（第2版）

经济数学基础

JINGJI SHUXUE JICHU

主编 于伟建 万细仔

21世纪成人高等教育精品教材

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

经济数学基础

（第2版）

主　编　于伟建　万细仔
编写者　（以姓氏笔划为序）
于伟建　万细仔
朱道元　游亚新

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目（CIP）数据

经济数学基础/于伟建，万细仔主编. —2 版. —北京：北京理工大学出版社，2012.1

ISBN 978-7-5640-5256-0

Ⅰ.①经…　Ⅱ.①于…②万…　Ⅲ.①经济数学-高等学校-教材
Ⅳ.①F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 219812 号

出版发行／北京理工大学出版社
社　　址／北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编／100081
电　　话／(010)68914775(办公室)　68944990(批销中心)　68911084(读者服务部)
网　　址／http：// www. bitpress. com. cn
经　　销／全国各地新华书店
印　　刷／北京泽宇印刷有限公司
开　　本／787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张／11.25
字　　数／255 千字
版　　次／2012 年 1 月第 2 版　2012 年 1 月第 1 次印刷　　责任编辑／钟　博
印　　数／1～10000 册　　责任校对／周瑞红
定　　价／22.80 元　　责任印制／王美丽

再版前言

第二版主要是根据任课教师在实际教学中的感受和建议，对第一版中的第一章进行了修订，其它章节保持原版的内容不作大的变动，仅作局部改动. 这样可使本书能更好的和初等数学衔接，更适合成人学生的基础，更具有可读性. 总的修订比例占全书内容的五分之一.

本书由于伟建、游亚新、朱道元、万细仔合作编写完成. 全书共六章：第一章　函数、极限与连续（游亚新、万细仔执笔），第二章　导数与微分（于伟建执笔），第三章　中值定理与导数的应用（游亚新执笔），第四章　不定积分、 第五章　定积分（朱道元执笔），第六章　多元函数微积分（游亚新执笔）.

在本书编写过程中，广州大学继续教育学院王立新、鲍振邦两位老师对教材的编写提出了许多很好的建议，并得到教研科同仁的大力支持，在此表示感谢！

本书的出版得到了广州大学继续教育学院教材出版基金的资助，得到了广州大学领导和北京理工大学出版社的大力支持与帮助，在此一并表示感谢.

由于编者经验和水平所限，教材中一定存在缺点和不足，敬请专家和读者不吝指正.

编　者

2011 年 10 月

前　言

在科学技术飞速发展的今天，随着我国经济改革的不断深入和发展，管理、决策、社会经济生活中大量用到数学知识和方法，数学素养已成为公民基本素养的一部分，经济数学就自然而然地成为大学中众多专业的基础内容.

在目前成人高等教育课堂教学中，迫切需要适合成人教育特点、与成人学生实际基础相配套的高质量教材. 本书是根据教育部最新颁布的普通高等教育专科层次的教学要求编写的，兼顾当前成人教育的特点以及成人高等教育专升本入学考试的需要，从编写原则、理论体系、内容编排到知识引入、实例选择及计算处理，都充分考虑课堂教学的特点，使其既便于老师教，也便于学生学.

本教材由于伟建、万细仔、朱道元、游亚新等人编写. 全书共 6 章：第 1 章万细仔执笔，第 2 章于伟建执笔，第 3 章、第 6 章游亚新执笔，第 4 章、第 5 章朱道元执笔，本教材编写中，贯彻以应用为目的、以够用为度和少而精的原则，在保证逻辑性、连贯性、系统性和科学性的基础上，尽可能用实际问题引出相关概念和知识要点，由浅入深，逐渐展开. 用典型例子使学生加深对知识要点及如何运用已学知识的理解、减少理论论证，注重学生运算能力和分析问题、解决问题的能力培养. 重点放在理论联系实际，做到基本定理直观化，基本运算公式化、模式化，使学生易掌握. 本书可作为成人高等教育中管理、经济、金融和会计类等专业经济数学课程教材.

在本教材的编写过程中，广州大学数学与信息科学学院何建勋教授对教材的编写提出了许多建设性的建议并认真审阅了全书. 同时，本书的出版得到了广州大学继续教育学院教材出版基金的资助，广州大学领导和北京理工大学出版社为本书的出版给予了大力支持与帮助，在此一并表示感谢.

由于编者经验和水平所限，教材中一定存在缺点和不足，敬请专家和读者不吝指正.

编　者

目　　录

第1章　函数、极限与连续

学习目标

1. 了解反函数、函数单调性、奇偶性、有界性、周期性的概念；无穷小、无穷大的概念；闭区间上连续函数的性质.

2. 理解函数、基本初等函数、复合函数、初等函数、分段函数的概念；需求函数与供给函数的概念；函数极限的定义；无穷小的性质；函数在一点连续的概念；初等函数的连续性.

3. 掌握相同函数的判断；复合函数的复合过程；复合函数的分解；反函数的求法；极限的四则运算法则.

4. 会用函数关系描述经济问题；对无穷小进行比较；用两个重要极限求极限；判断间断点的类型；求连续函数和分段函数的极限.

函数是被广泛应用于自然科学、工程技术以及经济生活中的数学概念之一，其重要意义远远超出了数学范围. 函数作为相关变量之间的关系式，是运用数学模型研究实际问题的重要手段. 极限概念是研究变量在某一过程中的变化趋势时引出的. 它是有限运算（初等数学）过渡到无限运算（高等数学）的桥梁，是微积分的基础. 微积分学中的几个重要概念——导数和积分都是用极限表述的；微积分学中的很多定理也是用极限方法推导出来的.

1.1　函　　数

一、函数的概念

1. 常量与变量

在日常生活、生产活动和经济活动中，经常遇到各种不同的量，例如，身高、气温、面积、产量、收入、成本等. 这些量可分为两类：一类量在考察过程中不发生变化，只取一个固定的值，我们把它称作**常量**. 例如，圆周率π永远是个不变的量，飞机上的乘客数在飞行过程中不会发生变化，一个国家的国土面积在一段时间内是固定不变的. 光在真空中的传播速度也是一个固定的量，这些都是常量. 另一类量在考察过程中是变化的，可以取不同的数值，我们称之为**变量**. 例如，一天中的气温、飞机飞行过程中离地面的高度、离出发地、目的地的距离、陨石下落过程中的速度等都是在不断变化的，它们都是变量.

在理解常量与变量时，应注意下面几点：

（1）常量与变量依赖于所研究的过程，同一个量，在某个过程中可认为是常量，而在另一个过程中则可能是变量；反过来也是同样的. 例如，利率在一定时期内是固定的，而从长远来看是变化的.

（2）从几何意义上讲，常量对应着实数轴上的定点，变量则对应着实数轴上的动点.

（3）一个变量所能取的数值的集合叫做这个变量的变动区域.

有一类变量，如气温、时间，它们的取值可介于两个实数之间的任意实数值，叫做连续变量，连续变量的变动区域常用区间表示.

习惯上我们用 x、y、z、u、v、w 表示变量，用 a、b、c、d 表示常量.

2. 函数的概念

例 1 某产品专卖店，场租和人工费为 10 000 元，每件产品的进货价为 2 000 元，则该专卖店销售量 x（件）与总成本 y（元）之间的关系式为

$$y=10\,000+2\,000x \quad (x\geqslant 0)$$

显然，销售量 x 取任何一个合理值，总成本 y 都有一个确定值与它对应，我们说总成本 y 是销售量 x 的函数.

例 2 根据新税法，个人工资、薪金所得，以每月收入额减除费用 3 500 元后的余额为应纳税所得额，工资、薪金所得适用超额累进税率，税率为 3%～45%，修改后的个税法于 2011 年 9 月 1 日起施行.

个人月收入 x（元）与其应纳个人所得税税额 T（元）之间的关系为

$$T=\begin{cases} 0, & 0<x\leqslant 3\,500 \\ 0.03(x-3\,500), & 3\,500<x\leqslant 5\,000 \\ 0.1(x-3\,500)-105, & 5\,000<x\leqslant 8\,000 \\ 0.2(x-3\,500)-555, & 8\,000<x\leqslant 12\,500 \\ 0.25(x-3\,500)-1\,005, & 12\,500<x\leqslant 38\,500 \\ 0.3(x-3\,500)-2\,755, & 38\,500<x\leqslant 58\,500 \\ 0.35(x-3\,500)-5\,505, & 58\,500<x\leqslant 83\,500 \\ 0.45(x-3\,500)-13\,505, & x>83\,500 \end{cases}$$

居民的月收入 x 取确定的值，其应纳个人所得税税额 T 就完全由 x 确定，我们说应纳个人所得税税额 T 是个人月收入 x 的函数.

上面两个例子有一个共同特点：就是两个变量之间存在一个对应关系式.

定义 1 设 x 和 y 是两个变量，若变量 x 在非空数集 D 内任取一数值时，变量 y 依照某一规则 f 总有一个确定的数值 $f(x)$ 与之对应，则称变量 y 为变量 x 的**函数**，记作 $y=f(x)$. 这里，x 称作**自变量**，y 称作**因变量**或**函数**，f 是函数符号，它表示 y 与 x 的对应规则. 有时函数符号也可以用其他字母来表示，如 $y=g(x)$ 或 $y=Q(x)$ 等.

集合 D 称作函数的**定义域**，相应的 y 值的集合：$R(f)=\{f(x)|x\in D\}$ 称作函数的**值域**.

当自变量 x 在其定义域内取定某确定值 x_0 时，因变量 y 按所给函数关系 $y=f(x)$ 求出的对应值 y_0 叫做当 $x=x_0$ 时的**函数值**（或函数在 x_0 处的值），记作 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$.

例 3 设 $f(x)=\sqrt{1+x^2}$，求 $f(0),f(2),f(-x),f(x+1)$.

解：$f(0)=\sqrt{1+0^2}=1$

$f(2)=\sqrt{1+2^2}=\sqrt{5}$

$f(-x)=\sqrt{1+(-x)^2}=\sqrt{1+x^2}$

$f(x+1)=\sqrt{1+(x+1)^2}=\sqrt{2+2x+x^2}$

3. 函数的表示

我们通常采用分析法（或称解析法、公式法）、图示法及表格法三种方法表示函数.

（1）分析法：两个变量之间的函数关系，通过公式或分析式子给出. 如例 1、例 2 中的函数关系式.

（2）图示法：用坐标平面的曲线表示两个变量间函数关系的方法称作**图示法**. 如气象站用自动温度记录仪记录下来的某地一昼夜气温变化曲线，就是气温与时间函数关系的图示法表示. 同样医疗仪器记录的脑电波、心电图也是用图示法表示用于诊断的变量之间的函数关系式.

（3）表格法：用表格列出自变量中的一系列值与其对应的函数值的表示方法称作**表格法**. 如水稻种植中产量与施肥量的函数关系，可通过试验中不同施肥量与产量的表格来表示.

4. 函数的定义域及相同的函数

实际中的函数往往指定了自变量的取值范围，即给定了定义域. 但从数学上考虑，对给定的函数表达式，使式子有意义，x 的取值范围可能大于实际问题中 x 的取值范围，如例 1 中，实际问题中的 x 必须非负，而数学式子 $y=10\,000+2\,000x$ 则对所有 $x\in\mathbf{R}$ 都有意义.

定义 2　使函数表达式 $y=f(x)$ 有意义的 x 的最大取值范围称作函数 $y=f(x)$ 的**自然定义域**.

从定义知，求一个函数的自然定义域，就是将实轴去掉函数没有意义的点，即满足下述条件点的交集：

（1）分式中使分母不为零的点；

（2）开偶数次方中，使根式内式子为非负的点；

（3）对数函数中使真数大于零的点；

（4）$\arcsin u$，$\arccos u$ 中使 $|u|\leqslant 1$ 的点；

（5）$f(x)^{g(x)}$ 中使式子有意义且 $f(x), g(x)$ 不同时为零的点.

例 4　函数 $y=\dfrac{4x}{\sqrt{9-x^2}}+\ln(x^2+x-2)-2\arcsin\dfrac{2x-1}{3}$ 的自然定义域为 $D=$__________.

解：D 由满足下述三个条件的点组成

$$\begin{cases}9-x^2>0\\ x^2+x-2>0\\ \left|\dfrac{2x-1}{3}\right|\leqslant 1\end{cases}$$

即 $D=(1，2]$，故填上 $(1，2]$ 即可.

定义 3　设函数 $y=f(x)$，$z=g(u)$ 是两个分别定义在 D_1，D_2 上的函数，如果 $D_1=D_2$，且对任意 $x\in D_1=D_2$，都有 $f(x)=g(x)$，则称两个函数是相同的.

从定义不难看出，两个相同的函数具有相同的定义域和相同的对应法则. 因而要判断两个函数是否相同，首先检验它们的定义域是否相同，其次再看它们的对应法则是否一致（对

解析式进行恒等变换，看看表达式是否一致）.

例 5 下列函数对中，表示相同函数的是（ ）.

A. $f(x)=1$ 与 $g(x)=\dfrac{\sqrt{x^2}}{|x|}$ B. $f(x)=x$ 与 $g(x)=\sqrt{x^2}$

C. $f(x)=x$ 与 $g(x)=\left(\sqrt{x}\right)^2$ D. $f(x)=\sqrt{x^2+1}+x$ 与 $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}$

解：正确的选择是 D，故在括号中填 D.

A. $f(x)=1$ 的定义域为 $D_1=(-\infty,\ +\infty)$，而 $g(x)=\dfrac{\sqrt{x^2}}{|x|}$ 的定义域为 $D_2=(-\infty,\ 0)\cup(0,\ +\infty)$.

B. $f(x)=x$ 与 $g(x)=\sqrt{x^2}$ 定义域相同，都是$(-\infty,+\infty)$，但 $g(x)=\sqrt{x^2}=|x|$，当 $x<0$ 时，$f(x)\neq g(x)$.

C. $f(x)=x$ 的定义域 $D_1=(-\infty,\ +\infty)$，而 $g(x)=\left(\sqrt{x}\right)^2$ 的定义域为 $D_2=[0,\ +\infty)$.

D. 因为 $x^2+1>0$，且 $\sqrt{x^2+1}-x\neq 0$，故 $f(x)$，$g(x)$的定义域都是$(-\infty,\ +\infty)$，对 $g(x)$的分母进行有理化有

$$g(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}=\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}=\sqrt{x^2+1}+x=f(x)$$，因而 D 是正确的选择.

例 6 下列函数对中，表示不同函数的是（ ）.

A. $f(x)=1$ 与 $g(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$

B. $f(x)=x$ 与 $g(x)=\ln \mathrm{e}^x$

C. $f(x)=\dfrac{\pi}{2}$ 与 $g(x)=\arcsin x+\arccos x$

D. $f(x)=\ln|\sec x+\tan x|$ 与 $g(x)=-\ln|\sec x-\tan x|$

解：正确的选择应为 C，故在括号中填 C.

A，B 很容易验证 $f(x)=g(x)$是相同的函数.

C. $f(x)=\dfrac{\pi}{2}$ 的定义域为 $D_1=(-\infty,\ +\infty)$，而 $g(x)=\arcsin x+\arccos x$ 的定义域则为 $D_2=[-1,\ 1]$，显然 $D_1\neq D_2$，故 C 是正确选择. 由三角恒等式：$\sec^2 x-\tan^2 x=1$，易知 D 中的 $f(x)$，$g(x)$相同.

5. *分段函数*

对例 2 中给出的个税函数，个税额 T 与个人收入 x 的表述式不能用一个统一的式子来表示，而必须根据 x 的 8 个不同范围用 8 个不同的式子来表示. 我们称这种将定义域分成若干部分，函数关系由不同的式子分段表达的函数称为**分段函数**.

注：分段函数是由几个关系式合起来表示一个函数，而不是几个函数，对自变量 x 在定义域内的某个值，则有唯一一个对应规则确定对应的 y 值，分段函数的定义域是各段自变量取值集合的并.

例 7 对例 2 中的税收函数，求：

（1）若某居民 2011 年 9 月份的应税收入为 10 000 元，则其应交个人所得税是多少？

（2）若某居民 2011 年 9 月份交个人所得税 5 000 元，则其该月应税收入是多少？

（3）函数的定义域.

解：（1）因为 $x=10\ 000$ 元，$8\ 000<x\leqslant 12\ 500$

故 $T(10\ 000)=0.2\times(10\ 000-3\ 500)-555=745$（元）

（2）由于 $T(12\ 500)=0.25\times(12500-3\ 500)-1005=1\ 245<5\ 000$

$T(38\ 500)=0.25\times(38\ 500-3\ 500)-1\ 005=7\ 745>5\ 000$

故该居民 9 月份月收入 x 满足 $12\ 500<x<38\ 500$

根据：$5\ 000=0.25(x-3\ 500)-1\ 005$

得 $x=27\ 520$（元）

（3）$D=[0,\ 3\ 500]\cup(3\ 500,\ 5\ 000]\cup\cdots\cup(83\ 500,\ +\infty)=[0,\ +\infty)$.

二、函数的基本性态

我们比较感兴趣的几种函数基本性态是：有界性、单调性、奇偶性和周期性.

1. 函数的有界性

定义 4　设函数 $y=f(x)$在集合 D 上有定义，如果存在一个正数 M，对于所有的 $x\in D$，恒有$|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$在 D 上是**有界的**. 如果不存在这样的正数 M，则称 $f(x)$在 D 上是**无界的**.

例如，$y=2\sin x+3\cos x+1$ 在其定义域 $(-\infty,\ +\infty)$内，都有

$$|2\sin x+3\cos x+1|\leqslant 2|\sin x|+3|\cos x|+1\leqslant 6$$

所以 $y=2\sin x+3\cos x+1$ 在$(-\infty,\ +\infty)$内是有界的.

函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在$(0,\ +\infty)$内是无界的.

函数 $f(x)$在$[a,\ b]$有界的几何意义是：曲线 $y=f(x)$在区间$[a, b]$内部分限制在 $y=-M$ 和 $y=M$ 两条直线之间（见图 1-1）. 函数在(a, b)无界的几何意义是：不管多大的 M，在直线 $y=-M$，$y=M$ 外都有曲线 $y=f(x)$在（a，b）内的点.

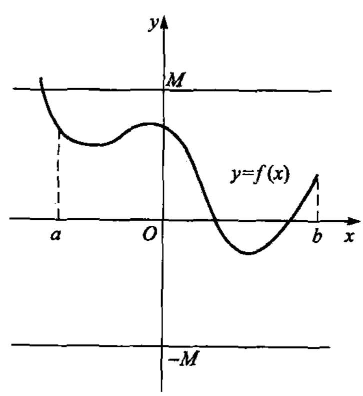

图 1-1

对函数的有界性，要注意以下两点：

（1）当函数 $y=f(x)$在区间$[a,\ b]$内有界时，正数 M 的取法不是唯一的. 如在$(-\infty, +\infty)$内有界的函数 $y=2\sin x+3\cos x+1$，M 可取 6，也可取任意大于 6 的实数.

（2）有界性是依赖于区间的. 例如，$y=\dfrac{1}{x}$ 在$(0,\ +\infty)$内是无界的，但在$(1,\ +\infty)$内则是有界的.

2. 函数的单调性

定义 5　设函数 $y=f(x)$在数集 D 上有定义，如果对 D 上任意两点 x_1, x_2 满足 $x_1<x_2$，都有 $f(x_1)<f(x_2)$[或 $f(x_1)>f(x_2)$]，则称 $f(x)$在 D 上**单调增加**（或**单调减少**）.

函数 $f(x)$在数集 D 上单调增加、单调减少统称为函数 $f(x)$在数集 D 上单调，如果 D 是区间，则称该区间为 $f(x)$的单调区间.

单调增加函数的图形是沿 x 轴的正向上升的曲线（图 1–2），单调减少函数的图形是沿 x 轴正向下降的曲线（图 1–3）.

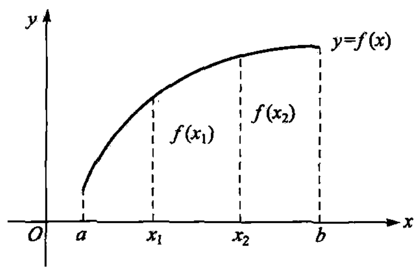

图 1–2

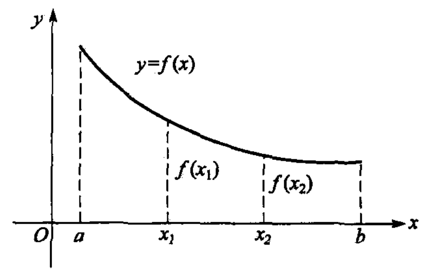

图 1–3

例 8 讨论函数 $y=x^2$ 的单调性.

解：令 $f(x)=x^2$，则 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，

对任意 $x_1<x_2\leqslant 0$，有 $f(x_1)=x_1^2>x_2^2=f(x_2)$，所以 $f(x)=x^2$ 在 $(-\infty,0]$ 内单调减少.

对任意 $0<x_1<x_2$，有 $f(x_1)=x_1^2<x_2^2=f(x_2)$，所以 $f(x)=x^2$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加.

注：利用 $y=x^2$ 的图像很容易观察出上述结论.

3. 函数的奇偶性

定义 6 如果数集 D 满足：对任意 $x\in D$，都有 $-x\in D$，且 $f(-x)=-f(x)$ [或 $f(-x)=f(x)$] 则称 $f(x)$ 是数集 D 上的**奇函数**（或**偶函数**）.

奇函数的图像关于原点对称（图 1–4），偶函数的图像关于 y 轴对称（图 1–5）.

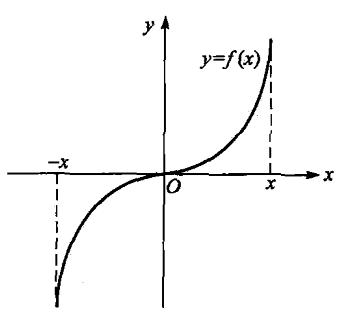

图 1–4

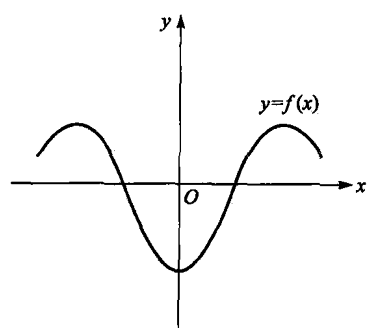

图 1–5

例 9 下列函数中，不是奇函数的是（　　）.

A. $f(x)=\dfrac{1}{e^x+1}-\dfrac{1}{2}$　　B. $f(x)=\left(1-\dfrac{2}{e^x+1}\right)\cos x$

C. $f(x)=(1+x)\left(\dfrac{1}{e^x+1}-\dfrac{1}{2}\right)$　　D. $f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$

解：选择 C.

对于 A，$f(-x)=\dfrac{1}{e^{-x}+1}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{e^x}{e^x+1}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{(e^x+1)-1}{e^x+1}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{e^x+1}=-f(x)$，所以 $f(x)$ 为奇函数. 同理可验证 B、D 中的 $f(x)$ 也是奇函数，只有 C 是正确的选择.

例 10 下列函数中，是偶函数的是（　　）.

A. $f(x)=\frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})$

B. $f(x)=\left(\frac{1}{e^{x}+1}-\frac{1}{2}\right)\sin x$

C. $f(x)=(1+x^{2})\frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}$

D. $f(x)=\sqrt{x^{2}+1}+x$

解：选择 B，对于 B 中的$f(x)$有

$$\begin{aligned}f(-x)&=\left(\frac{1}{e^{-x}+1}-\frac{1}{2}\right)\sin(-x)\\&=\left(\frac{e^{x}}{e^{x}+1}-\frac{1}{2}\right)(-\sin x)=\left[\frac{(e^{x}+1)-1}{e^{x}+1}-\frac{1}{2}\right](-\sin x)\\&=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{e^{x}+1}\right)(-\sin x)=\left(\frac{1}{e^{x}+1}-\frac{1}{2}\right)\sin x\\&=f(x)\end{aligned}$$

故$f(x)$是偶函数.

可以直接验证 A，C 中的$f(x)$为奇函数，而 D 中的$f(x)$为非奇非偶函数，只有 B 是正确的选择.

4. 函数的周期性

定义 7　设函数$y=f(x)$在D上有定义，如果存在正数T，使得对任意$x\in D$，有$x+T\in D$，且$f(x+T)=f(x)$ 恒成立，则称函数$f(x)$为**周期函数**，满足等式$f(x+T)=f(x)$ 的最小正数T称为函数的**周期**.

例如，$y=\sin x$，$y=\cos x$ 是周期为 2π 的周期函数，$y=\tan x, y=\cot x$ 是周期为 π 的周期函数.

定理 1.1　设函数$y=f(x)$ 是D上周期为T的周期函数，则$F(x)=f(ax+b)$（$a\neq 0$ 为常数，b 也是常数）是周期为$\frac{T}{|a|}$的周期函数.

根据定理，我们易知$y=\sin(2x+1)$是周期为$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$的周期函数.

三、复合函数与反函数

1. 复合函数

引例：设某厂生产某种产品，产品销售收入y是产量q的函数，即$y=R(q)$；而产量q又是生产工时t的函数，即$q=q(t)$，则该厂销售收入是生产工时的函数，即$y=R[q(t)]$.

在日常生活或生产实践中，表现事物之间的关系往往是错综复杂的，因此在数学中表示自然规律、生产规律的函数结构也是复杂的. 通常情况下，我们遇到的函数往往不是基本初等函数，而是由这些基本初等函数所构造的较为复杂的函数. 也就是说，需要把两个或两个以上的函数组合成另一个新的函数.

如由$y=\sqrt{u}$，$u=1-x^{2}$，当$|x|\leqslant 1$时，通过变量u就建立了变量x与变量y之间的对应关系，即$y=\sqrt{1-x^{2}}$，$|x|\leqslant 1$；这时称y是x的复合函数.

定义 8　设y是u的函数$y=f(u)$，而u是x的函数$u=\phi(x)$，$x\in D$. 如果$u=\phi(x)$的值域或其部分包含在$y=f(u)$的定义域中，则y通过中间变量u构成x的函数，称为x的复合函

数，记作：

$$y=f[\phi(x)]$$

其中，y 是因变量，u 是中间变量，x 是自变量.

按定义的要求可知，构建复合函数的前提条件就是：**内层函数的值域与外层函数的定义域的交不空**. 也就是说，内层函数必须有函数值落在外层函数的定义域内；否则就会成为无意义的函数.

例如，$y=\sqrt{u}$，$u=\sin x-2$，复合起来 $y=\sqrt{\sin x-2}$ 在实函数范围内就无意义了.

例 11 设 $f(x)=\dfrac{2}{2-x}$，求 $f[f(x)]$.

解

$$f[f(x)]=\frac{2}{2-f(x)}=\frac{2}{2-\dfrac{2}{2-x}}=\frac{2-x}{1-x}$$

它的定义域是 $(-\infty,\ 1)\cup(1,\ 2)\cup(2,\ +\infty)$.

例 12 设 $f(x)=x+2$，$\phi(x)=x^2+3$，求（1）$f[\phi(x)]$；（2）$\phi[f(x)]$.

解：（1）将 $u=\phi(x)=x^2+3$ 代入 $f(u)=u+2$ 得

$$f[\phi(x)]=\phi(x)+2=(x^2+3)+2=x^2+5$$

（2）将 $u=f(x)=x+2$ 代入 $\phi(u)=u^2+3$ 得

$$\phi[f(x)]=[f(x)]^2+3=(x+2)^2+3=x^2+4x+7$$

从上例中可以看出，复合函数 $f[\phi(x)]$ 与 $\phi[f(x)]$ 一般不是相同的函数.

在实际应用中，既要知道由简单函数构造成复合函数，同时也要会从复合函数中分解为简单函数. 在后面的函数求导时，经常需要将一个复杂的函数表示成若干个简单函数的复合，我们称这一过程为**复合函数的分解**.

如 $y=\sqrt{2+\sin(1+\ln x)}$ 是由以下简单函数 $y=\sqrt{u}$，$u=2+\sin v$，$v=1+\ln x$ 复合而成的.

例 13 将下列复合函数分解.

（1）$y=\sin^2 x$　　（2）$y=\mathrm{e}^{\sin^2 x}$

（3）$y=\sqrt{\ln(2x+3)}$　　（4）$y=\ln[\sin(\cos x)]$

（5）$y=\sqrt{1-\sin^3 x}$　　（6）$y=\tan\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

解：（1）令 $u=\sin x$，则 $y=\sin^2 x$ 是由 $y=u^2$，$u=\sin x$ 复合而成.

（2）$y=\mathrm{e}^{\sin^2 x}$ 是由 $y=\mathrm{e}^u$，$u=v^2$，$v=\sin x$ 复合而成.

（3）$y=\sqrt{\ln(2x+3)}$ 是由 $y=\sqrt{u}$，$u=\ln v$，$v=2x+3$ 复合而成.

（4）$y=\ln[\sin(\cos x)]$ 是由 $y=\ln u, u=\sin v, v=\cos x$ 复合而成.

（5）$y=\sqrt{1-\sin^3 x}$ 是由 $y=\sqrt{u}, u=1-v^3, v=\sin x$ 复合而成.

（6）$y=\tan\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ 是由 $y=\tan u, u=v^{-\frac{1}{2}}, v=x^2+1$ 复合而成.

例 14 已知 $f\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$，求 $f(x)$.

解：等价于已知 $u=\phi(x)=x-\dfrac{1}{x}$ 和 $f[\phi(x)]=x^2+\dfrac{1}{x^2}$，求 $f(u)$ 的问题.

因为
$$f[\phi(x)]=x^2+\frac{1}{x^2}=x^2-2+\frac{1}{x^2}+2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2=\phi^2(x)+2$$

所以
$$f(u)=u^2+2$$

即
$$f(x)=x^2+2.$$

例 15　已知 $f(x+2)=x^2+3x+5$，求 $f(x)$.

解：令 $u=x+2$，则 $x=u-2$

代入得
$$f(u)=(u-2)^2+3(u-2)+5=u^2-u+3$$

所以
$$f(x)=x^2-x+3.$$

2. 反函数

引例：设某商品的市场需求量 Q 与商品的价格 p 之间存在关系：$Q=10\,000-20p$（需求函数），则商品的价格 p 与商品的供给量 Q 之间的关系为 $p=500-\dfrac{1}{20}Q$（价格函数）.

定义 9　设 $y=f(x)$是定义在 D 上的一个函数，如果对任意 $y\in R(f)=\{f(x)|x\in D\}$，都存在唯一的一个 x 满足 $y=f(x)$，则对应 $y\to x$ 就定义了一个 $R(f)$上的函数：$x=\phi(y)$，称作函数 $y=f(x)$ 的反函数. 而原函数 $y=f(x)$称为**直接函数**.

定理 1.2　若 $y=f(x)$是 D 上的单调函数，则 $y=f(x)$一定存在反函数 $x=\phi(y)$，且 $x=\phi(y)$ 也是**单调函数**.

习惯上，我们喜欢将自变量用 x 表示，因变量用 y 表示，将 $y=f(x)$反函数 $x=\phi(y)$记成 $y=\phi(x)$ 的形式.

求给定函数 $y=f(x)$的反函数 $y=\phi(x)$的步骤：

（1）从方程 $y=f(x)$中解出 $x=\phi(y)$；

（2）改变自变量和因变量记号得 $y=\phi(x)$；

例 16　求下列函数的反函数

（1）$y=x^2\quad(x\geqslant0)$

（2）$y=\log_a x$

（3）$y=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$

解：（1）由 $y=x^2$　得 $x=\pm\sqrt{y}$

因为 $x\geqslant0$　所以 $x=\sqrt{y}$

所以 $y=\sqrt{x}$是$y=x^2\,(x\geqslant0)$的反函数.

（2）由 $y=\log_a x$ 得 $x=a^y$

所以 $y=a^x$ 是 $y=\log_a x$ 的反函数.

（3）由 $y=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$ 得 $\sqrt{x^2+1}+x=\mathrm{e}^y$　①

因为
$$\sqrt{x^2+1}+x=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}=\mathrm{e}^y$$

所以
$$\sqrt{x^2+1}-x=\mathrm{e}^{-y}\qquad②$$

①-②得
$$x=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^y-\mathrm{e}^{-y})$$

所以 $y=\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$ 的反函数为 $y=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$.

由于 $x=\phi(y)$是从 $y=f(x)$解出来的，因而，在同一坐标平面上，其图像就是同一条曲线，而 $y=\phi(x)$的图像无非是 $x=\phi(y)$图像中 x 轴换成 y 轴，y 轴换成 x 轴. 因此，如果在同一坐标平面中画出 $y=f(x)$与其反函数 $y=\phi(x)$的图像，则两个图形关于 $y=x$ 对称（图 1–6）. 因此，$y=f(x)$的反函数 $y=\phi(x)$的反函数图像与 $y=f(x)$完全一致，故反函数 $y=\phi(x)$的反函数就是直接函数 $y=f(x)$. 所以 $y=a^x$ 的反函数为 $y=\log_a x$； $y=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ 的反函数为 $y=\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$.

四、基本初等函数和初等函数

在数学的发展过程中，形成了最简单、最常用的六类函数：常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数、统称为基本初等函数. 它们是微积分中所研究对象的基础，利用这些基本初等函数可以构造出更加广泛的函数.

1. 常数函数 $y=C$

常值函数 $y=C$ 是定义在$(-\infty, +\infty)$上的函数，对任意自变量 x 的取值，函数值都是等常数 C，所以，它的图像是过点$(0, C)$且平行于 x 轴的直线（图 1–7），它是偶函数.

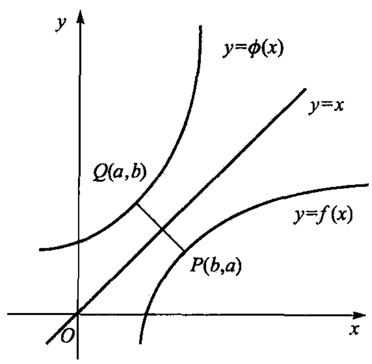

图 1–6

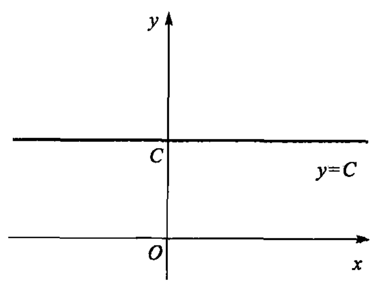

图 1–7

2. 幂函数

函数 $y=x^{\mu}$(μ 为实数)叫做**幂函数**. 它的定义域和性质随μ 的不同而变化，但是$(0, +\infty)$内幂函数总是有意义，图形经过$(1, 1)$点（图 1–8，图 1–9）.

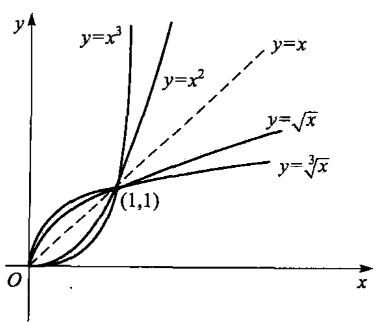

图 1–8

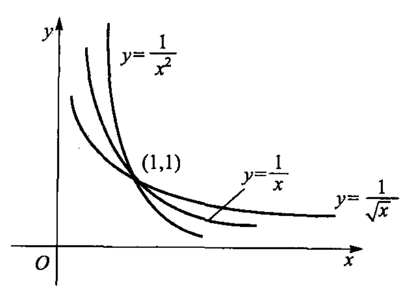

图 1–9