中国科学院考研指定参考书

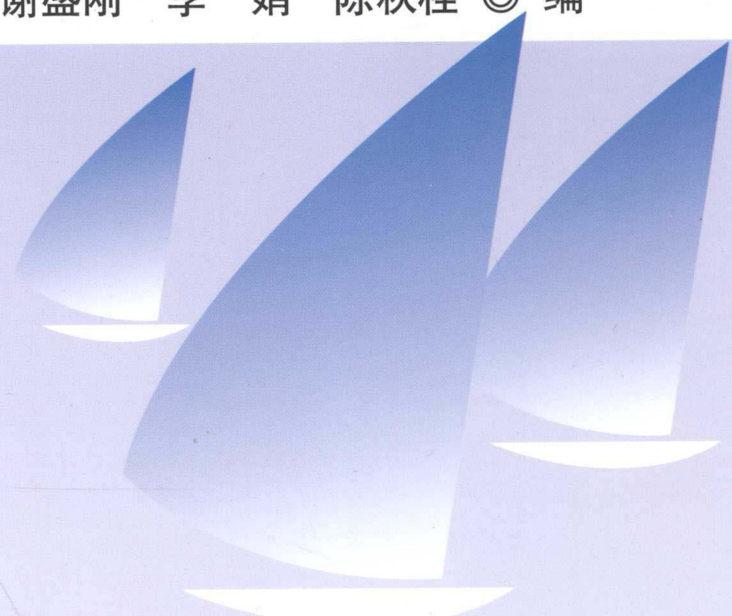
普通高等教育"十一五"国家级规划教材

中国科学技术大学数学教学丛书

微积分（下）

第二版

谢盛刚　李　娟　陈秋桂 ◎ 编



科学出版社

内 容 简 介

本书第一版分上、下两册，分别于2004年、2005年出版，作为教材使用效果良好，并被选为普通高等教育"十一五"国家级规划教材. 第二版书仍然分为上、下两册. 上册主要内容包括极限与连续、一元函数的微分学、不定积分、定积分、常微分方程和实数集的连续性. 下册包括无穷级数、多元函数的微分学、重积分、曲线积分和曲面积分、广义积分和含参变量的积分、Fourier 分析. 本书基础理论完整严密，论述简明扼要，同时又避开了枝节问题的干扰，使重点突出、主线清晰.

本书适合理工科大学一年级本科生使用.

图书在版编目(CIP)数据

微积分 · 下/谢盛刚，李娟，陈秋桂编. —2版. —北京：科学出版社，2011

ISBN 978-7-03-029850-8

普通高等教育"十一五"国家级规划教材 · 中国科学技术大学数学教学丛书

I. 微… II. ①谢… ②李… ③陈… III. 微积分-高等学校-教材 IV. O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010) 第 259383 号

责任编辑：张中兴 王国华 / 责任校对：陈玉凤

责任印制：张克忠 / 封面设计：耕者设计工作室

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

骏杰印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2004年7月第 一 版 开本：B5(720 × 1000)

2011年1月第 二 版 印张：18 1/4

2011年1月第七次印刷 字数：365 000

印数：12 501—16 500

定价：34.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

目　　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第 7 章　无 穷 级 数

无穷级数是数值计算及表示函数的一个重要工具. 本章将介绍: 数项级数的基本概念、性质和收敛的判别法; 一类重要的函数项级数 —— 幂级数的性质; 函数项级数一致收敛的判别法, 及其逐项求极限、逐项积分及逐项微商等问题.

§7.1　数 项 级 数

7.1.1　无穷级数及其收敛性

设有数列 $\{a_n\}$, 把它的项依次相加, 得形式的和式

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots, \tag{7.1.1}$$

称为无穷级数, 其中 a_n 称为级数的通项. 由于一个级数是无穷多项累加, 所以实际上是一个极限过程. 一个合理的算法应是先算出前 n 项的和

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

再求 $\{S_n\}$ 的极限. 由此就产生了下面的定义.

定义 7.1.1　$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ 称为级数 (7.1.1) 的第 n 个部分和. 如果 $\{S_n\}$ 收敛于 $S\,(\lim S_n = S)$, 则称级数 (7.1.1) 收敛, S 称为级数的和, 并记

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

如果 $\{S_n\}$ 没有极限, 则称级数 (7.1.1) 发散.

可见讨论无穷级数的敛散性就是讨论它的部分和数列 $\{S_n\}$ 的敛散性.

例 7.1.1　讨论等比级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots \tag{7.1.2}$$

的敛散性.

解　1° 当 $|q| < 1$ 时,

$$S_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q} \ \to\ \frac{1}{1-q};$$

2° 当 $|q| > 1$ 时,

$$S_n = \frac{1 - q^n}{1 - q} \to \infty;$$

3° 当 $q = 1$ 时,

$$S_n = n \to +\infty;$$

4° 当 $q = -1$ 时,

$$S_n = \frac{1 - (-1)^n}{2}.$$

综上所述, 等比级数 (7.1.2) 仅当 $|q| < 1$ 时收敛, 其和为 $\dfrac{1}{1-q}$.

例 7.1.2　讨论级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n} \tag{7.1.3}$$

的敛散性.

解　由于

$$\begin{aligned} S_n &= (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + \cdots + (\ln(n+1) - \ln n) \\ &= \ln(n+1) \to +\infty, \end{aligned}$$

所以级数 (7.1.3) 是发散的.

因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛就是其部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛, 由极限的 Cauchy 判则就可以得到级数收敛的 Cauchy 判则.

定理 7.1.1(Cauchy 判则)　级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充分必要条件是: $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ n_0 \in \mathbf{N}$, 使得当 $n > n_0$ 时, 不等式

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| = |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$$

对 $\forall\ p \in \mathbf{N}$ 成立.

证　$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 $\Leftrightarrow$ $\{S_n\}$ 为 Cauchy 列 $\Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0, \exists\ n_0 \in \mathbf{N}$, 当 $n > n_0$ 时, 不等式

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| = |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$$

对 $\forall\ p \in \mathbf{N}$ 成立.　□

例 7.1.3　证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ 收敛.

证

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2}\right|\\<&\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}\\=&\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n},\end{aligned}$$

因此, 对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, 当 $n>n_0$ 时,

$$\left|\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2}\right|<\varepsilon$$

对 $\forall p\in\mathbf{N}$ 均成立, 由 Cauchy 判则得知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛.

例 7.1.4 证明调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

证 令 $p=n$

$$\left|\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right|\geqslant\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}.$$

上式对 $\forall n\in\mathbf{N}$ 都成立, 所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

7.1.2 收敛级数的性质

下面证明收敛级数的一些简单性质.

定理 7.1.2 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 则 $\lim a_n=0$.

证 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=S$, 即有

$$\lim S_n=S.$$

由于 $a_n=S_n-S_{n-1}$, 故

$$\lim a_n=\lim(S_n-S_{n-1})=\lim S_n-\lim S_{n-1}=0.$$ □

例如 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ 发散, 因为 $\lim(-1)^n$ 不存在. 又如 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\sin\frac{1}{n}$ 发散, 因为 $\lim n\sin\frac{1}{n}=1\neq0$.

必须注意, $\lim a_n = 0$ 并不能保证 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 例如在例 7.1.4 中, $\lim \frac{1}{n} = 0$, 但级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散.

由于级数是有限和的极限, 所以由有限和的有关运算性质并取极限就得到下面的定理.

定理 7.1.3 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛, α, β 为常数, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n)$ 也收敛, 并有

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

定理 7.1.4 在级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 中改变有限项的值, 不影响级数的敛散性.

证 设 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 是改变 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 中有限项后得到的级数. 由于这两个级数只有有限多项不同, 故 $\exists\, k \in \mathbf{N}$, 使得 $a_n = b_n$ 对 $n \geqslant k$ 都成立. 记 $A_m = \sum_{n=1}^{m} a_n$, $B_m = \sum_{n=1}^{m} b_n$, 于是当 $m \geqslant k$ 时, 就有

$$A_m - B_m = A_k - B_k.$$

因此 $\{A_m\}$ 和 $\{B_m\}$ $\left(\text{即} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 和 } \sum_{n=1}^{\infty} b_n\right)$ 有相同的敛散性. □

由定理 7.1.4 知, 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 和为 S, 则级数

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots \tag{7.1.4}$$

也收敛. 式 (7.1.4) 称为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的第 n 个余项 (简称余项), 记为 r_n, 显然有 $r_n + S_n = S$, 即 $r_n = S - S_n$, 所以 r_n 表示以部分和 S_n 代替 S 时所产生的误差.

定理 7.1.5 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\lim r_n = 0$.

证明略. □

7.1.3 正项级数

如果 $a_n \geqslant 0$, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数.

此为试读, 需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

由于正项级数的部分和数列 $\{S_n\}$ 是单调增加的, 故由数列极限的收敛性质可得下述定理.

定理 7.1.6 正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充分必要条件是它的部分和数列 $\{S_n\}$ 有界.

例 7.1.5 证明 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ 收敛.

证 这是一个正项级数, 所以只需证明它的部分和有界. 事实上, 我们有

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= 1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!} \leqslant 1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n-1)} \\ &= 2+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) \\ &= 3-\frac{1}{n}<3. \end{aligned}$$

因此, 由定理 7.1.6 可知级数收敛. 稍后, 我们将得知这个级数的和为 e.

定理 7.1.7(比较判别法) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 是两个正项级数, 从某项开始有 $a_n \leqslant b_n$.

1° 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛;

2° 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 也发散.

证 因为改变有限项的值不改变级数的敛散性, 故可以假定 $a_n \leqslant b_n$ 对所有的 $n \in \mathbf{N}$ 都成立. 于是对 $n \in \mathbf{N}$, 都有

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

1° 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 则 $\sum\limits_{k=1}^{n} b_k$ 有界, 因而 $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ 也有界, 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

2° 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 则 $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ 无界, 因而 $\sum\limits_{k=1}^{n} b_k$ 无界, 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散. □

例 7.1.6 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 称为 p 级数, 讨论它的敛散性.

解 当 $p \leqslant 1$ 时, 因为

$$\frac{1}{n^p} \geqslant \frac{1}{n},$$

故由例 7.1.4 和比较判别法可知, p 级数发散.

当 $p>1$ 时, 令 $p=1+\alpha\,(\alpha>0)$, 由微分中值定理可得

$$\frac{1}{n^{\alpha}}-\frac{1}{(n+1)^{\alpha}}=\frac{\alpha}{(n+\theta)^{\alpha+1}}>\frac{\alpha}{(n+1)^{p}},$$

其中 $0<\theta<1$. 由于正项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^{\alpha}}-\frac{1}{(n+1)^{\alpha}}\right)$$

收敛, 故由比较判别法可知, 当 $p>1$ 时, p 级数收敛.

例 7.1.7　证明 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ 发散.

证　当 $n\geqslant 2$ 时, 总有

$$\ln n<n,$$

故

$$\frac{1}{\ln n}>\frac{1}{n}.$$

由例 7.1.4 和比较判别法可知 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ 发散.

下面的定理 7.1.8 是比较判别法的极限形式.

定理 7.1.8　设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 是正项级数, $\lim\frac{a_n}{b_n}=A$.

1° 若 $0<A<+\infty$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 同敛散;

2° 若 $A=0$, 则当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛;

3° 若 $A=+\infty$, 则当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 也发散.

证　1° $\exists\, n_0\in\mathbf{N}$, 当 $n>n_0$ 时, 有

$$\left|\frac{a_n}{b_n}-A\right|<\frac{A}{2},$$

即有

$$\frac{A}{2}b_n<a_n<\frac{3A}{2}b_n.$$

如果 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 则由上面右半不等式可知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛; 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散, 则由上面左半不等式可知, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也发散.

2° 由于 $\lim \frac{a_n}{b_n} = A = 0$, 故 $\exists\, n_0 \in \mathbf{N}$, 当 $n > n_0$ 时, 有

$$0 \leqslant \frac{a_n}{b_n} < 1,$$

即有

$$a_n < b_n.$$

故当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛.

3° 由于 $\lim \frac{a_n}{b_n} = A = +\infty$, 故 $\exists\, n_0 \in \mathbf{N}$, 当 $n > n_0$ 时, 有

$$\frac{a_n}{b_n} > 1,$$

即有

$$a_n > b_n.$$

所以当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也发散. □

例 7.1.8 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{\sqrt{(n^2+1)(n^3+2)}}$ 收敛.

证 由

$$\frac{n+3}{\sqrt{(n^2+1)(n^3+2)}} \sim \frac{1}{n^{3/2}}$$

及

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$$

的收敛性, 可知原级数收敛.

例 7.1.9 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$ 发散.

证 由

$$\sin \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$$

及调和级数发散, 可知原级数发散.

定理 7.1.9 (Cauchy 判别法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是正项级数.

1° 若从某项起有 $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q < 1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

2° 若有无穷多个 n, 使得 $a_n \geqslant \alpha > 0$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

证　1° 不妨设对 $n \in \mathbf{N}$, 都有 $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q < 1$, 也就是有

$$a_n \leqslant q^n.$$

故由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ 的收敛性及比较判别法可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

2° 由于有无穷多个 n, 使得 $a_n \geqslant \alpha > 0$, 故 $\{a_n\}$ 不以零为极限, 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散. □

定理 7.1.10 (Cauchy 判别法的极限形式)　设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 是正项级数, $\lim \sqrt[n]{a_n} = q$.

1° 当 $0 \leqslant q < 1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

2° 当 $q > 1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

证　1° 当 $0 \leqslant q < 1$ 时, 可取 $\varepsilon > 0$, 使得 $q + \varepsilon < 1$. 于是, $\exists\, n_0 \in \mathbf{N}$, 当 $n > n_0$ 时, 有 $\sqrt[n]{a_n} < q + \varepsilon < 1$. 故由定理 7.1.9 即知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

2° 类似可证. □

例 7.1.10　设 $0 < q < 1$, 求证: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nq^n$ 收敛.

证　由于 $\lim \sqrt[n]{nq^n} = q < 1$, 故级数收敛.

例 7.1.11　证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$ 发散.

证　由于 $\lim \sqrt[n]{\dfrac{1}{2^n}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n^2}} = \dfrac{\mathrm{e}}{2} > 1$, 故级数发散.

定理 7.1.11 (d'Alembert① 判别法)　设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 是正项级数.

1° 若从某项起有 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q < 1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

① Jean Le Rond d'Alembert(1717—1783), 法国数学家、力学家、哲学家.

2° 若从某项起有 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

证 1° 不妨设对 $n \in \mathbf{N}$, 都有 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q < 1$, 故有

$$\frac{a_2}{a_1} \leqslant q, \quad \frac{a_3}{a_2} \leqslant q, \ \cdots, \ \frac{a_n}{a_{n-1}} \leqslant q.$$

把这些不等式两端相乘, 就得到

$$a_n \leqslant \frac{a_1}{q} q^n.$$

由于 $\dfrac{a_1}{q}$ 是一个常数, 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ 收敛, 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

2° 显然, 必有 $n_0 \in \mathbf{N}$, 使得当 $n \geqslant n_0$ 时, 有 $a_n > 0$ 及 $a_{n+1} \geqslant a_n$. 故当 $n \geqslant n_0$ 时, $a_n \geqslant a_{n-1} \geqslant \cdots \geqslant a_{n_0} > 0$, 即 $\{a_n\}$ 不以零为极限, 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散. □

用类似定理 7.1.10 的证明方法, 可以证明极限形式的 d'Alembert 判别法.

定理 7.1.12 (d'Alembert *判别法的极限形式*) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 是正项级数, $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q$.

1° 当 $0 \leqslant q < 1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

2° 当 $q > 1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

例 7.1.12 讨论 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!\left(\dfrac{x}{n}\right)^n$ $(x \geqslant 0)$ 的敛散性.

解 因为

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{(n+1)!\left(\dfrac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{n!\left(\dfrac{x}{n}\right)^n} = \lim \frac{x}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} = \frac{x}{\mathrm{e}},$$

故当 $x > \mathrm{e}$ 时, 级数发散, 而当 $0 \leqslant x < \mathrm{e}$ 时, 级数收敛. 当 $x = \mathrm{e}$ 时, 由习题 1.1(B) 中的第 12 题可知 $n!\left(\dfrac{\mathrm{e}}{n}\right)^n > \left(\dfrac{n+1}{\mathrm{e}}\right)^n \left(\dfrac{\mathrm{e}}{n}\right)^n > 1$, 所以级数是发散的.

定理 7.1.13 (Cauchy *积分判别法*) 设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上有定义, 在 $[1,+\infty)$ 上非负且单调递减, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ 与 $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 同敛散.

证　由 $f(x)$ 的单调性可知, 当 $k \leqslant x \leqslant k+1$ 时, 有

$$f(k+1) \leqslant f(x) \leqslant f(k),$$

于是

$$f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x \leqslant f(k).$$

将上述不等式对 $k=1,2,\cdots,n$ 相加, 就得知, 对 $\forall n \in \mathbf{N}$, 有

$$\sum_{k=2}^{n+1} f(k) \leqslant \int_1^{n+1} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k).$$

若 $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 则由上式左半边可知 $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} f(k)$ 有界, 因而 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 收敛. 若 $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散, 则由上式右半边可知 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k)$ 无界, 故 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 发散.　□

例 7.1.13　证明级数 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^{\alpha} n}$ 当 $\alpha > 1$ 时收敛, 当 $\alpha \leqslant 1$ 时发散.

证　级数与积分 $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^{\alpha} x}$ 同敛散, 而

$$\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^{\alpha} x} = \begin{cases} \dfrac{(\ln 2)^{1-\alpha}}{\alpha-1}, & \alpha > 1, \\ +\infty, & \alpha \leqslant 1, \end{cases}$$

故原级数当 $\alpha > 1$ 时收敛, 而当 $\alpha \leqslant 1$ 时发散.

7.1.4　交错级数

设 $a_n \geqslant 0$, 称级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 或 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}a_n$ 为交错级数.

定理 7.1.14(Leibniz)　设 $\{a_n\}$ 单调递减趋于零, 则级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛, 且和不大于 a_1.

证　因为 $\{a_n\}$ 单减趋于 0, 因而 $a_n \geqslant 0$, 由

$$S_{2n} = (a_1-a_2)+(a_3-a_4)+\cdots+(a_{2n-1}-a_{2n}) \geqslant 0$$

及

$$S_{2n} = a_1-(a_2-a_3)-\cdots-(a_{2n-2}-a_{2n-1})-a_{2n} \leqslant a_1,$$

此为试读, 需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com