GAODENG SHUXUE LILUN YU FANGFA

高等数学
理论与方法

王雪峰　主编

中国矿业大学出版社
China University of Mining and Technology Press

内容提要

本书是作者在总结多年高等数学教学实践经验的基础上编写而成的.全书共分八章,即一元函数的极限与连续性、一元函数微分学及其应用、一元函数积分学、空间解析几何与多元函数微分学、多元函数积分法及其应用、无穷级数、微分方程、数学建模.其中每章主要由内容分析、方法指导、实例分析和习题组成,且书末附有习题答案与提示.

本书是工科类本科生学习高等数学的辅助教材,也是准备参加硕士研究生入学考试的读者的有益参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学理论与方法/王雪峰主编.—徐州:中国矿业大学出版社,2006.5

ISBN 7-81107-309-9

Ⅰ.高… Ⅱ.王… Ⅲ.①高等数学—理论②高等数学—研究方法 Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第035678号

书　　名　高等数学理论与方法
主　　编　王雪峰
责任编辑　刘社育　王春凤
出版发行　中国矿业大学出版社
　　　　　(江苏省徐州市中国矿业大学内　邮编:221008)
印　　刷　北京兆成印刷有限责任公司
经　　销　新华书店
开　　本　787×960　1/16
印　　张　26
字　　数　480千字
版次印次　2006年8月第1版　2006年8月第1次印刷
印　　数　1～4100册
定　　价　36.00元

前　言

高等数学是高等学校理工科专业的一门重要的基础课，也是硕士研究生入学考试的一门必考科目，对这门课程掌握的好坏，不仅直接关系到后续课程的学习，而且对今后的提高和发展都有着深远的影响。为了帮助学生加深对高等数学基本概念及基本理论的理解，掌握高等数学的解题方法和技巧，不断提高分析问题和解决问题的能力，我们在总结多年教学实践经验的基础上编写了本书。

本书具有以下特点：

(1) 重视内容与方法的结合。本书把以内容为体系的横向学习与以方法为线索的纵向归纳结合起来，使读者能更好地掌握《高等数学》这门课程的内容。

(2) 重视对概念、理论的阐述。本书对每一个概念、公式、定理，都阐明了其几何与物理意义，说明了它们的使用条件、用途及用法，使读者可以达到举一反三的目的。

(3) 重视以题示法。本书突出了题目的典型性与代表性，解法的启发性和灵活性，注重解题思路和规律的分析、解题方法和技巧的提炼和有关注意事项的阐释。

(4) 重视提高学生应用数学知识解决实际问题的能力。为此，专门增加了数学建模一章内容，并结合高等数学知识对数学建模和数值计算方法作了专门介绍。

(5) 重视数学概念、理论的产生过程。这并不是一味的追求理论的完善，而是让学生真正了解数学概念、理论的产生过程，并从这些过程中体会数学的思想与方法。

本书主要供工科本科类学生作为选修课教材使用，可在学完《高等数学》课程后集中开设；也可以作为学生学习《高等数学》的辅助教材；对准备考硕士研究生的读者也是一本有益的参考书。

本书共分八章，每章由以下几部分组成：内容分析、方法指导、实例分析、习题。另外，书末附有习题答案与提示。

本书由王雪峰任主编。具体编写分工为：第一章、第六章由乔宝明编写；第二章、第七章由曹根牛编写；第三章、第八章由廖登洪编写；第四章由赵高长编写；第五章由王雪峰编写。全书由全体作者多次互相讨论、交换审阅，最后由王雪峰统稿并定稿。

在本书的出版过程中，西安科技大学的领导和基础部的老师都给予了很大的支持与帮助，董立红同志也为本书提出了许多宝贵意见，在此特表衷心的感谢。另外，作者还参考了一些著作，部分著作已列在了书后的主要参考文献中，在此对其著作者表示诚挚的谢意。

由于编写时间仓促及水平有限，书中缺点与错误在所难免，恳请读者批评指正。

作　　者

2006 年 2 月于西安科技大学

目 录

第一章　一元函数的极限与连续性

第一节　函数、极限的概念与计算

一、内容分析

（一）函数

1. 函数的概念

定义　设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集，如果对于每个数 $x \in D$，变量 y 按照一定法则总有惟一确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y = f(x)$，数集 D 叫做这个函数的定义域.

函数值全体组成的数集 $W = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$ 称为函数的值域.

函数的两要素：定义域与对应法则.

2. 函数的基本性质

(1) 函数的有界性：

若 $X \subset D$，$\exists M > 0$，$\forall x \in X$，有 $|f(x)| \leqslant M$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在 X 上有界. 否则就称函数 $f(x)$ 在 X 上无界.

(2) 函数的单调性：

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I \subseteq D$，如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，恒有 $f(x_1) < f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的；

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I \subseteq D$，如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，恒有 $f(x_1) > f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的.

(3) 函数的奇偶性：

设 D 关于原点对称，对于 $\forall x \in D$，有 $f(-x) = f(x)$，称 $f(x)$ 为偶函数；

设 D 关于原点对称，对于 $\forall x \in D$，有 $f(-x) = -f(x)$，称 $f(x)$ 为奇函数.

(4) 函数的周期性:

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,如果存在一个不为零的数 l,使得对于任一 $x \in D$,$(x \pm l) \in D$. 则称 $f(x)$ 为周期函数,l 称为 $f(x)$ 的周期. 且 $f(x+l)=f(x)$ 恒成立.

注 通常所说的周期函数的周期是指其最小正周期.

3. 反函数与复合函数

复杂函数分解成简单函数的复合、分段表示函数间的复合.

4. 基本初等函数与初等函数

基本初等函数:有常函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数.

初等函数:由基本初等函数经过有限次的有理运算和有限次的复合并且能用一个解析式子表达的函数.

5. 双曲函数与反双曲函数

了解它们的定义域、性质及图形.

(二) 极限

1. 极限的定义

(1) 若对于任给的 $\varepsilon > 0$(无论多么小),总存在正整数 N,使得对一切满足 $n > N$ 的 x_n,不等式 $|x_n - a| < \varepsilon$ 都成立,那么称常数 a 为数列 x_n 当 $n \to \infty$ 时的极限,或者称数列 x_n 收敛到 a,记作

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a \text{ 或 } x_n \to a(n \to \infty).$$

(2) 若对于任给的 $\varepsilon > 0$(无论多么小),总存在正数 δ,使得对于一切适合不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$ 的 x,对应的函数 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x) - A| < \varepsilon$,那么就称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限,记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \to A(x \to x_0).$$

(3) 若在(2)中将 $0 < |x - x_0| < \delta$ 改为 $-\delta < x - x_0 < 0$,即 $x_0 - \delta < x < x_0$,则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的左极限,记作

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A \text{ 或 } f(x_0 - 0) = A.$$

类似地,若在(2)中将 $0 < |x - x_0| < \delta$ 改为 $0 < x - x_0 < \delta$,即 $x_0 < x < x_0 + \delta$,则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的右极限,记作

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A \text{ 或 } f(x_0 + 0) = A.$$

(4) 若对于任给的 $\varepsilon > 0$(无论多么小),总存在正数 X,使得对于一切适合不等式 $|x| > X$ 的 x,对应的函数 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x) - A| < \varepsilon$,那么

就称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限,记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to\infty).$$

2. 极限的性质

(1) 收敛数列必有界. 数列有界是数列收敛的必要条件,但不是充分条件,例如:

$$x_n=(-1)^n.$$

(2) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,且 $A>0$(或 $A<0$),则一定存在着 x_0 的 δ 去心邻域 $\mathring{U}(x,\delta)$,使得当 $x\in\mathring{U}(x,\delta)$ 时,有 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$).

(3) 保号性. 若在 x_0 的附近有 $f(x)\geqslant 0$(或 $f(x)\leqslant 0$),并且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,则 $A\geqslant 0$(或 $A\leqslant 0$). 以上二性质,称为极限的保号性.

(4) 函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时极限存在的充分必要条件是:函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0^-$ 和 $x\to x_0^+$ 时的极限都存在,并且相等.

3. 极限的运算法则

设 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时,极限 $\lim f(x)$,$\lim g(x)$ 存在,则:

(1) $\lim(f(x)\pm g(x))=\lim f(x)\pm\lim g(x)$;

(2) $\lim(f(x)g(x))=\lim f(x)\cdot\lim g(x)$;

(3) 若 $\lim g(x)\neq 0$,则 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$;

(4) 若 $|f(x)|<M$,而 $\lim g(x)=0$,则 $\lim(f(x)g(x))=0$.

注　在(1)中,若 $\lim f(x)$ 存在,而 $\lim g(x)$ 不存在,则 $\lim(f(x)\pm g(x))$ 一定不存在;若 $\lim f(x)$ 不存在,而 $\lim g(x)$ 也不存在,则 $\lim(f(x)\pm g(x))$ 有可能存在.

4. 极限的存在准则与无穷小的比较

(1) 夹逼准则:若数列 $\{x_n\}$、$\{y_n\}$、$\{z_n\}$ 满足:

① $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$ ($n=1,2,3,\cdots$);

② $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$.

则数列 $\{x_n\}$ 的极限存在,且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

注　此定理对函数 $y(x)$、$f(x)$、$z(x)$ 仍然正确. 在①中,不必要求 $n=1,2,3,\cdots$,可以只要求 n 从某一项开始即可. 此时,定理仍成立.

(2) 单调有界准则:单调有界数列必有极限.

注　在运用此准则中,要会运用 $x_{n+1}-x_n>0$(或 $x_{n+1}-x_n<0$)来证明数列的单调性. 或在已知 $x_n>0$ 的情况下,通过证明 $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}>1$(或 $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}<1$)来证

明数列的单调性.

在个别题目中,还要会运用通过证明 $x_{n+1}-x_n$ 与 x_n-x_{n-1} 同号来证明数列的单调性.

(3) 两个重要极限:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1;$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}\qquad (\text{或}\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}).$$

注 在上面两个极限中,应理解为

$$\lim_{\varphi(x)\to 0}\frac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1;$$

$$\lim_{\varphi(x)\to\infty}\left(1+\frac{1}{\varphi(x)}\right)^{\varphi(x)}=\mathrm{e}.$$

(4) 等价无穷小替换定理:

若 $\alpha,\beta,\alpha',\beta'$ 都是在自变量同一变化过程中的无穷小量,$\alpha\sim\alpha'$,$\beta\sim\beta'$,且 $\lim\frac{\alpha'}{\beta'}$ 存在,则有 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha'}{\beta'}$ 成立.

5. 当 $x\to 0$ 时,常用的等价无穷小

$\sin x\sim x$, $\tan x\sim x$, $1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$,

$\mathrm{e}^x-1\sim x$, $\arcsin x\sim x$, $\arctan x\sim x$,

$\sqrt{1+x}\sim\frac{x}{2}$, $\tan x-\sin x\sim\frac{x^3}{2}$, $x-\sin x\sim\frac{x^3}{6}$.

注 在这几个等价无穷小中,以第一个为例,应理解为:

当 $\varphi(x)\to 0$ 时,$\sin\varphi(x)\sim\varphi(x)$,其余几个应同样理解.

另外,对于 $\tan x-\sin x\sim\frac{x^3}{2}$,$x-\sin x\sim\frac{x^3}{6}$ 这两个等价无穷小,还要熟悉它们此结果的运算过程.

二、方法指导

极限的计算是高等数学的重点与难点之一,称其重点是由于它是高等数学的基础,而称其是难点也是由于它没有统一的计算方法.所以要针对不同的情况采用不同的方法,也就是根据不同的题型采取不同的方法.正因为如此,在极限的计算中首先要分清楚题目中的极限是属于哪种类型的极限问题.

(一) 极限计算中的主要类型

(1) $\frac{0}{0}$ 型与 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式的极限.

(2) $0\cdot\infty$ 型与 $\infty-\infty$ 型未定式的极限.

(3) 1^{∞}，0^0 与 ∞^0 型未定式的极限.

(4) 含有待定参数的极限问题.

(5) n 项和数列的极限问题.

(6) n 项乘积数列的极限问题.

(7) 递归数列的极限问题.

(8) 其他类型的极限问题.

这里的“极限的主要类型”不包括最简单的极限问题，“其他类型的极限问题”是指有些极限问题不属于前面的 8 种类型，但也不是简单的极限问题，例如：$\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\sqrt{x+a}-\sin\sqrt{x})$ 就是如此.

(二) 求极限的主要方法

(1) 恒等变换法，如：三角变换，分式的分子、分母同乘或同除某一因式等.

(2) 利用极限的运算法则及泰勒公式求未定式的极限.

(3) 利用洛必达法则及泰勒公式求未定式的极限.

(4) 利用函数的极限求数列的极限.

(5) 利用极限计算中的变量替换与无穷小等价代换求极限.

(6) 利用两个重要极限求极限.

(7) 利用导数的定义求极限.

(8) 利用极限的存在法则求极限(即两边夹法则和单调有界法则).

(9) 利用定积分求某些和式的极限.

(10) 利用级数的收敛性证明某些数列的极限为零.

(11) 某些特殊形式的极限，如递归数列的极限计算法等.

这里需要指出的是：题型与方法并不具有确定的关系. 一种题型可以有几种计算方法. 同样一种方法也可能适用于几种不同的题型. 所以，还是要对具体问题进行具体的分析. 把上述讲过的方法灵活运用，这样才能提高自己计算极限问题的能力.

(三) $\dfrac{0}{0}$ 型与 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型未定式的极限

求 $\dfrac{0}{0}$ 型与 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型未定式的极限最常用的方法是洛必达法则. 除此之外，常用的方法还有：

(1) 恒等变换法：这时，通常是通过恒等变换消去分子分母中极限为零或极限趋于∞的因式，然后通过极限的运算法则求出原极限.

(2) 利用两个重要极限 $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$、$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 以及由它们直接导出

的一些结果，如：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}}=1$ 等.

(3) 泰勒公式法(见【**例 1.1.5**】).

(四) $0\cdot\infty$ 与 $\infty-\infty$ 型未定式的极限

在未定式的极限中，$\frac{0}{0}$ 型与 $\frac{\infty}{\infty}$ 型是最基本的，它可以直接使用洛必达法则，其他类型的未定式都要设法化为 $\frac{0}{0}$ 型与 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式(见【**例 1.1.6**】).

(五) 指数型未定式(1^∞、0^0、∞^0) 的极限

指数型未定式的极限 $\lim f(x)^{g(x)}$ 均可通过取对数的方法化为 $0\cdot\infty$ 型未定式，即 $\lim g(x)\ln f(x)$，然后再化为 $\frac{0}{0}$ 与 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式(见【**例 1.1.7**】).

另外，对于 1^∞ 型未定式也可以利用重要极限：

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}.$$

(六) 含待定参数的极限问题

通过极限确定参数主要是根据极限存在的条件，以及极限值的计算(见【**例 1.1.8**】).

(七) 求 n 项和数列的极限

所谓 n 项和数列是指其通项 $x_n=\sum\limits_{k=1}^{x}a_k$ 本身就是 n 项的和，而其项数又随 n 无限增加，这里讲的就是这种数列的极限，其主要方法有：

(1) 通过恒等变换化为便于计算的形式.

(2) 夹逼法.

(3) 化为积分和的形式，利用定积分求极限.

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{x}a_k=\sum\limits_{k=1}^{x}a_k$，用数值级数求和的方法求极限.

(八) 求 n 项积数列的极限

若 $x_n=\prod\limits_{k=1}^{x}\alpha_k$ 则 $\{x_n\}$ 就是 n 项积数列，计算其极限常用的方法有：

(1) 通过恒等变换化为便于计算的形式.

(2) 取对数为 n 项和的形式.

(九) 利用函数的极限求数列的极限

这种方法主要用于未定式极限，因为未定式极限可使用洛必达法则. 而数列

不能求导，直接对数列求导也是经常犯的错误. 正确的做法是先将其转化为函数，即用数列—函数—数列的方式处理此类极限问题.

三、实例分析

【例 1.1.1】 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2 & (x<0),\\ -x & (x\geqslant 0),\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}2-x & (x\leqslant 0),\\ x+2 & (x>0).\end{cases}$ 求 $g[f(x)]$.

分析 本题将两个分段函数复合成一个函数，首先需写出以 $f(x)$ 为自变量的函数 $g[f(x)]$ 的表达式.

解 由题意得

$$g[f(x)]=\begin{cases}2-f(x) & (f(x)\leqslant 0),\\ f(x)+2 & (f(x)>0).\end{cases}$$

由 $f(x)$ 的定义知，$x\geqslant 0$ 时，$f(x)=-x\leqslant 0$；$x<0$ 时，$f(x)=x^2>0$；代入 $g[f(x)]$ 的表达式中，得

$$g[f(x)]=\begin{cases}2+x & (x\geqslant 0),\\ x^2+2 & (x<0).\end{cases}$$

【例 1.1.2】 设 $f(x)$ 是连续函数，$F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，证明当 $f(x)$ 是奇函数时，$F(x)$ 必是偶函数.

证明 因为 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，即

$$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C,$$

令 $u=-t$，所以

$$F(-x)=\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t+C=\int_0^{x} f(-t)\mathrm{d}(-t) \qquad (令\ u=-t)$$

$$=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C=F(x)\ .$$

从而有 $F(x)$ 为偶函数.

【例 1.1.3】 设数列 x_n 与 y_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$，则下列正确的是______.

(A) 若 x_n 发散，则 y_n 必发散　　(B) 若 x_n 无界，则 y_n 必有界

(C) 若 x_n 有界，则 y_n 必为无穷小　　(D) 若 $\dfrac{1}{x_n}$ 为无穷小，则 y_n 必为无穷小

答 答案应选(D).

分析 直接利用无穷小的性质，可推出(D)为正确的选项. 由 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$. 设 $x_ny_n=a_n$，其中 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. 当 $x_n\neq 0$ 时可写为 $y_n=\dfrac{a_n}{x_n}$. 若 $\dfrac{1}{x_n}$ 为无穷小，则

y_n 为两个无穷小 $\frac{1}{x_n}$ 与 a_n 之积. 故 y_n 应为无穷小.

关于(A)(B)(C)三项,可用反例排除.

(A)项是不正确的. 因为只需取数列 $y_n = 0$. 就可以确定(A)不正确.

(B)项也是不正确的. 若取数列 $x_n = \begin{cases} 2k-1 & (n = 2k-1, k = 1,2,3,\cdots), \\ 0 & (n = 2k, k = 1,2,3,\cdots). \end{cases}$

$y_n = \begin{cases} 0 & (n = 2k-1, k = 1,2,3,\cdots), \\ 2k & (n = 2k, k = 1,2,3,\cdots). \end{cases}$ 即可知(B)项错误.

同样,(C)项也不正确. 若取数列 $x_n = 0$,则 y_n 可取任何数列. 所以(C)项也不正确.

【例 1.1.4】 求极限 $I = \lim\limits_{x\to\infty}(\sin\sqrt{x+a} - \sin\sqrt{x})$.

解 由于

$$\sin\sqrt{x+a} - \sin\sqrt{x} = 2\cos\frac{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}{2}\sin\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{x}}{2}$$

$$= 2\cos\frac{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}{2}\sin\frac{a}{2(\sqrt{x+a}+\sqrt{x})}.$$

(注意: $2\cos\frac{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}{2}$ 是有界变量;而 $\sin\frac{a}{2(\sqrt{x+a}+\sqrt{x})}$ (当 $x\to\infty$ 时)是无穷小量.)

所以, 根据无穷小的性质,得

$$I = \lim_{x\to\infty}(\sin\sqrt{x+a} - \sin\sqrt{x}) = 0.$$

注 这里我们用到了两处恒等变换,一处是三角函数的和差化积公式. 一处是对分式中的分子分母同乘以一个因式 $\sqrt{x+a}+\sqrt{x}$.

【例 1.1.5】 求极限 $I = \lim\limits_{x\to1}\frac{x^x-1}{x\ln x}$.

解 使用泰勒公式得

$$x^x = e^{x\ln x} = 1 + (x\ln x) + o(x\ln x),$$

则
$$\lim_{x\to1}\frac{x^x-1}{x\ln x} = \lim_{x\to1}\frac{1+(x\ln x)+o(x\ln x)-1}{x\ln x}$$

$$= \lim_{x\to1}\left(1+\frac{o(x\ln x)}{x\ln x}\right) = 1.$$

【例 1.1.6】 求下列极限.

(1) $I_1 = \lim\limits_{x\to\infty}x(a^{\frac{1}{x}} - b^{\frac{1}{x}})$ (其中 $a>0, b>0$);

(2) $I_2=\lim\limits_{x\to\infty}[x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})]$.

解　(1) 本题属于 $0\cdot\infty$ 型未定式的极限,将其化为 $\frac{0}{0}$ 型. 令 $t=\frac{1}{x}$,则有

$$I_1=\lim_{x\to\infty}\frac{a^{\frac{1}{x}}-b^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to 0}\frac{a^t-b^t}{t}=\lim_{t\to 0}(a^t\ln a-b^t\ln b)=\ln\frac{a}{b}.$$

这里也可以使用泰勒公式,即

$$a^t-b^t=e^{t\ln a}-e^{t\ln b}=t(\ln a-\ln b)+o(t),$$

从而

$$I_1=\ln\frac{a}{b}.$$

(2) 本题为 $\infty-\infty$ 型未定式,其实如果将其改为 $\lim\limits_{x\to+\infty}x[1-x\ln(1+\frac{1}{x})]$ 就是 $0\cdot\infty$ 型未定式. 令 $t=\frac{1}{x}$,则

$$I_2=\lim_{t\to 0}\left[\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}\ln(1+t)\right]=\lim_{t\to 0}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+t}}{2t}=\frac{1}{2}.$$

注　在上面两个例题中都使用了变量替换 $t=\frac{1}{x}$,这样就减少在运算中对公式求导. 在前面计算未定式极限的过程中,总是把那些有确定极限的部分尽早分出来.

【例 1.1.7】　求极限 $I=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}$.

解　采用洛必达法则,考虑极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2x(1+x)}=\frac{1}{2},$$

因此

$$I=e^{\frac{1}{2}}.$$

【例 1.1.8】　试确定常数 a 和 b,使 $I=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{a}{x^2}+\frac{1}{x^4}+\frac{b}{x^5}\int_0^x e^{-x^2}\,dx\right]$ 为有限值,并求此极限.

解　由于

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{ax^3+x+b\int_0^x e^{-x^2}\,dx}{x^5}=\lim_{x\to 0}\frac{3ax^2+1+be^{-x^2}}{5x^4}.$$

为了使其为有限值,分子必须为无穷小量,因此 $b=-1$. 又由于

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{6ax+2xe^{-x^2}}{20x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{3a+e^{-x^2}}{10x^2},$$

因此,必须 $a=-\dfrac{1}{3}$ 才有极限值,其极限值为

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^2}-1}{10x^2}=-\frac{1}{10}.$$

【例 1.1.9】 计算 $I=\lim\limits_{\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{5}{2^3}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^n}\right)$.

分析 用恒等变换将和式化简.注意和式的特点是相邻两项分子差为 2,而且分母差 2 倍.

解 若记 $$x_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n},$$

则
$$\begin{aligned}x_n&=2x_n-x_n\\&=1+2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)-\frac{2n-1}{2^n}\\&=1+2\times\frac{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2^n}}{1-\dfrac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^n}.\end{aligned}$$

由此即知 $I=3$.

【例 1.1.10】 求极限 $I=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[x]{\ln x}$.

解 由于

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln x\cdot x}=0,$$

从而 $$I=\lim_{x\to+\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\exp\left(\frac{1}{x}\ln\ln x\right)=1.$$

【例 1.1.11】 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$.

解 因为

$$\begin{aligned}n&=[1+(n^{\frac{1}{n}}-1)]^n\\&=1+n(n^{\frac{1}{n}}-1)+\frac{n(n-1)}{2}(n^{\frac{1}{n}}-1)+\cdots+(n^{\frac{1}{n}}-1)^n\\&\geqslant 1+\frac{n(n-1)}{2}(n^{\frac{1}{n}}-1),\end{aligned}$$

所以 $$n-1\geqslant\frac{(n-1)n}{2}(n^{\frac{1}{n}}-1)^2.$$

即 $$(\sqrt[n]{n}-1)^2\leqslant\frac{2}{n}.$$

这样就有
$$\sqrt[n]{n} \leqslant 1+\sqrt{\frac{2}{n}},$$
即
$$1 \leqslant \sqrt[n]{n} \leqslant 1+\sqrt{\frac{2}{n}}.$$
又
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\sqrt{\frac{2}{n}}\right)=1,$$
故由夹逼准则得
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$$

【例 1.1.12】 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\ln(2^x+1)\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)$.

分析　首先判断此极限的类型，当 $x\to\infty$ 时它属于 $\infty\cdot 0$ 型，而且是两个对数函数的乘积，两个特殊极限不好使用，此时应考虑到等价无穷小.

解　原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(2^x+1)}{\frac{x}{2}}\cdot\dfrac{\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\frac{2}{x}}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(2^x+1)}{\frac{x}{2}}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\frac{2}{x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(2^x+1)}{\frac{x}{2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2^x\cdot\ln 2}{2^x+1}}{\frac{1}{2}}$$

$$=2\ln 2\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{2^x}{2^x+1}=2\ln 2\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{2^x}}$$

$$=2\ln 2.$$

【例 1.1.13】　求极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$.

分析　考虑到 $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$，$\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$. 所以本题的关键在于求函数的左、右极限.

解　由题意知

左极限：$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim\limits_{x\to 1^-}(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}$

$$=\lim_{x\to 1^-}(x+1)\cdot\lim_{x\to 1^-}e^{\frac{1}{x-1}}=2\cdot 0=0.$$