应关系完全相同时, 才表示同一函数, 否则表示不同的函数.

【例 1.1】 与连续函数 $f(x) = \ln x + \int_1^x f(x) dx + f'(1)$ 等价的函数是

(A) $e^{\ln(\ln x)}$

(B) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{x-1}{n+(x-1)k} (x > 0)$

(C) $\frac{1}{x}$ 的经过点 $(-1, 0)$ 的原函数.

(D) 方程 $xyy' = \ln x$ 满足 $y(1) = 0$ 的特解.

【解】 设 $A = \int_1^e f(x) dx, B = f'(1)$, 所以, $f(x) = \ln x + A - B$, 有

$$A = \int_1^e f(x) dx = \int_1^e (\ln x + A - B) dx = 1 + (A - B)(e - 1),$$

$$B = f'(1) = (\ln x + A - B)'|_{x=1} = 1, \text{ 得 } A = 1, \text{ 所以, } f(x) = \ln x.$$

对于 (A), $e^{\ln(\ln x)} = \ln x (x > 1)$, 与 $f(x)$ 的定义域不同.

(B) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{x-1}{n+(x-1)k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{x-1}{n} \cdot \frac{1}{1+\frac{x-1}{n} \cdot k} = \int_1^x \frac{1}{t} dt = \ln x$

与 $f(x)$ 等价.

对于 (C) $\frac{1}{x}$ 的经过点 $(-1, 0)$ 的原函数为 $\ln(-x)$.