文登教育集团课堂用书
聚骄公司全心专业设计

FOCUS 聚焦图书

传承辉煌的历史 【2010版】 开启成功的未来

考研数学复习指南

（理工类）

陈文灯 黄先开 编著

物超所值

内含

DVD 陈文灯教授精妙复习方法指导视频
本书50小时的重难点视频讲解

本书全部习题答案详解手册+09年最新真题

世界图书出版公司

文登教育集团课堂用书
聚骄公司全心专业设计

传承辉煌的历史【2010版】开启成功的未来

考研数学

复习指南

陈文灯 黄先开 编著

（理工类）

内含 DVD

陈文灯教授精妙复习方法指导视频

本书50小时的重难点视频讲解

本书全部习题答案详解手册+09年最新真题

物超所值

世界图书出版公司

图书在版编目(CIP)数据

数学复习指南. 理工类 / 陈文灯，黄先开编著. —15 版. —北京：世界图书出版公司北京公司，2002. 3

ISBN 978—7-5062-5211-2

Ⅰ. 数... Ⅱ. ①陈... ②黄... Ⅲ. 高等数学-研究生-入学考试-解题 Ⅳ. 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 014886 号

数学复习指南(理工类)

(2010 版)

主　　编：陈文灯　黄先开
责任编辑：世　华
装帧设计：余曙敏

出　　版：世界图书出版公司北京公司
发　　行：世界图书出版公司北京公司
(北京朝内大街 137 号　邮编 100010)
销　　售：各地新华书店
印　　刷：北京忠信诚印刷厂

开　　本：787×1092 毫米　1/16
印　　张：38.75
字　　数：775 千字
版　　次：2009 年 1 月第 15 版　2009 年 1 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5062-5211-2/O · 332　　**定价：69.80 元**

服务热线：010—88861708

前 言

数学统考从 1987 年至今经历了 22 个年头。其间“数学考试大纲”虽然变化不大，但每年的试题均有所创新，不过仔细分析还是万变不离其宗。只要把本书归纳总结的题型、方法和技巧掌握住，研读我们精心设置的典型例题，即可达到触类旁通、融会贯通的境界。

我们要提醒读者的是，数学想要考高分，一定要了解考研数学究竟要考什么？综观一二十年试题可知，主要考查如下四方面：

（1）基础（基本概念、基本理论、基本方法）；

（2）解综合题的能力；

（3）分析问题和解决问题的能力，即解应用题的能力；

（4）解题的熟练程度（通过大题量、大计算量进行考核）。

真正了解了要考查的东西，复习时才能有的放矢。关于数学基础、数学题型与考试目标之间的逻辑关系，我写了四句话，供大家参考、体会：**数学基础树的根，技巧演练靠题型；勤学苦练强磨砺，功到高分自然成。**

本书特点：

（1）对大纲要求的重要概念、公式、定理进行剖析，增强读者对这些内容的理解和记忆，避免犯概念性错误、错用公式和定理的错误。

（2）归纳、总结了二十多个思维定式，无疑这对读者解题会有所帮助，但我们的目的是引导读者去归纳总结，养成习惯。这样应试的时候就能很快找到解题突破口。

（3）用“举题型讲方法”的格式代替传统的“讲方法套题型”的做法，使读者应试时，思路畅通、有的放矢，许多书的跟进也说明这种做法的确很有效。

（4）广泛采用表格法，使读者便于对照、比较，对要点一目了然。

（5）介绍许多新的快速解题方法和技巧。例如，中值定理证明中的辅助函数的做法、不定积分中的凑微分法、不等式证明尤其是定积分不等式的证明方法等，都是我们教学研究的成果，对读者应试能起到“事半功倍”的效果。

（6）创新设计出很多好的例题，以期提高读者识别题型变异的能力。

历经十四载的再版和修订，本书已成为广大考研读者的良师诤友，**同时也有很多教师同行用该书做教学参考**。为了精益求精，恳请朋友们拨冗指正。

陈文灯

目　录

第二章 矩阵 …… 361

第三章 向量 …… 385

第四章 线性方程组 …… 413

第五章 特征值和特征向量 …… 436

注:带*篇、章,数二考生不作要求。

篇要　高数解题的四种思维定势

先赠送给大家四句话，相信在考研中能起到关键作用，请考生务必牢记.

第一句话：在题设条件中若函数 $f(x)$ 二阶或二阶以上可导，“不管三七二十一”，把 $f(x)$ 在指定点展成泰勒公式再说.

【例 1】 设 C 为实数，函数 $f(x)$ 满足下列两个等式：

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = C,\quad \lim_{x\to\infty} f'''(x) = 0.$$

求证：$\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$，$\lim\limits_{x\to\infty} f''(x) = 0$.

【证明】 由泰勒公式有

$$f(x+1) = f(x) + f'(x) + \frac{1}{2!}f''(x) + \frac{1}{6}f'''(\xi_1),\quad x < \xi_1 < x+1, \qquad ①$$

$$f(x-1) = f(x) - f'(x) + \frac{1}{2!}f''(x) - \frac{1}{6}f'''(\xi_2),\quad x-1 < \xi_2 < x. \qquad ②$$

由 ①＋② 得，$\quad f''(x) = f(x+1) + f(x-1) - 2f(x) + \dfrac{1}{6}f'''(\xi_2) - \dfrac{1}{6}f'''(\xi_1).\qquad ③$

由 ①－② 得，$\quad 2f'(x) = f(x+1) - f(x-1) - \dfrac{1}{6}f'''(\xi_1) - \dfrac{1}{6}f'''(\xi_2).\qquad ④$

当 $x\to\infty$ 时，$\xi_1\to\infty$，$\xi_2\to\infty$，于是有

$$\lim_{x\to\infty} f''(x) = 2C - 2C + \frac{1}{6}\times 0 - \frac{1}{6}\times 0 = 0,$$

$$\lim_{x\to\infty} 2f'(x) = C - C - \frac{1}{6}\times 0 - \frac{1}{6}\times 0 = 0.$$

因此 $\quad \lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$，$\lim\limits_{x\to\infty} f''(x) = 0$.

【例 2】 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶导数连续，$f(0) = f(1) = 0$，并且当 $x\in(0,1)$ 时，$|f''(x)| \leqslant A$. 求证：$|f'(x)| \leqslant \dfrac{A}{2}$，$x\in[0,1]$.

【证明】 由于 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶连续导数，则 $f(x)$ 可展成一阶泰勒公式，即

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(\xi)(x - x_0)^2,\ \xi \text{ 在 } x \text{ 与 } x_0 \text{ 之间}.$$

取 $x = 0$，$x_0 = x$，则

$$f(0) = f(x) + f'(x)(0 - x) + f''(\xi_1)\frac{(0-x)^2}{2!},\quad 0 < \xi_1 < x \leqslant 1; \qquad ①$$

取 $x = 1$，$x_0 = x$，则

$$f(1) = f(x) + f'(x)(1 - x) + f''(\xi_2)\frac{(1-x)^2}{2!},\quad 0 \leqslant x < \xi_2 < 1. \qquad ②$$

② － ① 得

$$f'(x) = f(1) - f(0) + \frac{1}{2!}[f''(\xi_1)x^2 - f''(\xi_2)(1-x)^2]$$

$$\xlongequal{f(0)=f(1)=0} \frac{1}{2!}[f''(\xi_1)x^2 - f''(\xi_2)(1-x)^2].$$

又 $\quad |f''(x)| \leqslant A, x \in (0,1)$，则

$$|f'(x)| \leqslant \frac{A}{2}[x^2 + (1-x)^2] = \frac{A}{2}(2x^2 - 2x + 1).$$

当 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 时，$2x^2 - 2x + 1 \leqslant 1$. 故 $|f'(x)| \leqslant \frac{A}{2}$.

【例 3】 试证：若偶函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某邻域内具有连续的二阶导数，且 $f(0)=1$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[f(\frac{1}{n}) - 1\right]$ 绝对收敛.

【证明】 因 $f(x)$ 为偶函数，故 $f'(x)$ 为奇函数，$f'(0)=0$. 又

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2),$$

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{f''(0)}{2}\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

故 $$u_n = f\left(\frac{1}{n}\right) - 1 = \frac{f''(0)}{2}\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

从而 $$|u_n| = \left|f(\frac{1}{n}) - 1\right| \sim \frac{|f''(0)|}{2n^2}.$$

由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|f''(0)|}{2n^2}$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛.

【例 4】 设函数 $f(x)$ 二阶可导，且 $f''(x) \geqslant 0, x \in (-\infty, +\infty)$，函数 u 在区间 $[0,a](a>0)$ 上连续. 证明：

$$\frac{1}{a}\int_0^a f[u(t)]\mathrm{d}t \geqslant f\left[\frac{1}{a}\int_0^a u(t)\mathrm{d}t\right].$$

【证明】 令 $x_0 = \frac{1}{a}\int_0^a u(t)\mathrm{d}t$，将 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处展成一阶泰勒公式：

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(\xi)(x-x_0)^2.$$

由于 $f''(x) \geqslant 0$， 则 $f(x) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

令 $x = u(t)$， 则 $f[u(t)] \geqslant f(x_0) + f'(x_0)[u(t) - x_0]$.

上式两边在 $[0,a]$ 上对 t 积分，得

$$\int_0^a f[u(t)]\mathrm{d}t \geqslant \int_0^a f(x_0)\mathrm{d}t + \int_0^a f'(x_0)[u(t) - x_0]\mathrm{d}t$$

$$= af(x_0) + f'(x_0)\left[\int_0^a u(t)\mathrm{d}t - ax_0\right] = af(x_0).$$

故 $$\frac{1}{a}\int_0^a f[u(t)]\mathrm{d}t \geqslant f\left[\frac{1}{a}\int_0^a u(t)\mathrm{d}t\right].$$

【另证】 因 $f''(x) \geqslant 0$，所以 $f(x)$ 为凸函数. 因此，具有性质：

$$f(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)（其中 \lambda \geqslant 0, \sum_{i=1}^{n}\lambda_i = 1）.$$

由 u 在 $[0,a]$ 上连续，从而可积. 将 $[0,a]$ 分成 n 等分，有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{u(\xi_i)}{a}\frac{a}{n}=\frac{1}{a}\int_0^a u(t)\mathrm{d}t.$$

由 f 的凸性及连续性，有

$$f\Big(\sum_{i=1}^{n}\frac{u(\xi_i)}{a}\frac{a}{n}\Big)\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f[u(\xi_i)]=\sum_{i=1}^{n}\frac{f(u(\xi_i))}{a}\frac{a}{n}.$$

对上式两边令 $n\to\infty$ 取极限，由可积性可得

$$f\Big(\frac{1}{a}\int_0^a u(t)\mathrm{d}t\Big)\leqslant\frac{1}{a}\int_0^a f(u(t))\mathrm{d}t.$$

第二句话：在题设条件或欲证结论中有定积分表达式时，则"不管三七二十一"先用积分中值定理对该积分式处理一下再说.

【例 5】 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 内二阶可导，且 $f(0)=f(\frac{1}{2})$，$2\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(x)\mathrm{d}x=f(2)$.

证明：存在一个 $\xi\in(0,2)$，使 $f''(\xi)=0$.

【证明】 $f(2)=2\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(x)\mathrm{d}x\xlongequal{\text{积分中值定理}}2(1-\frac{1}{2})f(\eta)=f(\eta)$，$\frac{1}{2}\leqslant\eta\leqslant1$.

于是 $f(x)$ 在 $[\eta,2]$ 上满足罗尔定理，即存在一个 $\xi_1\in(\eta,2)$，使

$$f'(\xi_1)=0. \qquad ①$$

又 $f(x)$ 在 $[0,\frac{1}{2}]$ 上满足罗尔定理，于是存在一个 $\xi_2\in(0,\frac{1}{2})$，使

$$f'(\xi_2)=0. \qquad ②$$

由 ①，② 可知 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$. 再对 $f'(x)$ 在 $[\xi_2,\xi_1]$ 上使用罗尔定理，于是 $\exists\,\xi\in(\xi_2,\xi_1)\subset(0,2)$，使 $f''(\xi)=0$.

【例 6】 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上是非负、单调递减的连续函数，且 $0<a<b<1$. 证明：

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{a}{b}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

【证明】 由积分中值定理

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x=af(\xi_1)\geqslant af(a),\quad \xi_1\in[0,a],$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)f(\xi_2)\leqslant(b-a)f(a),\quad \xi_2\in[a,b].$$

于是
$$\frac{1}{a}\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\geqslant f(a)\geqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{b}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

故
$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{a}{b}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

【另证】 $\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{a}{b}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \iff b\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\geqslant a\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$

令 $F(x)=b\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-x\int_x^b f(t)\mathrm{d}t$，则

$$F'(x)=bf(x)-\int_x^b f(t)\mathrm{d}t+xf(x)=\int_x^b f(x)\mathrm{d}t-\int_x^b f(t)\mathrm{d}t+2xf(x)$$

$$=\int_x^b[f(x)-f(t)]\mathrm{d}t+2xf(x)\geqslant0,\text{(由于 } f(x)\geqslant f(t)\geqslant0).$$

所以 $F(x)$ 单调递增. 又 $F(0)=0$，故

$$F(a)>F(0)=0,\text{即 } b\int_0^a f(x)\mathrm{d}x-a\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0,$$

亦即 $$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{a}{b}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

第三句话：在题设条件中函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=0$ 或 $f(b)=0$ 或 $f(a)=f(b)=0$，则"不管三七二十一"先用拉格朗日中值定理处理一下再说.

$$f(x)\xlongequal{f(a)=0}f(x)-f(a)=f'(\xi)(x-a),\quad a<\xi<x.$$

或 $$f(x)\xlongequal{f(b)=0}f(x)-f(b)=f'(\xi)(x-b),\quad x<\xi<b.$$

若 $f(a)=f(b)=0$，则 $\begin{cases}f(x)=f(x)-f(a)=f'(\xi_1)(x-a), & a<\xi_1<x,\\ f(x)=f(x)-f(b)=f'(\xi_2)(x-b), & x<\xi_2<b.\end{cases}$

【例 7】 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的导数，且 $f(a)=f(b)=0$，$M=\max\limits_{x\in[a,b]}|f'(x)|$，试证：$\dfrac{4}{(b-a)^2}\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant M.$

【证明】 $f(x)\xlongequal{f(a)=0}f(x)-f(a)=(x-a)f'(\xi_1),a<\xi_1<x$，则

$$|f(x)|=(x-a)|f'(\xi_1)|\leqslant(x-a)M.$$

同理 $$|f(x)|\leqslant(b-x)M.$$

于是 $$\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x=\int_a^{\frac{a+b}{2}}|f(x)|\mathrm{d}x+\int_{\frac{a+b}{2}}^b|f(x)|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-a)M\mathrm{d}x+\int_{\frac{a+b}{2}}^b(b-x)M\mathrm{d}x=\frac{(b-a)^2}{4}M.$$

故 $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\frac{(b-a)^2}{4}M.$$

即 $$\frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant M.$$

【例 8】 已知在 $[0,a]$ 上 $|f''(x)|\leqslant M$，且 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 内取最大值，试证：

$$|f'(0)|+|f'(a)|\leqslant Ma.$$

【证明】 设 $f(c)=\max\limits_{x\in(0,a)}\{f(x)\}$，则 $f'(c)=0$.（费尔马定理）

对 $f'(x)$ 在 $[0,c]$ 与 $[c,a]$ 内分别用拉格朗日中值定理，有

$$f'(c)-f'(0)=f''(\xi_1)c,\quad 0<\xi_1<c,$$
$$f'(a)-f'(c)=f''(\xi_2)(a-c),\quad c<\xi_2<a.$$

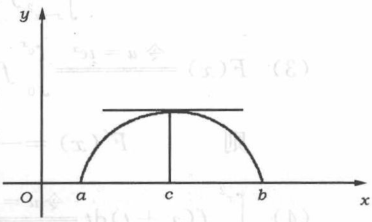
于是 $$|f'(0)|=|f''(\xi_1)c|\leqslant Mc,$$
$$|f'(a)|=|f''(\xi_2)(a-c)|\leqslant M(a-c).$$

故 $$|f'(0)|+|f'(a)|\leqslant Mc+M(a-c)=Ma.$$

【例 9】 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的 $f''(x)$，且 $f''(x)<0$，$f(a)=f(b)=0$，则在 (a,b) 上 $f(x)>0$，且

$$\int_a^b\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|dx>\frac{4}{b-a}.$$

【证明】由 $f''(x)<0$ 可知，$f(x)$ 在$[a,b]$上是凹函数(图形上凸)；由凹函数性质知，$f(x)$ 大于连接$(a,f(a))$，$(b,f(b))$ 线段上点的纵坐标. 而此线段所在直线即为 $y=0$(x 轴)，所以在(a,b) 上 $f(x)>0$. 再由 $f''(x)<0$ 知，$f'(x)$ 是严格单调减少的，从而知 $f(x)$ 在(a,b) 内有唯一的极大值点，记为 $x=c$. 此时 $f'(c)=0$，如右图所示，而在(a,c) 上，$f'(x)>0$，在(c,b) 上 $f'(x)<0$. 由拉格朗日中值定理，当 $x\in[a,c]$ 时，



$$f(x)=f'(\xi_1)(x-a)+f(a),\quad \xi_1\in(a,x).$$

由 $f'(x)$ 严格递减，$f'(\xi_1)<f'_+(a)$，注意到 $f(a)=0$，有

$$f(x)<f'_+(a)(c-a),x\in[a,c].$$

当 $x\in[c,b]$ 时，同理可得

$$f(x)<[-f'_-(b)](b-c),x\in[c,b].$$

于是
$$\frac{1}{f(x)}>\frac{1}{(c-a)f'_+(a)},x\in[a,c],$$

$$\frac{1}{f(x)}>\frac{1}{(b-c)(-f'_-(b))},x\in[c,b].$$

则
$$\int_a^b\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|dx=-\int_a^b\frac{f''(x)}{f(x)}dx=\int_a^c\frac{-f''(x)}{f(x)}dx+\int_c^b\frac{f''(x)}{f(x)}dx$$

$$>\int_a^c\frac{-f''(x)}{(c-a)f'_+(a)}dx+\int_c^b\frac{-f''(x)}{(b-c)(-f'_-(b))}dx$$

$$=\frac{1}{(c-a)f'_+(a)}[f'_+(a)-f'(c)]+\frac{1}{(b-c)(-f'_-(b))}[f'(c)-f'_-(b)]$$

$$=\frac{1}{c-a}+\frac{1}{b-c}=\frac{b-a}{(c-a)(b-c)}>(b-a)\frac{1}{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2}=\frac{4}{b-a}.$$

第四句话：对定限或变限积分，若被积函数或其主要部分为复合函数，则“不管三七二十一”先做变量替换使之成为简单形式 $f(u)$ 再说.

【例 10】求下列函数的导数(设 $f(u)$ 是 u 的连续函数)：

(1)$F(y)=\int_0^y f(x-y)dx$，求 $F'(y)$；　　(2)$F(x)=\int_0^{x^2}tf(x-t)dt$，求 $F'(x)$；

(3)$F(x)=\int_0^1 f(te^x)dt$，求 $F'(x)$；　　(4)$F(x)=\int_0^{x^2}xf(x+t)dt$，求 $F'(x)$.

【解】(1) $F(y)\xlongequal{令\ u=x-y}\int_{-y}^0 f(u)du$，则 $F'(y)=-f(-y)\cdot(-1)=f(-y)$.

(2) $F(x)\xlongequal{令\ u=x-t}\int_x^{x-x^2}(x-u)f(u)(-du)=-x\int_x^{x-x^2}f(u)du+\int_x^{x-x^2}uf(u)du$，

则 $$F'(x)=-\int_x^{x-x^2}f(u)du-x[f(x-x^2)\cdot(1-2x)-f(x)]$$

$$+(1-2x)(x-x^2)f(x-x^2)-xf(x)$$

$$=\int_{x-x^2}^{x} f(u)\mathrm{d}u+x^2(2x-1)f(x-x^2).$$

(3) $F(x)\xlongequal{\text{令 } u=te^x}\int_0^{e^x} f(u)\dfrac{1}{e^x}\mathrm{d}u=\dfrac{1}{e^x}\int_0^{e^x} f(u)\mathrm{d}u=e^{-x}\int_0^{e^x} f(u)\mathrm{d}u$,

则 $F'(x)=-e^{-x}\int_0^{e^x} f(u)\mathrm{d}u+e^{-x}f(e^x)\cdot e^x=f(e^x)-e^{-x}\int_0^{e^x} f(u)\mathrm{d}u.$

(4) $\int_0^{x^2} f(x+t)\mathrm{d}t\xlongequal{\text{令 } u=x+t}\int_x^{x+x^2} f(u)\mathrm{d}u$，于是有 $F(x)=x\int_x^{x+x^2} f(u)\mathrm{d}u$，则

$$F'(x)=\int_x^{x+x^2} f(u)\mathrm{d}u+x[f(x+x^2)(1+2x)-f(x)].$$

【例 11】 设 $f(x)$ 可微，且满足 $x=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^x tf(t-x)\mathrm{d}t$，求 $f(x)$.

【解】 $\int_0^x tf(t-x)\mathrm{d}t\xlongequal{\text{令 } u=t-x}\int_{-x}^0 (u+x)f(u)\mathrm{d}u=-\int_0^{-x} uf(u)\mathrm{d}u+x\int_{-x}^0 f(u)\mathrm{d}u.$

于是原方程变为 $x=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^{-x} uf(u)\mathrm{d}u-x\int_0^{-x} f(u)\mathrm{d}u.$

两边对 x 求导，得 $1=f(x)-(-x)f(-x)(-1)-\int_0^{-x} f(u)\mathrm{d}u-xf(-x)(-1).$

整理，得 $1=f(x)-\int_0^{-x} f(u)\mathrm{d}u$，

两边再对 x 求导，得 $0=f'(x)-f(-x)(-1)$，

即 $f'(x)=-f(-x)$， ①

上式两边对 x 求导，得 $f''(x)=f'(-x)$， ②

由 ①，② 得 $f''(x)=-f(x)$，

即 $f''(x)+f(x)=0$，

解此方程得 $f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x.$

注意到 $f(0)=1, f'(0)=-1$，故 $f(x)=\cos x-\sin x.$

【注】 第四句话可推广为：若给定的函数为抽象的复合函数，则运算之前应先做变量替换，使之成为简单的形式.

例如：$f[\varphi(x)]\xlongequal{\text{令 } u=\varphi(x)}f(u).$

【例 12】 设 $f(x^2-1)=\ln\dfrac{x^2}{x^2-2}$，$f[\varphi(x)]=\ln x$，计算 $\int\varphi(x)\mathrm{d}x$.

【解】 令 $x^2-1=t$，则 $f(t)=\ln\dfrac{t+1}{t-1}$，$f[\varphi(x)]=\ln\dfrac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1}=\ln x$，

$\Rightarrow \dfrac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1}=x \Rightarrow \varphi(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$，

故 $$\int\varphi(x)\mathrm{d}x=\int\frac{x+1}{x-1}\mathrm{d}x=x+2\ln|x-1|+C.$$

第一篇　高等数学

第一章　函数·极限·连续

§1.1　函　　数

一、函数的定义

设有两个变量 x 和 y，变量 x 的变域为 D，如果对于 D 中的每一个 x 值，按照一定的法则，变量 y 有一个确定的值与之对应，则称变量 y 为变量 x 的函数，记作

$$y = f(x)$$

x—— 自变量，y—— 因变量，变域 D 为定义域，记为 D_f，变量 y 的取值的集合称为函数的值域，记作 Z_f.

函数概念的两要素：

(1) 定义域 $\triangleq$ 自变量 x 的变化范围(若函数是解析式子表示的，则使运算有意义的实自变量值的集合即为定义域).

(2) 对应关系 $\triangleq$ 给定 x 值，求 y 值的方法.

【点拨】当且仅当给定的两个函数，其定义域和对应关系完全相同时，才表示同一函数，否则表示不同的函数.

【例 1.1】与连续函数 $f(x) = \ln x + \int_1^e f(x)\mathrm{d}x - f'(1)$ 等价的函数是

(A) $e^{\ln(\ln x)}$.

(B) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{x-1}{n+(x-1)k}(x>0)$.

(C) $\dfrac{1}{x}$ 的经过点$(-1,0)$的原函数.

(D) 方程 $xyy' = \ln x$ 满足 $y(1) = 0$ 的特解.　　【　】

【解】设 $A = \int_1^e f(x)\mathrm{d}x, B = f'(1)$，所以，$f(x) = \ln x + A - B$，有

$$A = \int_1^e f(x)\mathrm{d}x = \int_1^e (\ln x + A - B)\mathrm{d}x = 1 + (A-B)(e-1),$$

$B = f'(1) = (\ln x + A - B)'\big|_{x=1} = 1$，得 $A = 1$，所以，$f(x) = \ln x$.

对于(A)，$e^{\ln(\ln x)} = \ln x(x>1)$，与 $f(x)$ 的定义域不同.

(B) $$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{x-1}{n+(x-1)k} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{x-1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-1}{n}\cdot k} = \int_1^x \frac{1}{t}\mathrm{d}t$$

$$= \ln x(x>0),\quad 与 f(x) 等价.$$

(C) $\dfrac{1}{x}$ 的经过点$(-1,0)$的原函数为 $\ln(-x)$.