



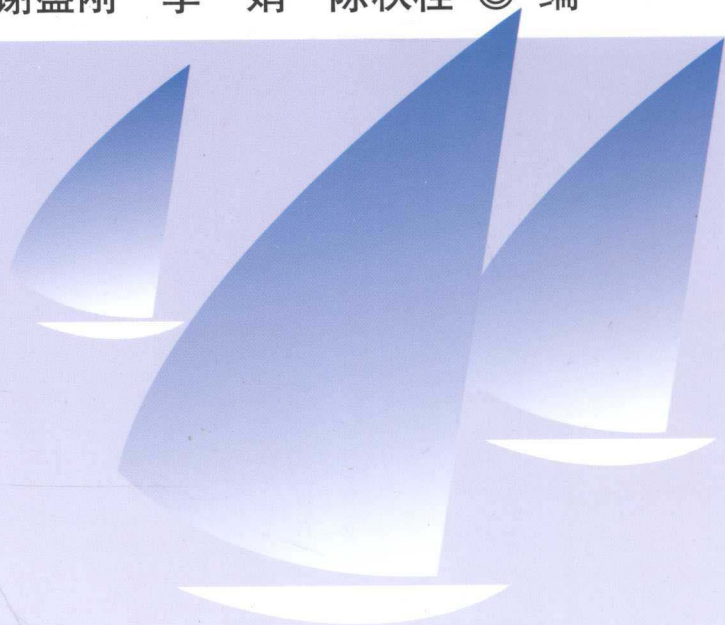
普通高等教育“十一五”国家级规划教材

中国科学技术大学数学教学丛书

微积分 (下)

第二版

谢盛刚 李娟 陈秋桂 © 编



科学出版社

内 容 简 介

本书第一版分上、下两册,分别于2004年、2005年出版,作为教材使用效果良好,并被选为普通高等教育“十一五”国家级规划教材.第二版书仍然分为上、下两册.上册主要内容包括极限与连续、一元函数的微分学、不定积分、定积分、常微分方程和实数集的连续性.下册包括无穷级数、多元函数的微分学、重积分、曲线积分和曲面积分、广义积分和含参变量的积分、Fourier分析.本书基础理论完整严密,论述简明扼要,同时又避开了枝节问题的干扰,使重点突出、主线清晰.

本书适合理工科大学一年级本科生使用.

图书在版编目(CIP)数据

微积分·下/谢盛刚,李娟,陈秋桂编.—2版.—北京:科学出版社,2011

ISBN 978-7-03-029850-8

普通高等教育“十一五”国家级规划教材·中国科学技术大学数学教学丛书

I. 微… II. ①谢… ②李… ③陈… III. 微积分—高等学校—教材 IV. O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第259383号

责任编辑:张中兴 王国华/责任校对:陈玉凤

责任印制:张克忠/封面设计:耕者设计工作室

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

骏主印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2004年7月第 一 版 开本:B5(720×1000)

2011年1月第 二 版 印张:18 1/4

2011年1月第七次印刷 字数:365 000

印数:12 501—16 500

定价:34.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

目 录

第 7 章 无穷级数	1
§7.1 数项级数	1
7.1.1 无穷级数及其收敛性	1
7.1.2 收敛级数的性质	3
7.1.3 正项级数	4
7.1.4 交错级数	10
7.1.5 绝对收敛与条件收敛	11
*7.1.6 一般项级数	14
习题 7.1	16
§7.2 幂级数和 Taylor 展开式	18
7.2.1 函数列和函数项级数的收敛性	18
7.2.2 幂级数的收敛半径	19
7.2.3 幂级数的性质	22
7.2.4 函数的 Taylor 展开式	26
7.2.5 某些初等函数的 Taylor 展开式	28
习题 7.2	32
*§7.3 函数列和函数项级数	33
7.3.1 函数列和函数项级数的一致收敛性	34
7.3.2 一致收敛的函数列和一致收敛级数的性质	37
习题 7.3	39
*§7.4 级数应用举例	41
7.4.1 微分方程的幂级数解	41
7.4.2 Stirling 公式	44
习题 7.4	47
第 8 章 多元函数的微分学	48
§8.1 平面点集及 $\mathbf{R}^2$ 的完备性	48
8.1.1 平面点集的一些基本概念	48
8.1.2 开集与闭集	50
8.1.3 连通集	50
*8.1.4 $\mathbf{R}^2$ 的完备性	51

习题 8.1	52
§8.2 映射及其连续性	53
8.2.1 映射、多元函数、向量值函数的概念	53
8.2.2 多元函数的极限	54
8.2.3 多元函数的连续性	55
8.2.4 向量值函数的极限和连续性	56
习题 8.2	57
§8.3 多元函数的全微分和偏导数	58
8.3.1 多元函数的全微分	58
8.3.2 多元函数的偏导数	59
8.3.3 高阶偏导数	62
习题 8.3	64
§8.4 复合函数的微分法	65
8.4.1 复合函数求导的链式法则	65
*8.4.2 Jacobi 矩阵	69
8.4.3 方向导数、梯度	70
8.4.4 一阶全微分的形式不变性	72
习题 8.4	73
§8.5 隐函数的微分法	75
8.5.1 多元方程所确定的隐函数的存在定理	75
8.5.2 由方程组所确定的隐函数组	78
习题 8.5	81
§8.6 向量值函数的微分法及几何应用	83
8.6.1 向量值函数的微分法	83
8.6.2 空间曲线的切线与法平面	84
8.6.3 空间曲面的切平面与法线	87
习题 8.6	91
§8.7 多元函数的 Taylor 公式与极值	92
8.7.1 二元函数的 Taylor 公式	92
8.7.2 多元函数的极值	94
8.7.3 条件极值	96
习题 8.7	104
第 9 章 重积分	106
§9.1 二重积分	106

9.1.1 二重积分的概念	106
*9.1.2 平面图形的面积	107
9.1.3 可积函数类与二重积分的性质	107
9.1.4 二重积分的累次积分法	109
习题 9.1	115
§9.2 二重积分的变量代换	117
9.2.1 曲线坐标和面积元素	117
9.2.2 二重积分的变量代换	118
9.2.3 例题	120
9.2.4 广义二重积分	124
习题 9.2	126
§9.3 三重积分	127
9.3.1 三重积分的概念	127
9.3.2 三重积分的累次积分法	128
9.3.3 三重积分的变量代换	133
习题 9.3	136
§9.4 重积分应用举例	138
9.4.1 重心与转动惯量	138
9.4.2 物体的引力	141
习题 9.4	143
第 10 章 曲线积分和曲面积分	145
§10.1 第一型曲线积分	145
10.1.1 空间曲线的弧长	145
10.1.2 第一型曲线积分	148
习题 10.1	151
§10.2 第一型曲面积分	152
10.2.1 曲面的面积	152
10.2.2 第一型曲面积分	155
习题 10.2	158
§10.3 第二型曲线积分	159
10.3.1 定向曲线	159
10.3.2 第二型曲线积分的定义	159
10.3.3 第二型曲线积分的计算与性质	160
10.3.4 Green 定理	163
习题 10.3	165

§10.4 第二型曲面积分	167
10.4.1 双侧曲面及其定向	167
10.4.2 第二型曲面积分的定义	168
10.4.3 第二型曲面积分的计算	169
10.4.4 第二型曲面积分的性质	170
10.4.5 有向面积元素	170
10.4.6 例题	171
习题 10.4	174
§10.5 Gauss 定理和 Stokes 定理	175
10.5.1 向量场的散度	175
10.5.2 Gauss 定理	176
10.5.3 Stokes 定理	179
10.5.4 旋度	181
习题 10.5	183
§10.6 保守场	186
10.6.1 恰当微分形式和有势场	186
10.6.2 全微分的积分	186
10.6.3 保守场	187
10.6.4 无旋场	188
10.6.5 全微分方程	190
习题 10.6	192
§10.7 Hamilton 算符	194
习题 10.7	197
第 11 章 广义积分和含参变量的积分	198
§11.1 广义积分	198
11.1.1 无穷积分的收敛性	198
11.1.2 收敛的精细判别法	201
11.1.3 无界函数积分的收敛判别法	203
习题 11.1	205
§11.2 含参变量的常义积分	206
11.2.1 含参变量的常义积分的性质	206
11.2.2 积分限依赖于参变量的积分的性质	209
习题 11.2	211
§11.3 含参变量的广义积分	212
11.3.1 含参变量的广义积分的一致收敛性	212

11.3.2 一致收敛积分的性质	215
11.3.3 几个重要的积分	219
习题 11.3	223
§11.4 Euler 积分	225
11.4.1 Γ 函数的性质	225
11.4.2 B 函数的性质	227
习题 11.4	231
第 12 章 Fourier 分析	232
§12.1 周期函数的 Fourier 级数	232
12.1.1 三角函数系的正交性和 Fourier 级数	232
12.1.2 偶函数与奇函数的 Fourier 级数	236
12.1.3 任意周期的情形	238
12.1.4 有限区间上的函数的 Fourier 级数	241
12.1.5 Bessel 不等式	245
*12.1.6 Fourier 级数的复数形式	248
习题 12.1	250
§12.2 Fourier 积分与 Fourier 变换	252
12.2.1 Fourier 积分	252
12.2.2 Fourier 变换	254
12.2.3 Fourier 变换的性质	257
习题 12.2	259
*§12.3 广义 Fourier 级数与 Bessel 不等式	259
12.3.1 广义 Fourier 级数	259
12.3.2 Bessel 不等式和正交函数系的完备性	261
习题 12.3	263
附录 I 部分习题参考答案及提示	265
附录 II 参考教学进度	283

第7章 无穷级数

无穷级数是数值计算及表示函数的一个重要工具. 本章将介绍: 数项级数的基本概念、性质和收敛的判别法; 一类重要的函数项级数——幂级数的性质; 函数项级数一致收敛的判别法, 及其逐项求极限、逐项积分及逐项微商等问题.

§7.1 数项级数

7.1.1 无穷级数及其收敛性

设有数列 $\{a_n\}$, 把它的项依次相加, 得形式的和式

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots, \quad (7.1.1)$$

称为无穷级数, 其中 a_n 称为级数的通项. 由于一个级数是无穷多项累加, 所以实际上是一个极限过程. 一个合理的算法应是先算出前 n 项的和

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

再求 $\{S_n\}$ 的极限. 由此就产生了下面的定义.

定义 7.1.1 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ 称为级数 (7.1.1) 的第 n 个部分和. 如果 $\{S_n\}$ 收敛于 S ($\lim S_n = S$), 则称级数 (7.1.1) 收敛, S 称为级数的和, 并记

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

如果 $\{S_n\}$ 没有极限, 则称级数 (7.1.1) 发散.

可见讨论无穷级数的敛散性就是讨论它的部分和数列 $\{S_n\}$ 的敛散性.

例 7.1.1 讨论等比级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots \quad (7.1.2)$$

的敛散性.

解 1° 当 $|q| < 1$ 时,

$$S_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q} \rightarrow \frac{1}{1 - q};$$

2° 当 $|q| > 1$ 时,

$$S_n = \frac{1 - q^n}{1 - q} \rightarrow \infty;$$

3° 当 $q = 1$ 时,

$$S_n = n \rightarrow +\infty;$$

4° 当 $q = -1$ 时,

$$S_n = \frac{1 - (-1)^n}{2}.$$

综上所述, 等比级数 (7.1.2) 仅当 $|q| < 1$ 时收敛, 其和为 $\frac{1}{1 - q}$.

例 7.1.2 讨论级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n} \quad (7.1.3)$$

的敛散性.

解 由于

$$\begin{aligned} S_n &= (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + \cdots + (\ln(n+1) - \ln n) \\ &= \ln(n+1) \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

所以级数 (7.1.3) 是发散的.

因为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛就是其部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛, 由极限的 Cauchy 判则就可以得到级数收敛的 Cauchy 判则.

定理 7.1.1(Cauchy 判则) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充分必要条件是: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbf{N}$, 使得当 $n > n_0$ 时, 不等式

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| = |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$$

对 $\forall p \in \mathbf{N}$ 成立.

证 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 $\Leftrightarrow \{S_n\}$ 为 Cauchy 列 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbf{N}$, 当 $n > n_0$ 时, 不等式

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| = |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$$

对 $\forall p \in \mathbf{N}$ 成立. □

例 7.1.3 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛.

证

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} \right| \\ & < \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} \\ & = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

因此, 对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $n_0 = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$, 当 $n > n_0$ 时,

$$\left| \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} \right| < \varepsilon$$

对 $\forall p \in \mathbf{N}$ 均成立, 由 Cauchy 判则得知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛.

例 7.1.4 证明调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散.

证 令 $p = n$

$$\left| \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right| \geq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

上式对 $\forall n \in \mathbf{N}$ 都成立, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散.

7.1.2 收敛级数的性质

下面证明收敛级数的一些简单性质.

定理 7.1.2 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\lim a_n = 0$.

证 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$, 即有

$$\lim S_n = S.$$

由于 $a_n = S_n - S_{n-1}$, 故

$$\lim a_n = \lim (S_n - S_{n-1}) = \lim S_n - \lim S_{n-1} = 0. \quad \square$$

例如 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ 发散, 因为 $\lim (-1)^n$ 不存在. 又如 $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{n}$ 发散, 因为

$$\lim n \sin \frac{1}{n} = 1 \neq 0.$$

必须注意, $\lim a_n = 0$ 并不能保证 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 例如在例 7.1.4 中, $\lim \frac{1}{n} = 0$,

但级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散.

由于级数是有限和的极限, 所以由有限和的有关运算性质并取极限就得到下面的定理.

定理 7.1.3 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛, α, β 为常数, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$ 也收敛, 并有

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

定理 7.1.4 在级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 中改变有限项的值, 不影响级数的敛散性.

证 设 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 是改变 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 中有限项后得到的级数. 由于这两个级数只有有

限多项不同, 故 $\exists k \in \mathbb{N}$, 使得 $a_n = b_n$ 对 $n \geq k$ 都成立. 记 $A_m = \sum_{n=1}^m a_n$, $B_m = \sum_{n=1}^m b_n$, 于是当 $m \geq k$ 时, 就有

$$A_m - B_m = A_k - B_k.$$

因此 $\{A_m\}$ 和 $\{B_m\}$ (即 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$) 有相同的敛散性. $\square$

由定理 7.1.4 知, 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 和为 S , 则级数

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots \quad (7.1.4)$$

也收敛. 式 (7.1.4) 称为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的第 n 个余项 (简称余项), 记为 r_n , 显然有 $r_n + S_n = S$, 即 $r_n = S - S_n$, 所以 r_n 表示以部分和 S_n 代替 S 时所产生的误差.

定理 7.1.5 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\lim r_n = 0$.

证明略. $\square$

7.1.3 正项级数

如果 $a_n \geq 0$, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数.

由于正项级数的部分和数列 $\{S_n\}$ 是单调增加的, 故由数列极限的收敛性质可得下述定理.

定理 7.1.6 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充分必要条件是它的部分和数列 $\{S_n\}$

有界.

例 7.1.5 证明 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ 收敛.

证 这是一个正项级数, 所以只需证明它的部分和有界. 事实上, 我们有

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \leq 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n-1)} \\ &= 2 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \\ &= 3 - \frac{1}{n} < 3. \end{aligned}$$

因此, 由定理 7.1.6 可知级数收敛. 稍后, 我们将得知这个级数的和为 e .

定理 7.1.7(比较判别法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 是两个正项级数, 从某项开始有 $a_n \leq b_n$.

1° 若 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛;

2° 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 也发散.

证 因为改变有限项的值不改变级数的敛散性, 故可以假定 $a_n \leq b_n$ 对所有的 $n \in \mathbb{N}$ 都成立. 于是对 $n \in \mathbb{N}$, 都有

$$\sum_{k=1}^n a_k \leq \sum_{k=1}^n b_k.$$

1° 若 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 则 $\sum_{k=1}^n b_k$ 有界, 因而 $\sum_{k=1}^n a_k$ 也有界, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

2° 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 则 $\sum_{k=1}^n a_k$ 无界, 因而 $\sum_{k=1}^n b_k$ 无界, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散. $\square$

例 7.1.6 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 称为 p 级数, 讨论它的敛散性.

解 当 $p \leq 1$ 时, 因为

$$\frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n},$$

故由例 7.1.4 和比较判别法可知, p 级数发散.

当 $p > 1$ 时, 令 $p = 1 + \alpha (\alpha > 0)$, 由微分中值定理可得

$$\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha} = \frac{\alpha}{(n+\theta)^{\alpha+1}} > \frac{\alpha}{(n+1)^p},$$

其中 $0 < \theta < 1$. 由于正项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha} \right)$$

收敛, 故由比较判别法可知, 当 $p > 1$ 时, p 级数收敛.

例 7.1.7 证明 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ 发散.

证 当 $n \geq 2$ 时, 总有

$$\ln n < n,$$

故

$$\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}.$$

由例 7.1.4 和比较判别法可知 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ 发散.

下面的定理 7.1.8 是比较判别法的极限形式.

定理 7.1.8 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 是正项级数, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = A$.

1° 若 $0 < A < +\infty$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 同敛散;

2° 若 $A = 0$, 则当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛;

3° 若 $A = +\infty$, 则当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也发散.

证 1° $\exists n_0 \in \mathbf{N}$, 当 $n > n_0$ 时, 有

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - A \right| < \frac{A}{2},$$

即有

$$\frac{A}{2} b_n < a_n < \frac{3A}{2} b_n.$$

如果 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 则由上面右半不等式可知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛; 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散, 则由

上面左半不等式可知, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也发散.

2° 由于 $\lim \frac{a_n}{b_n} = A = 0$, 故 $\exists n_0 \in \mathbf{N}$, 当 $n > n_0$ 时, 有

$$0 \leq \frac{a_n}{b_n} < 1,$$

即有

$$a_n < b_n.$$

故当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛.

3° 由于 $\lim \frac{a_n}{b_n} = A = +\infty$, 故 $\exists n_0 \in \mathbf{N}$, 当 $n > n_0$ 时, 有

$$\frac{a_n}{b_n} > 1,$$

即有

$$a_n > b_n.$$

所以当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也发散. □

例 7.1.8 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{\sqrt{(n^2+1)(n^3+2)}}$ 收敛.

证 由

$$\frac{n+3}{\sqrt{(n^2+1)(n^3+2)}} \sim \frac{1}{n^{3/2}}$$

及

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$$

的收敛性, 可知原级数收敛.

例 7.1.9 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$ 发散.

证 由

$$\sin \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$$

及调和级数发散, 可知原级数发散.

定理 7.1.9 (Cauchy 判别法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是正项级数.

1° 若从某项起有 $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

2° 若有无穷多个 n , 使得 $a_n \geq \alpha > 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

证 1° 不妨设对 $n \in \mathbf{N}$, 都有 $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$, 也就是有

$$a_n \leq q^n.$$

故由 $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ 的收敛性及比较判别法可知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

2° 由于有无穷多个 n , 使得 $a_n \geq \alpha > 0$, 故 $\{a_n\}$ 不以零为极限, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散. $\square$

定理 7.1.10 (Cauchy 判别法的极限形式) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是正项级数, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$.

1° 当 $0 \leq q < 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

2° 当 $q > 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

证 1° 当 $0 \leq q < 1$ 时, 可取 $\varepsilon > 0$, 使得 $q + \varepsilon < 1$. 于是, $\exists n_0 \in \mathbf{N}$, 当 $n > n_0$ 时, 有 $\sqrt[n]{a_n} < q + \varepsilon < 1$. 故由定理 7.1.9 即知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

2° 类似可证. $\square$

例 7.1.10 设 $0 < q < 1$, 求证: $\sum_{n=1}^{\infty} nq^n$ 收敛.

证 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{nq^n} = q < 1$, 故级数收敛.

例 7.1.11 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ 发散.

证 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \frac{e}{2} > 1$, 故级数发散.

定理 7.1.11 (d'Alembert^① 判别法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是正项级数.

1° 若从某项起有 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

① Jean Le Rond d'Alembert(1717—1783), 法国数学家、力学家、哲学家.

2° 若从某项起有 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

证 1° 不妨设对 $n \in \mathbf{N}$, 都有 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$, 故有

$$\frac{a_2}{a_1} \leq q, \quad \frac{a_3}{a_2} \leq q, \quad \dots, \quad \frac{a_n}{a_{n-1}} \leq q.$$

把这些不等式两端相乘, 就得到

$$a_n \leq \frac{a_1}{q} q^n.$$

由于 $\frac{a_1}{q}$ 是一个常数, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ 收敛, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

2° 显然, 必有 $n_0 \in \mathbf{N}$, 使得当 $n \geq n_0$ 时, 有 $a_n > 0$ 及 $a_{n+1} \geq a_n$. 故当 $n \geq n_0$ 时, $a_n \geq a_{n-1} \geq \dots \geq a_{n_0} > 0$, 即 $\{a_n\}$ 不以零为极限, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散. $\square$

用类似定理 7.1.10 的证明方法, 可以证明极限形式的 d'Alembert 判别法.

定理 7.1.12 (d'Alembert 判别法的极限形式) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是正项级数, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$.

1° 当 $0 \leq q < 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

2° 当 $q > 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

例 7.1.12 讨论 $\sum_{n=1}^{\infty} n! \left(\frac{x}{n}\right)^n$ ($x \geq 0$) 的敛散性.

解 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! \left(\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{n! \left(\frac{x}{n}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{x}{e},$$

故当 $x > e$ 时, 级数发散, 而当 $0 \leq x < e$ 时, 级数收敛. 当 $x = e$ 时, 由习题 1.1(B) 中的第 12 题可知 $n! \left(\frac{e}{n}\right)^n > \left(\frac{n+1}{e}\right)^n \left(\frac{e}{n}\right)^n > 1$, 所以级数是发散的.

定理 7.1.13 (Cauchy 积分判别法) 设 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上有定义, 在 $[1, +\infty)$ 上非负且单调递减, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 与 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 同敛散.

证 由 $f(x)$ 的单调性可知, 当 $k \leq x \leq k+1$ 时, 有

$$f(k+1) \leq f(x) \leq f(k),$$

于是

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq f(k).$$

将上述不等式对 $k = 1, 2, \dots, n$ 相加, 就得知, 对 $\forall n \in \mathbf{N}$, 有

$$\sum_{k=2}^{n+1} f(k) \leq \int_1^{n+1} f(x) dx \leq \sum_{k=1}^n f(k).$$

若 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 则由上式左半边可知 $\sum_{k=2}^{n+1} f(k)$ 有界, 因而 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 收敛. 若

$\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 发散, 则由上式右半边可知 $\sum_{k=1}^n f(k)$ 无界, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 发散. $\square$

例 7.1.13 证明级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^{\alpha} n}$ 当 $\alpha > 1$ 时收敛, 当 $\alpha \leq 1$ 时发散.

证 级数与积分 $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^{\alpha} x}$ 同敛散, 而

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^{\alpha} x} = \begin{cases} \frac{(\ln 2)^{1-\alpha}}{\alpha-1}, & \alpha > 1, \\ +\infty, & \alpha \leq 1, \end{cases}$$

故原级数当 $\alpha > 1$ 时收敛, 而当 $\alpha \leq 1$ 时发散.

7.1.4 交错级数

设 $a_n \geq 0$, 称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 或 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 为交错级数.

定理 7.1.14 (Leibniz) 设 $\{a_n\}$ 单调递减趋于零, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛,

且和不大于 a_1 .

证 因为 $\{a_n\}$ 单调趋于 0, 因而 $a_n \geq 0$, 由

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n}) \geq 0$$

及

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \leq a_1,$$