



国家出版基金项目
NATIONAL PUBLICATION FOUNDATION



信息与计算科学丛书 — 51

间断有限元理论与方法

张 铁 著



科学出版社



国家出版基金项目
NATIONAL PUBLICATION FOUNDATION

信息与计算科学丛书 51

间断有限元理论与方法

张 铁 著

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

有限元方法是现代科学与工程计算领域中最重要数值方法之一, 间断有限元方法则是传统(连续)有限元方法的创新形式、改进和发展. 本书系统地阐述了间断有限元的基本理论、思想和方法.

本书主要针对椭圆方程、一阶双曲方程、一阶正对称双曲方程组、对流扩散方程、Stokes 方程和椭圆变分不等式等偏微分方程定解问题, 介绍各种形式间断有限元方法的构造、稳定性和误差分析、超收敛性质、后处理技术、后验误差估计和自适应计算.

本书可供高等院校计算数学、应用数学、计算物理和计算力学等专业的研究生、教师以及从事科学与工程计算工作的科技人员阅读和参考.

图书在版编目(CIP)数据

间断有限元理论与方法/张铁著. —北京: 科学出版社, 2012
(信息与计算科学丛书; 51)
ISBN 978-7-03-033671-2

I. ①间… II. ①张… III. ①有限元法—研究 IV. ①O241.82

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012) 第 032522 号

责任编辑: 王丽平 房 阳 / 责任校对: 李 影
责任印制: 钱玉芬 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

中国科学院印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2012 年 4 月第 一 版 开本: B5(720 × 1000)

2012 年 4 月第一次印刷 印张: 14 1/4

字数: 272 000

定价: 58.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前 言

有限元方法是现代科学与工程计算领域中最重要数值方法之一, 间断有限元方法则是传统(连续)有限元方法的创新形式、改进和发展. 与连续有限元方法相比, 间断有限元方法具有两个显著特征: 一是容许带有悬挂点(hanging node)的不相容网格剖分; 二是有限元分片多项式在跨越单元交界面时没有连续性要求. 这两个特征使得间断有限元方法具有许多良好的性质. 例如, 物理守恒性质可在单元上满足, 数值解具有高分辨率; 适于处理不同介质的物理问题(解在区域内部有间断线); 容易实现局部网格加密和各单元多项式的独立选取, 这使得有限元 hp 自适应计算更为灵活和高效; 由于各单元自由度之间的联系减弱, 它所产生的离散方程组也具有较好的并行计算结构. 这些优点已经使间断有限元方法广泛地应用于求解各类偏微分方程定解问题.

间断有限元方法起源于一阶双曲问题和椭圆边值问题两类不同问题数值方法的研究. 对于一阶双曲问题, 间断有限元方法最初由 Reed 和 Hill 在 1973 年依据迎风格式的思想提出, 并应用于数值模拟中子输运方程; 对于椭圆边值问题, 间断有限元方法则是由基于 Nitsche 惩罚变分形式的非协调有限元方法演化而来的. 起源于两个不同途径的间断有限元方法的主要区别是: 在处理间断有限元函数跨越单元交界面的不连续性时, 前者采用数值通量(numerical flux), 而后者则使用内部惩罚(interior penalty)方法. 随着研究的深入, 人们也将数值通量形式的间断有限元方法应用于求解椭圆边值问题, 并且发现基于惩罚形式和基于数值通量形式的两类间断有限元方法具有内在的等价性. 在间断有限元方法提出后的最初十几年里, 人们并没有充分认识到它相对于连续有限元方法所具有的显著优点, 从而受到冷落. 进入 20 世纪 80 年代后期, 鉴于它在数值求解一阶双曲问题上所获得的成功以及在有限元自适应计算和并行计算方面所具有的优势, 间断有限元方法重新受到人们的青睐. 此后, 间断有限元方法进入了新的发展时期, 并且成为求解各类偏微分方程主流的数值方法之一.

目前, 国内外有关间断有限元理论与方法的研究已经取得了丰富的成果, 学术论文层出不穷, 但遗憾的是作者本人尚没有看到论述间断有限元方法的理论专著. 此外, 作者自 20 世纪 80 年代就开始从事间断有限元方法的研究工作, 在该领域中积累了较丰富的学识和一定的学术研究成果, 作者感到有必要将本人和国内外学者的研究工作系统的归纳和总结, 供有关人员阅读和参考. 上述这些因素促使作者撰写了这本著作.

本书主要针对椭圆方程、一阶双曲方程、一阶正对称双曲方程组、对流扩散方程、Stokes 方程和椭圆变分不等式等偏微分方程定解问题, 介绍各种形式间断有限元方法的构造、稳定性和误差分析、超收敛性质、后处理技术、后验误差估计和自适应计算. 本书内容主要取自作者多年来在这一领域中的研究成果, 同时也参考了国内外学者的相关工作. 限于篇幅, 本书没有介绍非线性问题 (例如, 非线性双曲守恒律) 的间断有限元方法. 有关这方面的研究工作, 读者可参考书后所引文献.

本书中有关一阶双曲问题间断有限元方法的内容是国家自然科学基金资助项目 (No.11071033) 的研究工作, 作者对该基金的资助以及科学出版社王丽平编辑对本书出版的关心和支持表示感谢!

作 者

2011 年 5 月于沈阳东北大学

《信息与计算科学丛书》序

20 世纪 70 年代末, 由已故著名数学家冯康先生任主编, 科学出版社出版了一套《计算方法丛书》, 至今已逾 30 册. 这套丛书以介绍计算数学的前沿方向和科研成果为主旨, 学术水平高、社会影响大, 对计算数学的发展、学术交流及人才培养起到了重要的作用.

1998 年教育部进行学科调整, 将计算数学及其应用软件、信息科学、运筹控制等专业合并, 定名为“信息与计算科学专业”. 为适应新形势下学科发展的需要, 科学出版社将《计算方法丛书》更名为《信息与计算科学丛书》, 组建了新的编委会, 并于 2004 年 9 月在北京召开了第一次会议, 讨论并确定了丛书的宗旨、定位及方向等问题.

新的《信息与计算科学丛书》的宗旨是面向高等学校信息与计算科学专业的高年级学生、研究生以及从事这一行业的科技工作者, 针对当前的学科前沿, 介绍国内外优秀的科研成果. 强调科学性、系统性及学科交叉性, 体现新的研究方向. 内容力求深入浅出, 简明扼要.

原《计算方法丛书》的编委和编辑人员以及多位数学家曾为丛书的出版做了大量工作, 在学术界赢得了很好的声誉, 在此表示衷心的感谢. 我们诚挚地希望大家一如既往地关心和支持新丛书的出版, 以期为信息与计算科学在新世纪的发展起到积极的推动作用.

石钟慈

2005 年 7 月

目 录

《信息与计算科学丛书》序

前言

第 1 章 预备知识	1
1.1 Sobolev 空间简介	1
1.2 嵌入定理	3
1.3 有限元空间及其性质	6
1.3.1 有限元空间	6
1.3.2 插值和投影逼近	7
1.3.3 逆性质和迹不等式	13
1.4 椭圆边值问题的有限元方法	14
1.4.1 边值问题的适定性	14
1.4.2 连续有限元逼近	16
第 2 章 椭圆问题惩罚形式的间断有限元方法	19
2.1 历史的回顾	19
2.2 惩罚方法的一般理论	22
2.3 相容方法	26
2.4 不相容方法	32
2.5 后验误差分析	34
2.5.1 后验误差上界估计	34
2.5.2 后验误差下界估计	37
2.5.3 数值算法	39
2.6 插值函数的超逼近性质	40
2.6.1 一维插值函数的超逼近性质	40
2.6.2 高维插值函数的超逼近性质	44
2.7 后处理技术与超收敛性	52
2.7.1 超逼近估计	52
2.7.2 L_2 -投影的后处理技术	54
2.7.3 导数小片插值恢复技术	56
2.7.4 整体插值后处理技术	61

第 3 章 椭圆相关问题的间断有限元方法	64
3.1 对流占优反应扩散方程	64
3.1.1 间断有限元格式	64
3.1.2 稳定性与误差分析	65
3.1.3 超收敛与后验误差估计	67
3.2 Stokes 问题	69
3.2.1 线性速度-常数压力间断元	70
3.2.2 误差分析	72
3.2.3 高次间断有限元	76
3.3 椭圆变分不等式问题	77
3.3.1 问题及其间断有限元近似	78
3.3.2 最优误差估计与迭代求解	80
3.4 第二类椭圆变分不等式	81
3.4.1 问题及其正则化	81
3.4.2 间断有限元方法	84
3.4.3 先验误差估计	85
3.4.4 后验误差估计	88
3.4.5 数值计算例	91
第 4 章 数值通量形式的间断有限元方法	93
4.1 介绍	93
4.2 数值通量方法的基本公式	94
4.3 基本公式的理论分析	97
4.4 不稳定格式	104
4.5 广义局部间断有限元方法	109
4.6 对流扩散问题	113
4.6.1 迎风型间断有限元格式	113
4.6.2 误差分析	116
4.6.3 对流扩散反应方程	120
4.7 椭圆相关问题	121
第 5 章 一阶双曲方程的间断有限元方法	124
5.1 起源与历史发展	124
5.2 问题及其间断有限元格式	126
5.3 最优阶误差估计	132
5.4 三角元的超收敛估计	134
5.5 矩形元的超收敛估计	137

5.5.1	对流方向平行坐标轴情形	138
5.5.2	一般情形的矩形元	139
5.6	有关近似的超收敛估计	143
5.6.1	对流方向导数的后处理	143
5.6.2	负模误差估计与均值逼近	144
5.6.3	数值计算例	148
5.7	后验误差分析	149
5.7.1	后验误差估计: 特殊网格情形	149
5.7.2	后验误差估计: 一般网格情形	151
5.7.3	后验误差下界估计	155
5.7.4	数值计算例	156
5.8	非定常问题	156
5.8.1	半离散间断有限元逼近	157
5.8.2	全离散间断有限元逼近	159
5.8.3	后验误差分析	160
第 6 章	一阶正对称双曲方程组的间断有限元方法	166
6.1	一阶正对称双曲方程组	166
6.2	拟迎风间断有限元方法	171
6.2.1	拟迎风格式及其稳定性	171
6.2.2	最优阶误差估计	175
6.2.3	数值计算例	179
6.3	惩罚形式的间断有限元方法	180
6.4	插值函数的超逼近性质	184
6.4.1	强正规三角剖分	184
6.4.2	几乎一致的矩形剖分	188
6.5	惩罚方法的超收敛估计	193
6.5.1	线性三角元	193
6.5.2	双线性矩形元	194
6.6	后验误差估计	195
6.7	非定常问题	198
6.7.1	半离散间断有限元近似	198
6.7.2	全离散间断有限元近似	199
6.8	显式时空间断有限元方法	201
6.8.1	时空间断元有限元格式及其稳定性	201
6.8.2	误差分析	204

参考文献	208
已出版书目	215

第1章 预备知识

本章介绍 Sobolev 空间、有限元空间及其性质. 并简要回顾椭圆问题的连续有限元方法. 需要指出, 本章中引进的形状正则剖分概念和局部投影逼近等是专门为间断有限元方法做准备的.

1.1 Sobolev 空间简介

设 \mathbf{R}^d 为 d 维欧氏空间, Ω 为 \mathbf{R}^d 中的有界区域. 用 $L_p(\Omega)$ ($1 \leq p < \infty$) 表示所有定义在 Ω 上的 p 次可积函数组成的集合, $L_\infty(\Omega)$ 表示所有在 Ω 上本性有界的 (即除去一个零测度集外是有界的) 可测函数组成的集合, 则按范数

$$\|u\|_{0,p} = \left(\int_{\Omega} |u(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty$$
$$\|u\|_{0,\infty} = \text{ess sup}_{\mathbf{x} \in \Omega} |u(\mathbf{x})| \equiv \inf_{\text{meas}(E)=0} \sup_{\mathbf{x} \in \Omega \setminus E} |u(\mathbf{x})|, \quad p = \infty$$

$L_p(\Omega)$ ($1 \leq p \leq \infty$) 为 Banach 空间; 而 $L_2(\Omega)$ 为 Hilbert 空间, 其内积定义为

$$(u, v) = \int_{\Omega} u v d\mathbf{x}$$

用 $C^m(\Omega)$ 表示区域 Ω 上 m 次连续可微的函数组成的集合, $C^\infty(\Omega)$ 表示 Ω 上无穷次可微函数组成的集合. 记

$$\text{supp}(u) = \overline{\{\mathbf{x} \in \Omega : u(\mathbf{x}) \neq 0\}}$$

并称之为函数 u 的支集. 用 $C_0^m(\Omega)$ 和 $C_0^\infty(\Omega)$ 分别表示由 $C^m(\Omega)$ 和 $C^\infty(\Omega)$ 中一切具有紧支集的函数组成的集合.

记区域 Ω 上的偏微分算子 $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_d^{\alpha_d}$, 其中 $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ 为非负整数, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ 称为 d 重指标, 标记 $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_d$.

定义 1.1 设 $L_{\text{loc}}^1(\Omega)$ 为区域 Ω 上的 Lebesgue 局部可积函数空间, $u \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$. 如果存在 $v \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$, 使得

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \varphi d\mathbf{x} = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \varphi d\mathbf{x}, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

则称 v 是 u 的 α 阶广义导数, 并记为 $v = D^\alpha u$.

由变分法基本引理可知, 广义导数若存在必唯一. 又容易验证, 若 u 的古典导数存在且属于 $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, 则其广义导数存在且与古典导数一致. 因此广义导数是古典导数的推广.

广义导数具有如下性质:

- (1) $D^\alpha(au + bv) = aD^\alpha u + bD^\alpha v$, a, b 为常数;
- (2) $D^{\alpha+\beta}u = D^\alpha(D^\beta u)$;
- (3) $D(uv) = uDv + vDu$;
- (4) $D^\alpha u = 0$ 对一切 $|\alpha| = m$ 成立, 当且仅当 u 几乎处处等于一个 $m-1$ 次多项式.

设 m 为非负整数, $1 \leq p \leq \infty$, 考虑函数空间

$$W^{m,p}(\Omega) = \{ u : D^\alpha u \in L_p(\Omega), |\alpha| \leq m \}$$

这个空间依范数

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty$$

$$\|u\|_{m,\infty} = \max_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{0,\infty}, \quad p = \infty$$

构成一个 Banach 空间, 称之为 Sobolev 空间; 相应的半范数为

$$|u|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty$$

$$|u|_{m,\infty} = \max_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_{0,\infty}, \quad p = \infty$$

又令 $W_0^{m,p}(\Omega)$ 为 $C_0^\infty(\Omega)$ 按范数 $\|\cdot\|_{m,p}$ 在空间 $W^{m,p}(\Omega)$ 中的闭包, 则 $W_0^{m,p}(\Omega)$ 也是一个 Banach 空间, 它一般是 $W^{m,p}(\Omega)$ 的一个真闭子空间. 当 $p=2$ 时, 简记

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega), \quad H_0^m(\Omega) = W_0^{m,2}(\Omega)$$

$$\|\cdot\|_m = \|\cdot\|_{m,2}, \quad \|\cdot\| = \|\cdot\|_{0,2}, \quad |\cdot|_m = |\cdot|_{m,2}$$

于是 $H^m(\Omega)$ ($H^0(\Omega) = L_2(\Omega)$) 和 $H_0^m(\Omega)$ 是 Hilbert 空间, 其内积为

$$(u, v)_m = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v), \quad u, v \in H^m(\Omega)$$

Sobolev 空间具有如下性质:

- (1) $W^{m,p}(\Omega)$ ($1 \leq p < \infty$) 是可分的;

(2) $W^{m,p}(\Omega)$ ($1 < p < \infty$) 是自反和一致凸的;

(3) $\{u \in C^\infty(\Omega) : \|u\|_{m,p} < \infty\}$ 在 $W^{m,p}(\Omega)$ ($1 \leq p < \infty$) 中稠密; 当 Ω 的边界是局部 Lipschitz 连续时, $C^m(\bar{\Omega})$ 在 $W^{m,p}(\Omega)$ 中稠密.

再引进负指数 Sobolev 空间. 设 $1 < p < \infty$, $p' = p/(p-1)$ 为 p 的共轭指数. 显然, 对任一 $v \in L_{p'}(\Omega)$, 可确定 $W^{m,p}(\Omega)$ 上的一个有界线性泛函:

$$L_v(u) = (u, v), \quad u \in W^{m,p}(\Omega)$$

将此泛函的范数记为

$$\|v\|_{-m,p'} (= \|L_v\|) = \sup_{u \in W^{m,p}(\Omega)} \frac{|(u, v)|}{\|u\|_{m,p}}$$

并称之为 v 的负范数. 显然

$$|(u, v)| \leq \|u\|_{m,p} \|v\|_{-m,p'}$$

定义负指数 Sobolev 空间

$$W^{-m,p'}(\Omega) \equiv L_{p'}(\Omega) \text{ 按范数 } \|\cdot\|_{-m,p'} \text{ 的完备化空间}$$

可以证明 $W^{-m,p'}(\Omega)$ 等距同构于对偶空间 $(W^{m,p}(\Omega))'$. 当 $p' = 2$ 时, 简记 $H^{-m}(\Omega) = W^{-m,2}(\Omega)$.

1.2 嵌入定理

Sobolev 空间更深刻的性质反映为下述的嵌入定理和迹嵌入定理.

定义 1.2 设 X 和 Y 是两个赋范线性空间, 如果

- (1) $X \subset Y$;
- (2) 将 $x \in X$ 映为 $Ix \in Y$ 的恒同算子 I 是连续的, 即存在常数 M 使得

$$\|Ix\|_Y \leq M\|x\|_X, \quad \forall x \in X$$

则称 X 嵌入 Y , 记为 $X \hookrightarrow Y$. 又称 I 为嵌入算子, M 为嵌入常数.

Sobolev 嵌入定理 设 $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ 为有界区域, 边界 $\partial\Omega$ 是局部 Lipschitz 连续的, m, k 为非负整数, $1 \leq p \leq \infty$, 则

$$W^{m+k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k,q}(\Omega), \quad m < d/p, \quad 1 \leq q \leq dp/(d-mp)$$

$$W^{m+k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k,q}(\Omega), \quad m = d/p, \quad 1 \leq q < \infty$$

$$W^{m+k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^k(\bar{\Omega}), \quad m > d/p$$

特别地, 下述嵌入还是紧的:

$$W^{m+k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k,q}(\Omega), \quad m < d/p, \quad 1 \leq q < dp/(d - mp)$$

$$W^{m+k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k,q}(\Omega), \quad m = d/p, \quad 1 \leq q < \infty$$

$$W^{m+k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^k(\bar{\Omega}), \quad m > d/p$$

需要说明的是, $W^{m,p}(\Omega)$ 中的元素是函数的等价类, 几乎处处相等的函数归为同一等价类. $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\bar{\Omega})$ 的含义是: 任一 $u \in W^{m,p}(\Omega)$ 必等价于 $C^0(\bar{\Omega})$ 中的一个函数 (仍可标记为 u), 同时存在常数 M 使得

$$\|u\|_{C^0(\bar{\Omega})} \leq M \|u\|_{m,p}, \quad \forall u \in W^{m,p}(\Omega)$$

现在考虑 $H^m(\Omega)$ 中函数的边界值, 即 u 在 $\partial\Omega$ 上的迹. 由于 $\partial\Omega$ 为 d 维零测度集, 而 $H^m(\Omega)$ 中的函数可以在零测度集上没有定义, 因此在通常意义下讨论 u 在 $\partial\Omega$ 上的取值是没有意义的. 下面将利用 $C^m(\bar{\Omega})$ 在 $H^m(\Omega)$ 中的稠密性, 给出 $H^m(\Omega)$ 中函数在边界上迹的确切定义.

定义 1.3 设有界区域 $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ 具有 m 阶光滑的边界, $u \in C^m(\bar{\Omega})$. 线性算子 $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{m-1}$:

$$\gamma_j u = \left. \frac{\partial^j u}{\partial \mathbf{n}^j} \right|_{\partial\Omega}, \quad j = 0, 1, \dots, m-1$$

称为迹算子, 其中 $\frac{\partial^j}{\partial \mathbf{n}^j}$ 表示沿边界 $\partial\Omega$ 外法方向的 j 次方向导数.

引理 1.1 ^[1, 103] 对上述区域, 存在常数 $C(\Omega) > 0$, 使得

$$\|\gamma_j u\|_{0,\partial\Omega} \leq C(\Omega) \|u\|_{j+1}, \quad \forall u \in C^m(\bar{\Omega}), \quad 0 \leq j \leq m-1$$

现在对 $u \in H^m(\Omega)$, 取序列 $\{u_k\} \subset C^m(\bar{\Omega})$ 使得 $\|u_k - u\|_m \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$. 由引理 1.1 知 $\{\gamma_j u_k\}$ 是 $L_2(\partial\Omega)$ 中的 Cauchy 序列, 故存在极限 $v_j \in L_2(\partial\Omega)$, 显然 v_j 与 $\{u_k\}$ 的选取无关. 现在定义 $u \in H^m(\Omega)$ 在 $\partial\Omega$ 上的迹:

$$\gamma_j u = v_j = \lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_j u_k, \quad j = 0, 1, \dots, m-1$$

迹嵌入定理 设有界区域 $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ 具有 m 阶光滑的边界, $u \in H^m(\Omega)$, 则存在与 u 无关的常数 $C(\Omega)$, 使得

$$\|\gamma_j u\|_{0,\partial\Omega} \leq C(\Omega) \|u\|_{j+1}, \quad \forall u \in H^m(\Omega), \quad 0 \leq j \leq m-1 \quad (1.1)$$

特别地,

$$\|u\|_{0,p,\partial\Omega} \leq C(\Omega) \|u\|_{1,p}, \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega), \quad 1 < p \leq \infty \quad (1.2)$$

此不等式 (通常称有嵌入 $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L_p(\partial\Omega)$) 只要求 $\partial\Omega$ 是 Lipschitz 连续的.

由于 $H_0^m(\Omega)$ 是 $C_0^\infty(\Omega)$ 的完备化空间, 则根据迹算子的定义可有

$$H_0^m(\Omega) = \left\{ u \in H^m(\Omega) : \frac{\partial^j u}{\partial \mathbf{n}^j} \Big|_{\partial\Omega} = 0, j = 0, 1, \dots, m-1 \right\}$$

关于迹嵌入定理的更精确形式涉及分数次 Sobolev 空间 $H^s(\Omega)$, 其中 $s \geq 0$ 为任意实数. 此时, 对任意 $u \in H^{1+s}(\Omega)$, 迹算子 $\gamma_j : H^{1+s}(\Omega) \rightarrow H^{\frac{1}{2}+s-j}(\partial\Omega)$, $j = 0, 1, \dots, [s]$ ([s] 表示小于 s 的最大整数) 有意义, 并且

$$\|\gamma_j u\|_{\frac{1}{2}+s-j, \partial\Omega} \leq C(\Omega) \|u\|_{1+s}, \quad j = 0, 1, \dots, [s]$$

特殊情况是: 当 $s > 1/2$ 时, 才有 $H^s(\Omega) \hookrightarrow L_2(\partial\Omega)$, 并且

$$\|u\|_{0, \partial\Omega} \leq C(\Omega) \|u\|_s, \quad s > \frac{1}{2}$$

迹算子 γ_j 是 $H^{1+s}(\Omega) \rightarrow H^{\frac{1}{2}+s-j}(\partial\Omega)$ 的满映射 (但不是 1-1 的), 对任何 $g \in H^{\frac{1}{2}+s-j}(\partial\Omega)$, 存在 $u \in H^{1+s}(\Omega)$ (与 γ_j 有关), 使得 $\gamma_j u = g$ 且

$$\|u\|_{1+s} \leq \|\gamma_j u\|_{\frac{1}{2}+s-j, \partial\Omega}, \quad j = 0, 1, \dots, [s]$$

(参见文献 [1] 定理 7.53).

最后介绍几个 Sobolev 空间中常用的不等式.

Poincaré 不等式 设 $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ 为有界区域, $\Gamma \subset \partial\Omega$, $\text{meas}(\Gamma) > 0$, 则存在常数 C , 使得

$$\|u\|_{1,p} \leq C \left(|u|_{1,p} + \left| \int_{\Gamma} u ds \right| \right), \quad u \in W^{1,p}(\Omega), \quad 1 \leq p \leq \infty \quad (1.3)$$

特别当 $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ 时, 不等式 (1.3) 给出了 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 空间中范数 $\|\cdot\|_{1,p}$ 与半范数 $|\cdot|_{1,p}$ 的等价性, 此时可有

$$\|u\|_{1,p} \leq C |u|_{1,p}, \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad 1 \leq p \leq \infty \quad (1.4)$$

内插不等式 设 $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ 为有界区域, 边界 $\partial\Omega$ 是 Lipschitz 连续的, $k = s(1-\theta) + m\theta$, $0 \leq \theta \leq 1$, $0 \leq s \leq m$, 则存在常数 $C > 0$, 使得

$$\|u\|_k \leq C \|u\|_s^{1-\theta} \|u\|_m^\theta, \quad u \in H^m(\Omega) \quad (1.5)$$

进一步设 $1 < p \leq q < \infty$, $\alpha = d/p - d/q \leq 1$, 则有

$$\|u\|_{0,q} \leq C \|u\|_{0,p}^{1-\alpha} \|u\|_{1,p}^\alpha, \quad u \in W^{1,p}(\Omega) \quad (1.6)$$

这两个内插不等式取自文献 [6, 14].

1.3 有限元空间及其性质

有限元方法是求解偏微分方程变分问题的一种近似方法. 偏微分方程变分问题的近似方法实质上就是用有限维空间近似无穷维空间, 从而将无穷维空间中求解的变分问题转化为一个有限维的近似问题. 有限维近似空间的选取方法可有多种, 一种最常用的近似空间就是有限元空间, 它是建立在区域剖分基础上满足一定约束条件的分片多项式空间. 本节将介绍有限元空间的有关概念和知识.

1.3.1 有限元空间

在有界区域 $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ 上建立一个剖分 \mathcal{T}_h : 将 $\bar{\Omega}$ 分割为有限个具有 Lipschitz 连续边界的、互不重叠且内部非空的有界闭集 $\{K\}$ 之和, 即 $\bar{\Omega} = \bigcup\{K : K \in \mathcal{T}_h\}$, K 称为剖分单元, $h = \max h_K$ 称为剖分直径, $h_K = \text{diam}(K)$ 为单元直径.

定义 1.4 有限维空间 S_h 称为相应于剖分 \mathcal{T}_h 的有限元空间, 如果

(1) 对每一 $K \in \mathcal{T}_h$, 集合 $P_K = \{p : p = v_h|_K, \forall v_h \in S_h\}$ 是 K 上的某一多项式函数类;

(2) 存在一个自由度集合 $\Sigma_K = \{l_j, 1 \leq j \leq N\}$ (即一组线性无关的线性泛函, 它通常由插值节点和插值条件来规定), 它是 P_K 唯一可解的, 即对任意给定的一组实数 $\{\alpha_j, 1 \leq j \leq N\}$, 存在唯一的一个函数 $p \in P_K$ 满足

$$l_j(p) = \alpha_j, \quad 1 \leq j \leq N$$

(3) S_h 中的函数在 Ω 上具有一定的有界性或者光滑性, 例如 $S_h \subset L_2(\Omega)$, 或者 $S_h \subset C^m(\bar{\Omega})$.

三元集合 $\{K, P_K, \Sigma_K\}$ 称为一个有限元.

如果自由度集合 Σ_K 中含有导数值插值条件, 则称 $\{K, P_K, \Sigma_K\}$ 为 Hermite 型有限元; 反之称为 Lagrange 型有限元. 此外, 当仅有 $S_h \subset L_2(\Omega)$ 时, 称 S_h 为间断有限元空间; 而当 $S_h \subset C^m(\bar{\Omega})$ ($m \geq 0$) 时, 称 S_h 为连续有限元空间. 此时, 利用 Green 公式和广义导数定义, 可推得如下结果:

$$S_h = \{v_h \in C^m(\bar{\Omega}) : v_h|_K \in P_K, K \in \mathcal{T}_h\} \subset H^{m+1}(\Omega), \quad m \geq 0$$

下面给出两个最简单的有限元例子.

例 1.1 三角剖分情形. 设区域 $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ 可分割为有限个三角形之和, 则可建立区域 Ω 的三角剖分 $\mathcal{T}_h = \bigcup\{K\}$, 其中 K 为三角单元. 记 $P_k(K)$ 为单元 K 上总次数不超过 k 的多项式集合, 也即

$$p(x, y) = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{k-i} a_{ij} x^i y^j, \quad \forall p \in P_k(K)$$

定义 Lagrange 型线性三角元 $\{K, P_K, \Sigma_K\}$ (参见图 1.1):

$$K = \Delta a_1 a_2 a_3$$

$$P_K = P_1(K), \quad \dim(P_K) = 3$$

$$\Sigma_K = \{l_j : l_j(p) = p(a_j), j = 1, 2, 3\}$$

任一 $p(x, y) = a + bx + cy \in P_1(K)$ 由它在三角形顶点 a_1, a_2, a_3 上的函数值唯一确定。

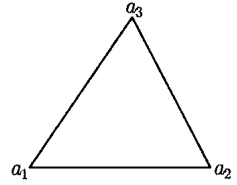
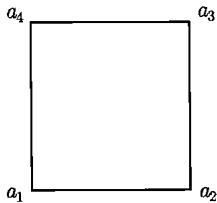


图 1.1 三角剖分单元

例 1.2 矩形剖分情形. 设区域 $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ 可分割为有限个矩形之和, 并且每个矩形的边和坐标轴平行, 则可建立区域 Ω 的矩形剖分 $T_h = \bigcup\{K\}$, 其中 K 为矩形单元. 记 $Q_k(K)$ 为单元 K 上关于每个变量次数不超过 k 的 (完全 k 次) 多项式集合, 也即

$$q(x, y) = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^k a_{ij} x^i y^j, \quad \forall q \in Q_k(K)$$

定义 Lagrange 型双线性矩形元 $\{K, P_K, \Sigma_K\}$ (参见图 1.2):



$$K = \square a_1 a_2 a_3 a_4$$

$$P_K = Q_1(K), \quad \dim(P_K) = 4$$

$$\Sigma_K = \{l_j : l_j(p) = p(a_j); j = 1, 2, 3, 4\}$$

图 1.2 矩形剖分单元

任一 $q(x, y) = a + bx + cy + dxy \in Q_1(K)$ 由它在矩形顶点 a_1, a_2, a_3, a_4 上的函数值唯一确定。

还可考虑高次多项式构成的有限元, Hermite 型有限元和任意四边形剖分情形, 这里不再详述。

1.3.2 插值和投影逼近

本节将介绍几个有限元空间中的逼近函数, 除传统的连续函数的插值逼近外, 还将给出适用于间断有限元空间的投影逼近, 这对间断有限元方法的误差分析是非常有用的。

定义 1.5 两个有限元 $\{K, P_K, \Sigma_K\}$ 和 $\{\tilde{K}, P_{\tilde{K}}, \Sigma_{\tilde{K}}\}$ 称为仿射等价的, 如果存在可逆的仿射变换 $F: \tilde{x} \in \tilde{K} \rightarrow x = F(\tilde{x}) \in K$, 使得

$$K = F(\tilde{K})$$

$$P_K = \{p = \tilde{p} \circ F^{-1}, \tilde{p} \in P_{\tilde{K}}\}$$

$$\Sigma_K = \{l_j : l_j(p) \text{ 与 } \tilde{l}_j(\tilde{p}) \text{ 的定义形式一致, } \forall \tilde{l}_j \in \Sigma_{\tilde{K}}\}$$