

上海大学出版社

2006年上海大学博士学位论文 18



Boussinesq 近似与赤道 Beta-平面近似类 方程组的解析解计算

- 作者：沈 春
- 专业：流体力学
- 导师：施惟慧



上海大学出版社

2006年上海大学博士学位论文 18



Boussinesq 近似与赤道 Beta-平面近似类 方程组的解析解计算

- 作者：沈 春
- 专业：流体力学

Shanghai University Doctoral Dissertation (2006)

**Analytic Solution Computation for
Boussinesq Approximate and
Equatorial Beta-plane Approximate
Type Equations**

Candidate: Shen Chun

Major: Fluid Mechanics

Supervisor: Shi Weihui

Shanghai University Press

• Shanghai •

图书在版编目(CIP)数据

2006 年上海大学博士学位论文. 第 1 辑/博士学位论文编辑部编. —上海:上海大学出版社,2009. 12

ISBN 978 - 7 - 81118 - 511 - 9

I. 2... II. 博... III. 博士—学位论文—汇编—上海市—2006 IV. G643.8

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 162521 号

2006 年上海大学博士学位论文

——第 1 辑

上海大学出版社出版发行

(上海市上大路 99 号 邮政编码 200444)

(<http://www.shangdapress.com> 发行热线 66135110)

出版人:姚铁军

*

南京展望文化发展有限公司排版

上海华业装潢印刷厂印刷 各地新华书店经销

开本 890×1240 1/32 印张 264.75 字数 7 376 千

2009 年 12 月第 1 版 2009 年 12 月第 1 次印刷

印数:1—400

ISBN 978 - 7 - 81118 - 511 - 9/G · 513 定价:1000.00 元(50 册)

上海大学

本论文经答辩委员会全体委员审查,确认符合上海大学博士学位论文质量要求。

答辩委员会名单:

主任: **伍荣生** 院士, 南京大学大气科学系 210093

委员: **何金海** 教授, 南京信息工程大学大气科学系
210044

戴世强 教授, 上海市应用数学与力学研究所
200072

郭兴明 教授, 上海市应用数学与力学研究所
200072

盛万成 教授, 上海大学数学系 200444

黄思训 教授, 解放军理工大学气象学院 211101

张 铭 教授, 解放军理工大学气象学院 211101

导师: **施惟慧** 教授, 上海大学 200072

评阅人名单:

戴世强	教授, 上海市应用数学与力学研究所	200072
黄思训	教授, 解放军理工大学气象学院	211101
何金海	教授, 南京信息工程大学大气科学系	210044

评议人名单:

余志豪	教授, 南京大学大气科学系	210093
王 元	教授, 南京大学大气科学系	210093
谈哲敏	教授, 南京大学大气科学系	210093
张立凤	教授, 解放军理工大学气象学院	211101

答辩委员会对论文的评语

沈春同学的博士论文“Boussinesq 近似与赤道 Beta-平面近似类方程组的解析解计算”，应用分层理论提供的方法，研究了 Boussinesq 近似与赤道 β -平面近似类方程组，通过对这两类方程组的拓扑学性质的研究，得到了一些重要且有意义的结果：在 y 方向均匀的带有运动粘性项以及热耗散项的二维非静力 Boussinesq 近似的旋转流体控制方程的 C^2 不稳定性；当以 Rayleigh 摩擦代替粘性的影响以及 Newton 冷却代替热量的耗散，则能得到一个 C^1 稳定方程；研究并比较了静力平衡条件下，无粘绝热的三维 Boussinesq 近似方程。对赤道 β -平面近似浅水方程和热源强迫的热带环流方程，重点研究了其解空间构造，并给出了各种适定问题的求解方法。

该论文涉及大气科学中两种重要的近似，所以该选题是具有重要的理论意义和潜在的应用价值。

该论文的研究结果在以下方面具有创新：

1. 以不同于经典方法的拓扑学方法研究非线性偏微分方程。
2. 完整地描述了带有运动粘性和热耗散的二维非静力 Boussinesq 近似方程和无粘绝热三维静力 Boussinesq 近似方程的拓扑学性质。
3. 对方程的运动粘性项和热耗散项进行了适当的替代，得到了一个新的稳定方程。

从论文可以反映出作者具备扎实的基础理论以及系统深入的专业知识,论文立论正确,条理清晰,结果合理,在答辩中回答问题正确,思维敏捷,有逻辑。

评委一致认为该论文是一篇较优秀的博士论文,全票通过答辩,全票通过建议授予博士学位。

答辩委员会表决结果

经答辩委员会表决,全票同意通过沈春同学的博士学位论文答辩,建议授予工学博士学位。

答辩委员会主席: **伍荣生**

2006年3月1日

摘 要

本论文应用分层理论所提供的方法,研究了大气科学中两种非常重要的近似: Boussinesq 近似与赤道 β -平面近似类的方程组。通过分析这类方程组的拓扑学性质,研究了它们的稳定性以及各种定解问题的适定性。对于适定的定解问题,在解析函数类空间中给出了其准确解的具体的求解方法;对于不适定的定解问题,如果有解,也给出了构造其形式解的方法。

本文的主要结果如下:

1) 证明了在 y 方向上均匀的带有运动粘性项以及热耗散项的二维非静力、Boussinesq 近似的 $x-z$ 面上二维旋转流体的控制方程组在 C^2 函数类中是一个不稳定的方程组。

2) 如果以瑞利摩擦来代替粘性的影响,以牛顿冷却来代替热量的耗散,则所获得的一个新的方程组在 C^1 函数类中是一个稳定的方程组,给出了其解空间的构造和各种定解问题的适定性的判别方法。并分析了这种简化的合理性以及方程组的稳定性发生变化的根本原因。最后对于其广义的初值问题,我们给出了具体的计算实例。

3) 研究了在静力平衡的条件下,一个无粘、绝热的三维 Boussinesq 近似的方程组。特别地,研究了它的广义初值问题并给出实例,以与非静力平衡的情况进行比较。

4) 对于赤道 β -平面近似的浅水方程组和热源强迫的热带环流方程组,重点研究了它们的解空间构造,并给出了各种适

定的定解问题在解析函数类空间中准确解的具体的求解方法，并编制程序去计算其级数解。

关键词 Boussinesq 近似, β -平面近似, 分层理论, 定解问题, Cauchy 问题, 稳定性, 适定性

Abstract

This paper, applying the theory of stratification, devotes to two kinds of approximate equations: the Boussinesq approximate type equations and the equatorial β -plane approximate type equations, which are very important in the atmospheric science. We study the stability and the well-posedness of the problem for determining solution by analyzing the topological property of these equations. We give the solution approach of exact solution in detail in the class of the analytic functions for the well-posed problem and the methods of construction of the formal solutions for the ill-posed problem.

The main results can be stated as follows:

1. It is proved that the two-dimensional non-hydrostatic Boussinesq equations on the x - z plane with the kinetic viscous term and the thermal dissipative term are unstable equations in the C^2 function class.

2. If we replace the influence of the kinetic viscous term by Rayleigh friction and the thermal dissipative term by Newton cooling, the new generalized equations are stable equations in the C^1 function class. The construction of the solution space and the discriminating method for well-posedness of the problem of determining solution are given.

The reasonableness of simplification and the fundamental reason of the changes of stability are analyzed. The cases are given for the generalized initial value problems in detail.

3. The three-dimensional Boussinesq equations with no-viscosity and adiabatic under the hydrostatic equilibrium are studied. Especially, the generalized initial value problems are investigated and the cases are given in order to comparison with those under the non-hydrostatic equilibrium.

4. The construction of the solution space for shallow-water equations on the equatorial β -plane and the equations about the tropical circulation to heating are mainly studied. The solution method of exact solution in the analytic function class and the computational procedure to the series solution are expressed for the well-posed problem.

Key words Boussinesq approximate, β -plane approximate, stratification theory, the problem of determining solution, Cauchy problem, stability, posedness

目 录

摘要	1
Abstract	1
第一章 引言	1
1.1 大气运动方程组及其简化	1
1.2 Boussinesq 近似	3
1.3 赤道 β -平面近似	5
1.4 研究近况	7
1.5 本文主要工作	9
第二章 分层理论与偏微分方程	11
2.1 Ehresmann 空间	11
2.2 准本方程与本方程	16
2.3 典则系统	22
2.4 分层	24
2.5 Cauchy 问题与混合问题	33
第三章 二维非静力、Boussinesq 近似的方程组的稳定性	39
3.1 方程原型	39
3.2 带 Reyleigh 摩擦和 Newton 冷却的 Boussinesq 近似的方程组	40
3.2.1 改写方程	40
3.2.2 D 的本方程 D_*	41
3.2.3 分层	48

3.2.4	D 的 Cauchy 问题的适定性	56
3.2.5	计算实例	59
3.3	带有粘性项的二维非静力、Boussinesq 近似的 方程组	61
3.3.1	改写方程	61
3.3.2	计算本方程	62
3.3.3	分层	64
3.3.4	基本定理的证明	70
3.3.5	相关推论	71
3.3.6	计算实例	72
3.4	小结	73
第四章	三维静力、Boussinesq 近似的方程组	74
4.1	方程原型	74
4.2	D 的本方程 D	75
4.3	方程组 D 的拓扑学性质	77
4.4	方程组 D 的定解问题的适定性条件	88
4.5	计算实例	92
第五章	赤道 β -平面近似类方程组的解析解计算	96
5.1	赤道 β -平面近似的浅水方程组	96
5.1.1	方程原型	96
5.1.2	本方程的计算	97
5.1.3	定解问题的适定性条件	99
5.1.4	解析解的计算	108
5.2	热源强迫的热带环流方程组	110
5.2.1	方程原型	110
5.2.2	本方程的计算	111
5.2.3	定解问题的适定性条件	111

5.2.4 适定性问题的解析解计算	120
5.3 小结	123
附录一:赤道 β -平面近似的浅水方程组的解析解计算程序	125
附录二:赤道 β -平面近似的浅水方程组的解析解 计算程序	130
参考文献	134
致谢	140

第一章 引言

1.1 大气运动方程组及其简化

天气和气候的变化是和大气运动紧密联系在一起的,为了能够比较准确地预报出天气的变化以及气候的改变,有必要对反映大气运动的基本方程组进行理论上的定性分析与研究,并对它进行数值模拟。

大气运动是在特定的环境中发生的,所以可以在事实的基础上对它做出一些假设^[1-9]。首先,在研究地球的宏观运动时,可把大气视为可压缩的连续流体。表征大气运动状态和热力状态的各种物理量,例如大气运动的速度、气压、密度和温度等,一般认为是空间点和时间的连续函数,并且经常假设这些场变量的各阶微商也是空间点和时间的连续函数。因为大气是可压缩流体,当大气受热时,温度场的变化会引起气压场的变化,从而也会导致大气运动的变化,反之亦然;所以大气的动力学过程和热力学过程是紧密联系,相互影响,相互制约的。因而可以广泛应用流体力学和热力学原理来研究大气运动的具体规律。

由于大气是在地球上运动的,所以我们还应注意到地球大气本身的一些特性。大气是重力场中旋转流体,地球大气时时受到重力场作用,所以大气的水平尺度以千公里计,而铅直尺度仅为10 km,这决定了在大尺度大气中,铅直方向上的速度远远小于水平方向上的速度。通常我们还把大气当作层结流体,有时还必须考虑到大气中含有水分以及大气的下边界是不均匀的等一些特点。

根据这些基本假设以及地球大气运动的特点,从支配大气运动状态和热力学状态变化的基本定律(牛顿第二定律、质量守恒定律、热力学能量守恒定律、气体实验定律等)出发,我们就推出干空气(即不考虑降水等)在局地直角坐标系下的大气运动基本方程组为:

$$\begin{cases} \frac{d\vec{V}}{dt} = -\vec{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p - 2\vec{\Omega} \times \vec{V} + \vec{F} \\ \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \vec{V} = 0 \\ p = \rho R T \\ C_p \frac{dT}{dt} - \frac{RT}{p} \frac{dp}{dt} = \dot{Q} \end{cases} \quad (1.1)$$

其中算子 ∇ , $\frac{d}{dt}$ 分别表示为

$$\begin{aligned} \nabla &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right), \\ \frac{d}{dt} &= \partial_t + \vec{V} \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

这里 $\vec{V} = (u, v, w)$ 为大气流体的速度; $\vec{g}$ 为重力,它是地心引力和惯性离心力的合力; p 为气体压强, $-\frac{1}{\rho} \nabla p$ 为气压梯度力; $\vec{\Omega}$ 为地球自转角速度, $-2\vec{\Omega} \times \vec{V}$ 为科里奥利氏(Coriolis)力,它是由于地球自转以及空气微团与地球有相对运动而产生的,因为它垂直于 $\vec{V}$,对空气微团运动不做功,所以它只改变速度的方向,不改变速度的大小; $\vec{F}$ 为单位质量空气微团所受的分子粘性力; ρ 为流体密度; R 为气体常数; T 为温度; C_p 为定压比热; $\dot{Q} = \frac{dQ}{dt}$ 为非绝热加热率,对于不考虑水汽的