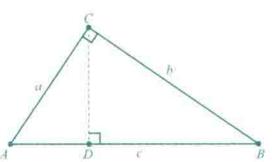
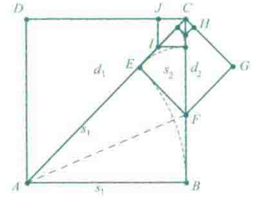
图灵原创

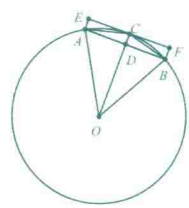
张景中院士作序推荐

三次数学危机与数学悖论

韩雪涛◎著







中国工信出版集团

人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

TURING 图灵原创

数学悖论与三次数学危机

韩雪涛◎著

人民邮电出版社
北京

图书在版编目（CIP）数据

数学悖论与三次数学危机 / 韩雪涛著. -- 北京：人民邮电出版社，2016.9

（图灵原创）

ISBN 978-7-115-43043-4

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①韩… Ⅲ. ①悖论一普及读物 Ⅳ. ①O144.2-49

中国版本图书馆CIP数据核字（2016）第175192号

内 容 提 要

本书介绍数学中的三大悖论（毕达哥拉斯悖论、贝克莱悖论、罗素悖论）与三次数学危机，以时间为序，以环环相扣的数学家轶事为纲，带大家了解数学发展史，理解悖论的巨大作用，以及认识欧几里得几何、无理数、微积分、集合论等的来龙去脉。书中穿插大量数学家的逸事，融知识性与趣味性于一体。本书这一版专门添加附录介绍了哥德尔证明。

◆ 著　　　韩雪涛
责任编辑　毛倩倩
责任印制　彭志环

◆ 人民邮电出版社出版发行　　北京市丰台区成寿寺路11号
邮编　100164　　电子邮件　315@ptpress.com.cn
网址　http://www.ptpress.com.cn
三河市海波印务有限公司印刷

◆ 开本：720×960　1/16
印张：20
字数：332千字　　　　2016年9月第1版
印数：1-4 000册　　　　2016年9月河北第1次印刷

定价：49.00元

读者服务热线：(010)51095186转600　印装质量热线：(010)81055316

反盗版热线：(010)81055315

广告经营许可证：京东工商广字第8052号

序

这本《数学悖论与三次数学危机》，值得一读。

它的特色是：史料脉络清晰，说理透彻明白，文字通俗生动。这样的科普作品会引起读者的兴趣，会启发读者进一步的思考，会给读者留下回味，特别是使青少年读者受益。

将数学悖论和三次数学危机联系在一起谈，确实是一个不错的想法。三次数学危机都是数学史上的精彩情节，引人入胜；而那些蕴含哲理的数学悖论更是发人深省。每个悖论的破译，都可从正反两个方面加深对数学基本概念和基本方法的理解。

通过这些故事，你会看到数学的发展真是一波三折。数学的严谨是一代又一代数学家努力的结果，数学的抽象更是经过千锤百炼而成的。

在本书中，你也许找不到“什么是数学悖论”这一问题的答案，但这并不影响你阅读本书，而且你还会从中得到乐趣和智慧。事实上，对于数学悖论，大家的理解至今并不一致。同一个问题，例如有理数的平方不可能等于2，在古希腊被认为是悖论，在今天看来不过是平常的事实。就是在同一个时代，不同学术素养的人对一个问题是不是悖论也会有不同的看法，甲以为是悖论，乙可能认为不过是推理中的一个普通而隐蔽的错误。

例如，作者在前言开始就提到的有名的“说谎者悖论”，几年前经过我

国数学家文兰的严密分析论证，其本质不过是布尔代数里的一个矛盾方程。矛盾方程在通常的代数中很普通，在布尔代数里也是要多少就有多少，每一个矛盾方程都可以转化为相应的悖论。“物以稀为贵”，若是要多少有多少，就不新鲜了。

一个悖论的数学本质被揭露了，它似乎就失去了被继续研究的价值。但是，在数学发展的历史上，它功不可没。当然，研究悖论的逻辑学家或数学哲学家，可能不同意文兰的看法；这说明，同时代的学者对同一个问题是不是悖论，也会有截然不同的看法。进一步可以说，同一个人，今天他认为某个问题是悖论，也许明天就会有不同的看法。

但是，不管一个数学问题叫不叫悖论，它总是一个问题。问题是数学的心脏，对问题的研究推动着数学的发展，对“悖论”的研究当然也会推动数学的发展。把某些悖论的出现叫作数学危机，不知道是谁第一个说的。我向作者请教过，作者暂时还没有找到出处。不过，在多数数学家看来，数学没有危机，也不会有危机。但是数学家忙着自己的研究，一般不太关心数学危机的说法。研究数学哲学的人，对于有没有数学危机，也是各有各的看法。但既然有了这个说法，又比较能吸引大众的目光，让大家对数学有更多的兴趣，也是好事。

我说这些，是希望读者看本书的时候更多地思考。对书中引用的不少观点，你不妨多问几个为什么，和古人做一次假想的对话，提出自己独立的看法。如能这样，从本书里得到的好处，可算是非常丰富了。

张景中

2007-3-14

前　　言

“现在我说的是一句假话。”这句话是真是假？假定它为真，将推出它是假；假定它为假，将推出它是真。

这个以“说谎者悖论”而闻名的命题自公元前4世纪就开始流传，迄今仍然以其特有的魅力吸引着为数众多的人们。悖论所具有的非凡吸引力由此可见一斑！

“悖论是有趣的！”每一个接触过悖论的人都会对此深有同感。

“悖论是极其重要的！”接受这一观点的人却要少得多。

在这本书中，我们就是要通过介绍在数学发展中产生了巨大影响的三个悖论（毕达哥拉斯悖论、贝克莱悖论、罗素悖论），使读者明了悖论不但迷人，而且是数学的一部分，并为数学的发展提供了重要而持久的助推力。

然而，什么是悖论？

对这个看似简单的问题，我们却不能给出一个普遍适用的答案。因为，悖论之悖是因人因时而异的。比如，现代读者一般很难在“$\sqrt{2}$是无理数”这一数学命题中看到古怪之处。然而，这一命题正是我们在第一部分中所要介绍的毕达哥拉斯悖论，也正是它在古希腊成为一场巨大数学风波的导火索，从而引发了第一次数学危机，进而引导古希腊数学走向一条迥异于

其他古代民族的发展道路。或许，对我们而言，如此平常的命题竟会导致数学危机并产生如此深刻的影响，才是真正的古怪之事！

由此得到的教益是，我们必须将悖论放在特定的背景下进行考察，才能透彻地明白其悖之因。鉴于此，在本书中我们将对毕达哥拉斯等悖论产生前的背景做详尽介绍。在此基础上，再对它们所引发的数学危机、危机之解决、悖论解决过程中产生的各种数学成果、悖论解决后产生的深远影响等做透彻阐述。

于是，读者朋友将会发现，这次数学之旅中对悖论的介绍在全书中占比不多。事实上，悖论在书中起的是穿针引线的作用，我们将围绕着它们更多地介绍“悖论之花”得以绽放的数学土壤和结出的数学之果。通过这种视野更为广阔的阐述，希望读者既能充分了解悖论对数学发展所起到的巨大作用，又能对数学中欧几里得几何、无理数、微积分、集合论等的来龙去脉获得更清晰的认识，并理解枝繁叶茂的数学大树是如何一步一步成长起来的。书中还将数学思想融于其中，穿插数学家的逸事，融知识性与趣味性于一体，既增加读者的兴趣，又有助于增进读者对“数学家是什么样的人”“数学是什么”的了解。

本书在写作过程中参考了大量的数学图书（书后附有主要的参考文献），谨向这些书的作者和译者表示真诚的谢意。

此外，我还要感谢我的父母与妻子，感谢他们对我一贯的支持。特别是我的妻子张红负责绘制了本书中的许多几何图形，为本书的早日完成提供了直接帮助。

张景中院士在百忙中为本书写了精彩序言，在此对张院士表示由衷的谢意。

需要说明的是，这本新版添加了一篇“哥德尔证明”的长文作为附录，并对旧版中存在的个别介绍不清或不当之处做了补充、修改。尽管如此，书中不足或错误仍在所难免，我真诚地期望能得到读者朋友的指正。如果你有什么意见或建议，可以通过电子邮件与我联系：zhhxt@163.com。

目　录

第一部分
毕达哥拉斯悖论与第一次数学危机

第一部分

毕达哥拉斯悖论与第一次数学危机

第1章
几何定理中的“黄金”：勾股定理

提到勾股定理，学过平面几何的读者们一定不会陌生。我们的这次数学之旅就将从这个历史悠久、应用广泛、又极受人们偏爱的定理起锚开航。

古老的定理

勾股定理有着悠久的历史，是人类最伟大的数学发现之一。世界上各大文明古国都在很早的时候独立发现了这个“勾股弦关系”，并对它有着不同程度的认识和了解。毫不夸张地说，它是人类最早认识并广泛使用的数学定理之一。

中国是较早发现、认识勾股定理的文明古国之一。《周髀算经》一书中有我国关于这一定理的最早文字记录。

《周髀算经》，原名《周髀》，全书分上下两卷，是我国现存最古老的天文学著作。关于它的成书年代，长期以来说法不一，一般被认为成书于约公元前1世纪。

在我国，古代天文历法研究与数学有着极为紧密的联系，《周髀》一书

就是很好的例证。在这本主要阐明“盖天说”和“四分历法”的天文学著作中，我们可以看到丰富的数学内容。除了极为珍贵的关于我国古代对勾股定理的认识资料，书中还涉及勾股测量术（利用相似直角三角形对应边成比例进行测量的方法）、复杂的分数运算等多方面的数学研究成果。因此，这本阐明天文学理论的著作又被看作最早的数学著作之一。从唐代起，《周髀》被列入“算经十书”，并称为《周髀算经》。

这本书的上卷开篇写道：

昔者周公问于商高曰：……古者包牺立周天历度，夫天不可阶而升，地不可得尺寸而度，请问数安从出？

商高曰：数之法出于圆方，圆出于方，方出于矩，矩出于九九八十一。故折矩，以为勾广三，股修四，径隅五。……故禹之所以治天下者，此数之所生也。

周公约生活于公元前 11 世纪，姓姬名旦，是周武王的弟弟。商高是周朝的大夫。上面一段古文记述了两人的对话，让我们先来简单解读一下。

周公问商高：“古时包牺作天文测量和订立历法，天没有台阶可以攀登上去，地又不能用尺来量度。请问数是从哪里得来的呢？”也就是说，那些有关天高地大的数值是如何得到的呢？

对周公的疑问，商高回答说：“数是根据圆和方的道理得来的。圆从方得来，方又是从矩得来的。矩是根据计算得出来的。”矩，这里可以解释为直角三角形。商高进一步提供了具体的测量方法：“……故折矩，以为勾广三，股修四，径隅五。”这一句可理解为：“作一个直角三角形，如果短直角边（勾）是 3，长直角边（股）是 4，那么斜边（弦）就是 5。”这清楚地表明，在当时商高已经知道“勾三股四弦五”这一勾股定理的特例。在书中随后的对话“故禹之所以治天下者”中，商高还将这一特例的发现推到大禹治水时期。如果能确认这一点，那么我国对勾股定理的最初了解就可以上溯到公元前 21 世纪。“此数之所生也”是商高最后的结论，即通过这种“勾股术”就可

以测量天高地大了。

从多次实践中了解勾股定理的特殊情况，这是对勾股定理认识的第一步。下一步则是发现普遍勾股定理。我国对此的最早认识也记载在《周髀算经》一书中。

本书上卷还记录了荣方与陈子两个人的一段问答。当陈子向荣方解释如何求出观测者到太阳的距离时，他说："若求邪至日者，以日下为勾，日高为股，勾股各自乘，并而开方除之，得邪至日……""自乘"指的是我们现在的平方，因此"勾股各自乘，并而开方除之"一句已经给出了求弦的一般方法。这说明陈子已经了解了勾股定理的一般形式。现在一般认为陈子是公元前7世纪至公元前6世纪的人，因此，我国最迟于这个时候已明确认识了普遍勾股定理。

在介绍了勾股定理在中国的情况后，我们再来看看其他几个古老文明对它的认识情况。

古印度关于勾股定理的认识记载在印度古老文献《测绳的法规》中。人们对于此书的成书年代很不确定，它大约为公元前800年到公元前200年的作品。书中记有："正方形斜线上方形为原方形之倍"，这自然只是勾股定理的特例。进而书中又给出了普遍勾股定理的表述："长方形对角线所给出的面积，等于长与宽所分别给出的面积之和。"

对古埃及早期关于勾股定理的了解，后人主要是通过推断得出的。

埃及以金字塔闻名于世。推想当时古埃及人在建筑金字塔时一定会遇到许多难题，比如金字塔的塔基是一个很大的正方形，这么大的正方形怎么画？那时候所用的工具大概只有绳子。四条边的长度相等这容易做到，关键在于确定直角。另外，金字塔所用的石块都是很规则的，是磨制而成。为了保证石块的方正，关键也在于确定直角。确定直角的过程中，产生的任何一点误差都会使金字塔变形，甚至导致造不成金字塔。然而，古埃及人不但建成了金字塔，而且精度还非常高。比如埃及开罗附近的吉萨大金字塔（即胡夫金字塔），其基底正方形的边长为230.35米，长度误差约1.3厘米，而直角误差只有12″或直角的1/27000！如果没有做直角的可靠方法，这样高的精度不

可能达到。另外，古埃及人在尼罗河泛滥之后要重新划分田地，这就需要经常进行土地丈量，在这种丈量中也会遇到做直角的问题。那么，古埃及人是如何做的呢？

据数学史家推测，古埃及的测量人员（他们的专名叫“拉绳者”）是利用3∶4∶5的关系做出直角的。具体可以这样完成：先将绳子等分为12段，在绳上打结，以三段、四段、五段为边围成一个三角形，那么五段长的边所对的角或者说两段稍短些的绳子之间便构成了一个直角。

因而，古埃及关于勾股定理的最早认识是通过对勾股定理的逆定理（中学教科书中称为直角三角形的判别条件）的应用体现出来的。当他们利用“三边为3∶4∶5的三角形一定是直角三角形”这一结论时，就应用了勾股定理逆定理的一个特例。后来人们还把边长为3、4、5的直角三角形叫作埃及三角形。事实上，这种用埃及三角形确定直角的方法，至今仍为一些石匠师傅所采用。他们在建造房屋时，就是用它来画屋基的4个角的。

我们发现，人类最早对勾股定理的认识，往往与以整数为边的直角三角形（勾股形）联系在一起。现在我们一般把整边勾股形三边称为勾股数，也叫商高数，或按国外说法叫毕达哥拉斯数。显然，勾股数是与勾股定理密切相关的数学概念，因而在对更多勾股数的认识与使用中，可以体现出人类对勾股定理了解的深入。

当我们提到《周髀算经》中的“勾广三，股修四，径隅五”，或古埃及人用3、4、5确定直角时，已经给出了一组勾股数（3，4，5）。这也是各古代民族最早找到的一组勾股数。我国最晚成书于公元1世纪下半叶的《九章算术》一书在“勾股章”中，使用了8组勾股数：（3，4，5）、（5，12，13）、（7，24，25）、（8，15，17）、（20，21，29）、（20，99，101）、（48，55，73）、（60，91，109）。古印度《测绳的法规》中出现了5组勾股数：（3、4、5）、（5、12、13）、（8、15、17）、（7，24，25）、（12、35、37）。

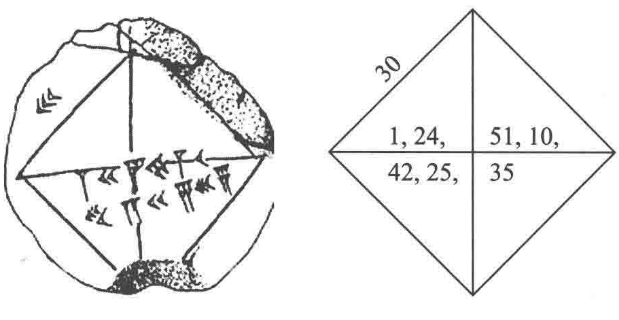
就现有的史料来看，在勾股定理和勾股数方面，曾生活在幼发拉底河及底格里斯

河流域的古巴比伦人取得了更加突出的成就，远远走在其他文明古国的前面。

在发现的公元前1700年左右的一些古巴比伦泥板中已经有许多勾股定理的应用题，这些题目中涉及了勾股数：(3，4，5)、(5，12，13)、(8，15，17)、(20，21，29)。古巴比伦人在勾股定理的认识上取得的最大(也是最令人惊叹的)成就，体现在一块长12.7厘米、宽8.8厘米的泥板中。这块泥板现珍藏在纽约哥伦比亚大学精品图书馆，编号为“普林顿322”(Plimpton 322)。经过鉴定，此泥板确认制成年代为公元前1900年至公元前1600年。

最初人们以为这块泥板是古巴比伦人的一份商业记录，没有什么重要意义。1945年，古巴比伦考古学家及数学家奥图·奈克包威尔(1899—1990)与他的助手做出了新的成功解释。他们撰文指出，泥板所记为勾股数。这个实物证据中共列出了15组勾股数，其中最大的一组勾股数，其斜边是18 541，一个直角边是12 709！更令人惊讶的是，它在时间上比其他古国早了1000多年！其数之大和年代之早都令人难以置信。

体现出古巴比伦人对勾股定理认识之深的还有一项发现。人们通过一块现收藏于耶鲁大学博物馆的编号为YBC 7289的泥板实物证实了解他们的这项发现。如图1-1所示(图a中数字是古巴比伦所使用的楔形文字，为了让人们容易明白，图b给出了阿拉伯数字)，上面刻有一个正方形，并画出了对角线。对角线上写了一行数字，即(1，24，51，10)。



(a)　　　　(b)

图　1-1