



普通高等教育“十五”国家级规划教材

北京大学物理学丛书

数学物理方法

第二版

吴崇试 编著



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS



普通高等教育“十五”国家级规划教



北京市高等教育精品教材立项项目



北京大学物理学丛书

数学物理方法

(第二版)

吴崇试 编著

北京大学出版社
北 京

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方法/吴崇试编著.—2版.—北京:北京大学出版社,2003.12

(北京大学物理学丛书)

ISBN 7-301-06819-0

I.数… II.吴… III.数学物理方法-高等学校-教材 IV.O411.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第112560号

书 名: 数学物理方法(第二版)

著作责任者: 吴崇试 编著

责任编辑: 瞿 定

标准书号: ISBN 7-301-06819-0/O·0583

出版发行: 北京大学出版社

地 址: 北京市海淀区中关村北京大学校内 100871

网 址: <http://cbs.pku.edu.cn>

电 话: 出版部 62752015 发行部 62750672 编辑部 62752021

电子信箱: zpup@pup.pku.edu.cn

印 刷 者: 北京大学印刷厂

经 销 者: 新华书店

787mm×960mm 16开本 23.875印张 518千字

1999年4月第1版

2003年12月第2版 2003年12月第1次印刷

印 数: 0001—3000册

定 价: 34.00元

内 容 简 介

包括复变函数与数理方程两部分。兼顾理论体系的完整与实用的解题技巧。在物理类数学物理方法教材的传统内容之外,增加了发散级数与渐近级数、默比乌斯变换、线性偏微分方程的通解、三种基本类型数理方程解的定性性质、拉普拉斯算符的不变性等;补充了关于外微分运算、小波变换与非线性偏微分方程的简介;部分内容(如 Γ 函数及勒让德多项式)也采用一些新的讲法,并比较完整地给出了“分离变量法总结”,订正了目前工具书中的几个特殊函数公式。介绍了计算机软件 Mathematica 在复变函数计算中的应用。附有习题与答案。

《北京大学物理学丛书》 编委会名单

主 任：高崇寿

副 主 任：(按姓氏笔画排,下同)

刘寄星 秦旦华 聂玉昕

阎守胜 黄 涛

编 委：邹英华 邹振隆 宋菲君 吴崇试

林纯镇 俞允强 夏建白 曾谨言

韩汝珊 解思深 瞿 定

常务编委：周月梅

丛书前言

物理学是自然科学的基础,是探讨物质结构和运动基本规律的前沿学科。几十年来,在生产技术发展的要求和推动下,人们对物理现象和物理学规律的探索研究不断取得新的突破。物理学的各分支学科有着突飞猛进的发展,丰富了人们对物质世界物理运动基本规律的认识和掌握,促进了许多和物理学紧密相关的交叉学科和技术学科的进步。物理学的发展是许多新兴学科、交叉学科和新技术学科产生、成长和发展的基础和前导。

为适应现代化建设的需要,为推动国内物理学的研究、提高物理教学水平,我们决定推出《北京大学物理学丛书》,请在物理学前沿进行科学研究和教学工作的著名物理学家和教授对现代物理学各分支领域的前沿发展做系统、全面的介绍,为广大物理学工作者和物理系的学生进一步开展物理学各分支领域的探索研究和学习,开展与物理学紧密相关的交叉学科和技术学科的研究和学习提供研究参考书、教学参考书和教材。

本丛书分两个层次。第一个层次是物理系本科生的基础课教材,这一教材系列,将在几十年来几代教师,特别是在北京大学教师的教学实践和教学经验积累的基础上,力求深入浅出、删繁就简,以适于全国大多数院校的物理系使用。它既吸收以往经典的物理教材的精华,尽可能系统地、完整地、准确地讲解有关的物理学基本知识、基本概念、基本规律、基本方法;同时又注入科技发展的新观点和方法,介绍物理学的现代发展,使学生不仅能掌握物理学的基础知识,还能了解本学科的前沿课题和研究动向,提高学生的科学素质。第二个层次是研究生教材、研究生教学参考书和专题学术著作。这一系列将集中于一些发展迅速、已有开拓性进展、国际上活跃的学科方向和专题,介绍该学科方向的基本内容,力求充分反映该学科方向国内外前沿最新进展和研究成果。学术专著首先着眼于物理学的各分支学科,然后再扩展到与物理学紧密相关的交叉学科。

愿这套丛书的出版既能使国内著名物理学家和教授有机会将他们的累累硕果奉献给广大读者,又能对物理的教学和科学研究起到促进和推动作用。

《北京大学物理学丛书》编辑委员会

1997年3月

第二版序

十分荣幸,本书能入选“十五”国家级教材和北京市高等教育精品教材立项而修订再版。值此第二版付梓之际,作者感谢教育部、北京市教委、北京大学和北京大学出版社给予的支持。自从第一版出版以来,同行和读者给予了关心和鼓励,他们指出了书中的错误与不足,并提出了一些修改的具体建议,作者也借此机会向他们致以谢忱。

在本书的第二版中,作了如下的改动:

1. 订正了原书第一版中的错误。
2. 新增加了部分章节,主要有:(计算机软件) Mathematica 中的复变函数(第 11 章)、两个有用的引理(3.4 节)、柯西型积分(3.7 节)、矢量波动方程和矢量亥姆霍兹方程(15.7 节)以及连带勒让德函数的加法公式(16.10 节)。
3. 将第 7 章并入第 5 章。
4. 改写了部分内容。主要有:将复数及其运算规则与复数的几何表示合并为一节,作为复变函数及解析函数的预备知识;将含参量积分的内容拆为两部分,在柯西型积分(新增加的 3.7 节)之后立即讨论了普通的含参量积分的解析性,而在第 4 章(无穷级数)中再进一步讨论含参量的反常积分的解析性;在求解整数阶贝塞耳方程的第二解时,删去了直接代入无穷级数的求解法,而将原来第 17 章(柱函数)中介绍的方法(即将 $J_{\pm\nu}(x)$ 适当组合)提前;增加了 Γ 函数的围道积分表示,连同 Γ 函数的无穷乘积表示,成为新的一节(Γ 函数的普遍表达式);常微分方程的格林函数解法,原按初值问题与边值问题分为两节,现改写为三节,即常微分方程初值问题的格林函数、常微分方程边值问题的格林函数以及常微分方程的格林函数解法。此外,重新调整了第 17 章前几节的架构,使之更适合于组织教学。
5. 删去了解析函数的变换性质、柯西积分公式的几个重要推论(但保留均值定理,并入 3.5 节)、欧拉求和公式、整函数和亚纯函数、 Γ 函数的计算、圆盘的引力势与静电势、开尔文函数、艾里函数以及三维调和函数的均值定理与极值原理等节,同时还删去了一致收敛级数的外尔斯特拉斯定理及拉普拉斯变换普遍反演公式的证明。第 17 章(柱函数)中还删去了汉克尔函数的例题(而仅保留汉克尔函数的定义)。
6. 书中的插图全部改用计算机绘制。作者感谢北京大学刘循序同学为全部插图所作的加工;也感谢清华大学周含露同学与北京大学洪礼明同学,他们分别绘制了书中的图 1.5、图 2.7、图 16.2 与图 2.5。
7. 为了教学的方便,每一章(第 11 章除外)后均增添了习题。书末亦附有习题答案。我们另编有《数学物理方法习题指导》,该书亦由北京大学出版社出版。

吴崇试

2003 年夏于蓝旗营

第一版作者前言

(节 录)

目前关于《数学物理方法》的教材为数不少。特别是郭敦仁先生和梁昆鑫先生的两本同名著作，内容丰富，各校广泛采用。本书的编写，希望能略有创新，而不完全雷同于其他教材，但因为作为一门基础课程，其基本内容应该说是共同的；加之篇幅有限，因而实际上只能做到在若干部分略有新意：在各章的次序安排上，作了某些调整；某些章节中，增加了一点新的内容；某些部分的讲法上，作了一点新的尝试；在一些问题上自认为有更仔细的分析；在个别问题上纠正了其他书上的一些疏漏之处。作者希望本书能做到不求全，但稍有特色。如果从事本课程教学的教师认为本书有参考的必要，如果学习本课程的学生感到本书有阅读的兴趣，如果从事有关专业工作的同志发现本书有查阅、保存的价值，作者也就感到十分满足了。

和传统的《数学物理方法》教材一样，本书由复变函数及数学物理方程两部分组成。在前一部分中，把二阶常微分方程的幂级数解法和解析延拓两章提前，紧接解析函数的幂级数展开之后。这样做的目的，纯粹是为了避免在学期末（在北大，本课程是一年的课程）讲授常微分方程的幂级数解法。提前讲授，可以使学生在较充裕的时间复习巩固。在常微分方程的幂级数解法一章之后，立即介绍解析延拓，显得比较紧凑。用级数解法得到的微分方程的解多只在复平面的一定区域内成立，解析延拓到更大范围就成为自然的要求。而从微分方程的解来进一步阐述解析延拓的概念，又增加了解析延拓的具体例证。在数学物理方程部分，在分离变量法及特殊函数之后，集中明确地把分离变量法总结列为一章，力求更加深入、紧密地讨论分离变量法的理论依据，以加深对于分离变量法这一最基本内容的理解。另外，在全书的最后，还增加了数学物理方程解法的综述，对于课程中的各种解法进行横向的分析比较，力图使同学能对数学物理方程的各种解法有更全面的认识。应该说，这些内容在各章中也都分散地谈到过，但集中到一处，希望能收到更好的效果。

关于本书中的新讲法，值得提到的有两处。一是 Γ 函数的互余宗量定理和倍乘公式的证明，在一般教材中，各自总要用到特别的技巧。本书利用 B 函数与 Γ 函数的关系来证，希望能使证明的难度有所降低，方法上也显得比较一致。另一处是关于勒让德多项式的引入（表达式）。通常的做法都是在 $x = 0$ 点的邻域内求解勒让德方程而引入勒让德多项式。现在改用在 $x = 1$ 点的邻域内求解勒让德方程，求解本征值问题更加直截了当，勒让德多项式的形式也比较简单，在此基础上照样能推出勒让德多项式的其他性质，并不产生任何困难。

本书中增加的新内容，有两种类型。一种属于课程的基本要求，这包括第 13 章以及第 15 章的部分内容。第 13 章中讨论了线性偏微分方程的通解，这不仅涉及方程解的基本结构，而且也使得以后讨论非齐次方程的齐次化时，显得“有章可循”。在这一章中还定性讨论了三种基本类型的数学物理方程的特点，如波的耗散与色散、热传导方程的传播速度问题等，它们是和物理现象紧密联系的。由于一般教材都只介绍方程的解法，往往都未曾涉及这些内容。

当然,由于篇幅所限,本书在这方面也只能做到“浅尝辄止”.在第15章中,介绍了外微分法,由此给出拉普拉斯算符在各种正交曲面坐标系中的表达式.由于学时的限制,这里只是介绍了外微分的运算法则,根本不可能涉及有关微分流形的基本概念.而且,如果学时紧张,只要求学生承认拉普拉斯算符在柱坐标系和球坐标系中的表达式,这些内容完全可以略去.在这一章中还讨论了拉普拉斯算符在坐标变换下的不变性,这涉及求解具体数学物理方程定解问题时的坐标选取问题.这是一个不可回避、但其实又是一个简单而又重要的基本问题,可惜一般教材中都未能有明确的表述.另外一种类型属于选修的内容(相应地,在节号前标有*号).这既有相当古老的问题(例如正十七边形的几何作图,欧拉求和等),也有近年来发展起来的新课题(如非线性偏微分方程,小波变换等).本书对于这些问题的介绍,应该说,都只是入门性的.作者不希望把数学物理方法课程描述成封闭的完整的体系,更希望读者看到它是一门开放的发展的学科(当然,学科不全等于课程,二者既有区别,又有联系).希望通过这些内容的介绍,能激发起读者学习与思考的积极性.在这方面要特别提到我国陈难先院士关于默比乌斯变换的工作.他把纯数学理论和物理问题巧妙地联系起来,取得了举世公认的成就.尽管这方面的工作和本课程的教学内容还有一定的距离,但是,作者认为,有责任把它首先写进我国的教科书中.

当然,本书中凡是标有*号的(都属于选修的内容),并不全是区别于一般教材的新内容.另一方面,也有一些内容,并未标有*号,也不属于课程的基本要求.使用本书的师生,完全可以自主地略去这些内容.

这里不想再对本书作更多的自我评述,特别是不想列举国内外某些教材中的疏漏与不足.唯一要提到的是关于几个特殊函数公式的订正(见本书9.8节),涉及的是正弦积分和余弦积分的几个无穷级数和.应该说,它们都不属于本课程的教学内容.但作者见到的几本工具书中均有误,而且也检索不到原始出处.由于工具书有误,当然就增加了问题的严重性.所以,作者愿借此机会,收录在这里,以资订正.

在本书即将付印的时刻,作者要深深感谢郭敦仁先生的教育与指导.还是在大学的学习阶段,郭先生就是我的授课老师.从事教学30余年来,从辅导到讲课,作者一直在郭敦仁先生的指导下工作,郭先生的教诲,终身铭记.

作者还要感谢多年一起工作的同事.教学工作中的研讨切磋,使作者受益匪浅.在本书中应该说也包含了他们的贡献.特别感谢钟毓澍教授,他仔细地阅读了本书的书稿,提出了不少宝贵意见.

作者也要感谢在北京大学听过我的课的历届学生.本书中的不少观点与讲法,是在历年的教学中逐渐提炼形成的.青年人的如饥似渴的求知欲,他们闪烁着智慧火花的诘问,对作者都是一种鞭策与激励.作者愿将此书奉献给新世纪的大学生们,希望本书能为他们的成长与发展提供一点帮助.

由于本书写作仓促,错误之处,欢迎使用本书的师生与读者指正.

吴崇试

1998年夏,北大燕北园

数 学 符 号

\forall	任何; 凡	\mathbb{N}	正整数
\exists	有; 存在	\mathbb{Z}	整数
$\exists!$	存在唯一的	\mathbb{R}	实数
\nexists	不存在	\mathbb{R}^+	正数
\wedge	并且; 与	\mathbb{R}^-	负数
\vee	或	\mathbb{C}	复数; 复平面
$a \in A$	(元素) a 属于 (集合) A	$\overline{\mathbb{C}}$	复数 (包括 ∞); 扩充的复平面
$a \notin A$	a 不属于 A	$V(a; \varepsilon)$	a 点的邻域
\cup	并集	$V^*(a; \varepsilon)$	a 点的空心邻域
\cap	交集	\mapsto	映射
\subset	子集	\wedge	楔积 (第 15 章)
$A \setminus B$	$\{a : a \in A, a \notin B\}$	$*$	* 运算 (仅限第 15 章)

目 录

第一部分 复 变 函 数

1 复数和复变函数	
1.1 预备知识: 复数与复数运算	(1)
1.2 复数序列	(3)
1.3 复变函数	(4)
1.4 复变函数的极限和连续	(5)
1.5 无穷远点	(6)
*1.6 正十七边形问题	(6)
习题	(7)
2 解析函数	
2.1 可导与可微	(8)
2.2 解析函数	(9)
2.3 初等函数	(11)
2.4 多值函数	(13)
*2.5 解析函数的保角性	(18)
习题	(20)
3 复变积分	
3.1 复变积分	(22)
3.2 单连通区域的柯西定理	(23)
3.3 复连通区域的柯西定理	(26)
3.4 两个有用的引理	(27)
3.5 柯西积分公式	(28)
3.6 解析函数的高阶导数	(30)
3.7 柯西型积分及含参量积分的解析性	(31)
*3.8 泊松公式	(32)
习题	(34)
4 无穷级数	
4.1 复数级数	(36)
4.2 二重级数	(38)
✓4.3 函数级数	(39)
✓4.4 幂级数	(41)
4.5 含参量的反常积分的解析性	(43)
*4.6 发散级数与渐近级数	(45)
习题	(48)
5 解析函数的局域性展开	
5.1 解析函数的泰勒展开	(50)
5.2 泰勒级数求法举例	(51)
5.3 解析函数的零点孤立性和解析函数的唯一性	(54)
✓5.4 解析函数的洛朗展开	(55)
✓5.5 洛朗级数求法举例	(57)
5.6 单值函数的孤立奇点	(60)
5.7 解析延拓	(62)
*5.8 伯努利数和欧拉数	(64)
习题	(66)
6 二阶线性常微分方程的幂级数解法	
6.1 二阶线性常微分方程的常点和奇点	(68)
6.2 方程常点邻域内的解	(69)
6.3 方程正则奇点邻域内的解	(73)
6.4 贝塞耳方程的解	(76)
*6.5 方程非正则奇点附近的解	(80)
习题	(83)
7 留数定理及其应用	
7.1 留数定理	(84)
7.2 有理三角函数的积分	(87)
7.3 无穷积分	(88)
7.4 含三角函数的无穷积分	(90)
7.5 实轴上有奇点的情形	(91)
7.6 多值函数的积分	(93)
*7.7 应用留数定理计算无穷级数的和	(96)
*7.8 留数定理的其他应用	(97)
习题	(98)
8 Γ 函数	
8.1 Γ 函数的定义	(101)
8.2 Γ 函数的基本性质	(102)
8.3 ψ 函数	(104)
8.4 B 函数	(106)
*8.5 Γ 函数的普遍表达式	(108)
*8.6 Γ 函数的渐近展开	(110)

*8.7	几个特殊函数公式的订正	(111)	10.3	常微分方程初值问题的格林函数	...(134)
*8.8	黎曼 ζ 函数和默比乌斯变换	(113)	10.4	常微分方程边值问题的格林函数	...(138)
	习题	(115)	10.5	求解常微分方程的格林函数方法	...(140)
9	拉普拉斯变换		习题	(144)
9.1	拉普拉斯变换	(117)	*11 Mathematica 中的复变函数		
9.2	拉普拉斯变换的基本性质	(118)	11.1	Mathematica 中的数及其运算	...(146)
9.3	拉普拉斯变换的反演	(121)	11.2	变量和函数
9.4	普遍反演公式	(124)	11.3	极限和微积分计算
*9.5	利用拉普拉斯变换计算级数和	(126)	11.4	幂级数展开与求和
	习题	(127)	11.5	求解微分方程
10	δ 函数		11.6	拉普拉斯变换和傅里叶变换
10.1	δ 函数	(129)	11.7	δ 函数
10.2	利用 δ 函数计算定积分	(133)	11.8	Mathematica 作图
第二部分 数学物理方程					
12	数学物理方程和定解条件		14.6	非齐次边界条件的齐次化
12.1	弦的横振动方程	(159)	习题	(207)
12.2	杆的纵振动方程	(161)	15 正交曲面坐标系		
12.3	热传导方程	(162)	15.1	正交曲面坐标系
12.4	稳定问题	(164)	15.2	正交曲面坐标系中的拉普拉斯算符
12.5	边界条件与初始条件	(165)	15.3	拉普拉斯算符的平移、转动和反射不变性
12.6	内部界面上的连接条件	(167)	15.4	圆形区域
12.7	定解问题的适定性	(168)	15.5	亥姆霍兹方程在柱坐标系下的分离变量
	习题	(170)	15.6	亥姆霍兹方程在球坐标系下的分离变量
13	线性偏微分方程的通解		*15.7	矢量波动方程和矢量亥姆霍兹方程
13.1	线性偏微分方程解的叠加性	(171)	习题	(224)
13.2	常系数线性齐次偏微分方程的通解	(172)	16 球函数		
13.3	常系数线性非齐次偏微分方程的通解	(174)	16.1	勒让德方程的解
13.4	特殊的变系数线性齐次偏微分方程	(177)	16.2	勒让德多项式
13.5	波动方程的行波解	(177)	16.3	勒让德多项式的微分表示
13.6	波的耗散和色散	(179)	16.4	勒让德多项式的正交完备性
13.7	热传导方程的定性讨论	(181)	16.5	勒让德多项式的生成函数
13.8	拉普拉斯方程的定性讨论	(183)	16.6	勒让德多项式的递推关系
	习题	(184)	16.7	勒让德多项式应用举例
14	分离变量法		16.8	连带勒让德函数
14.1	两端固定弦的自由振动	(185)	16.9	球面调和函数
14.2	分离变量法的物理诠释	(190)	*16.10	连带勒让德函数的加法公式
14.3	矩形区域内的稳定问题	(192)	*16.11	超几何函数
14.4	多于两个自变量的定解问题	(194)			
14.5	两端固定弦的受迫振动	(196)			

习题	(250)	19.3 半无界空间的情形	(299)
17 柱函数		19.4 关于积分变换的一般讨论	(300)
17.1 贝塞耳函数和诺伊曼函数	(252)	*19.5 小波变换简介	(302)
17.2 贝塞耳函数的递推关系	(255)	习题	(306)
17.3 贝塞耳函数的渐近展开	(256)	20 格林函数方法	
17.4 整数阶贝塞耳函数的生成函数 和积分表示	(257)	20.1 格林函数的概念	(307)
17.5 贝塞耳方程的本征值问题	(259)	20.2 稳定问题格林函数的一般性质	(309)
*17.6 汉克尔函数	(264)	20.3 三维无界空间亥姆霍兹方程的 格林函数	(311)
*17.7 虚宗量贝塞耳函数	(264)	20.4 圆内泊松方程第一边值问题的 格林函数	(315)
17.8 半奇数阶贝塞耳函数	(267)	20.5 波动方程的格林函数	(320)
17.9 球贝塞耳函数	(268)	20.6 热传导方程的格林函数	(324)
*17.10 合流超几何函数	(270)	习题	(326)
附录 涉及贝塞耳函数的常微分方程	(272)	21 变分法初步	
习题	(274)	21.1 泛函的概念	(327)
18 分离变量法总结		21.2 泛函的极值	(328)
18.1 内积空间	(276)	21.3 泛函的条件极值	(332)
18.2 函数空间	(278)	21.4 微分方程定解问题和本征值问 题的变分形式	(334)
18.3 自伴算符的本征值问题	(281)	*21.5 变边值问题	(336)
18.4 斯图姆 - 刘维尔型方程的本征值 问题	(284)	21.6 瑞利 - 里兹方法	(338)
18.5 斯图姆 - 刘维尔型方程本征值问 题的简并现象	(287)	习题	(341)
18.6 从斯图姆 - 刘维尔型方程的本征 值问题看分离变量法	(288)	22 数学物理方程综述	
习题	(291)	22.1 二阶线性偏微分方程的分类	(342)
19 积分变换的应用		22.2 线性偏微分方程解法述评	(345)
19.1 拉普拉斯变换	(293)	22.3 非线性偏微分方程问题	(347)
19.2 傅里叶变换	(296)	22.4 结束语	(351)
		习题	(351)
参考书目	(353)		
外国人名译名中英对照表	(354)		
习题答案	(355)		

第一部分 复变函数

1 复数和复变函数

1.1 预备知识: 复数与复数运算

1. 复数定义

设有一对有序实数 (a, b) , 遵从下列基本运算规则:

$$\text{加法} \quad (a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2), \quad (1.1)$$

$$\text{乘法} \quad (a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc), \quad (1.2)$$

则称这一对有序实数 (a, b) 定义了一个复数 α , 记为

$$\alpha = (a, b) = a(1, 0) + b(0, 1), \quad (1.3)$$

a 称为 α 的实部, b 称为 α 的虚部,

$$a = \operatorname{Re} \alpha, \quad b = \operatorname{Im} \alpha.$$

上面的 (1.1)(1.2) 和 (1.3) 诸式均为涉及复数的等式. 所谓两个复数相等, 其含意是两个复数的实部、虚部分别相等.

复数的减法是加法的逆运算,

$$(a + ib) - (c + id) = (a - c) + i(b - d). \quad (1.4)$$

复数不能比较大小.

2. 特殊的复数: $0, 1$ 和 i

复数涵盖了实数作为它的特殊情形. 实数 a (当然也可称作复数 a) 就记为

$$a \equiv (a, 0) \equiv a(1, 0).$$

因此,

$$\alpha = (a, b) = a(1, 0) + b(0, 1). \quad (1.3')$$

其中 $(1, 0)$ 就是实数 1 . $(0, 1)$ 称作虚单位, 记作 i (欧拉, 1777),

$$i = (0, 1). \quad (1.5)$$

显然, 由乘法规则可得

$$(0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1 \quad \text{即} \quad i^2 = -1.$$

另一个特殊的复数 (也是实数) 是零, 仍简写作 0,

$$0 = (0, 0).$$

不难证明, 对于任意复数 α ,

$$\alpha + 0 = \alpha, \quad \alpha \cdot 0 = 0.$$

于是, 复数 α 就可以记为

$$\alpha = a + ib. \quad (1.6)$$

3. 共轭复数及复数除法

复数 $\alpha^* \equiv a - ib$ 与 $\alpha = a + ib$ 互为**共轭**, $(\alpha^*)^* = \alpha$. 共轭复数的乘积为实数.

$$\alpha\alpha^* = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2.$$

复数的除法是乘法的逆运算.

$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{(a + ib)(c - id)}{(c + id)(c - id)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}. \quad (1.7)$$

4. 复数的几何表示

复数可以用复平面上的点表示. $\alpha = a + ib$ 可以用横坐标为 a , 纵坐标为 b 的点表示. 复数和复平面上的点有一一对应的关系. 对于任意一个复数, 复平面上都有唯一的一个点与之对应; 反之, 对于复平面上的任意一点, 也都有唯一的一个复数与之对应 (见图 1.1). 以后复数的全体或复平面记作 \mathbb{C} .

复数 $\alpha = a + ib$ 还可以表示成 \mathbb{C} 上的**矢量**. 这个矢量在两个坐标轴上的投影分别为 a 和 b . 将矢量平移 (例如将它的一个端点移到原点) 仍代表同一个复数.

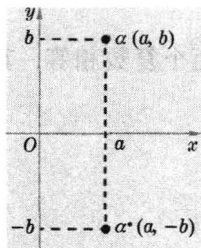


图 1.1 复数 α 和 α^*

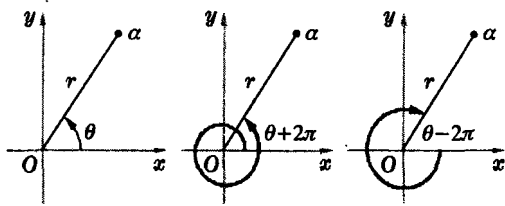


图 1.2 复数的模和辐角及辐角的多值性

复数加法满足平行四边形法则 (或称为三角形法则): 两个复数相加就是横坐标、纵坐标分别相加.

5. 复数的极坐标表示

复数 α 也可以用极坐标 (r, θ) 表示 (见图 1.2):

$$\alpha = r(\cos \theta + i \sin \theta). \quad (1.8)$$

r, θ 称为复数 α 的**模**和**辐角**, 分别记为

$$r = |\alpha|, \quad \theta = \arg \alpha. \quad (1.9)$$

显然, $a = r \cos \theta, b = r \sin \theta$. 由于三角函数的周期性, 所以复数的辐角不是唯一的, 它可以加上 2π 的任意整数倍. 这个现象称为**辐角的多值性**. 通常把 $(-\pi, \pi]$ 之间的辐角值称为**辐角的主值**.

在极坐标表达式下, 复数的乘法和除法运算就很简单. 设有两个复数

$$\alpha_1 = r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1), \quad \alpha_2 = r_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2),$$

它们的乘积就是**模相乘, 辐角相加**,

$$\begin{aligned} \alpha_1 \cdot \alpha_2 &= r_1 r_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i (\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2)] \\ &= r_1 r_2 [\cos (\theta_1 + \theta_2) + i \sin (\theta_1 + \theta_2)]. \end{aligned} \quad (1.10)$$

同样, 两个复数相除, 就是它们的模相除, 辐角相减,

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\alpha_1 \cdot \alpha_2^*}{\alpha_2 \cdot \alpha_2^*} = \frac{r_1}{r_2} [\cos (\theta_1 - \theta_2) + i \sin (\theta_1 - \theta_2)], \quad \alpha_2 \neq 0. \quad (1.11)$$

6. 复数的指数表示

可以进一步定义复指数函数

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta, \quad (1.12)$$

它具有和实指数函数相同的性质:

$$e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1 + \theta_2)}, \quad (1.13)$$

则复数 α 又可以表示成

$$\alpha = r e^{i\theta}. \quad (1.14)$$

因而复数的乘除运算可以表示得更简单:

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 = r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}, \quad (1.10')$$

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = r_1 e^{i\theta_1} \cdot \frac{1}{r_2} e^{-i\theta_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}. \quad (1.11')$$

1.2 复数序列

按照一定顺序排列的复数

$$z_n = x_n + i y_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

称为**复数序列**, 记为 $\{z_n\}$.

一个复数序列完全等价于两个实数序列.

聚点 给定序列 $\{z_n\}$, 若存在复数 z , $\forall \varepsilon > 0$, 恒有无穷多个 z_n 满足 $|z_n - z| < \varepsilon$, 则称 z 为 $\{z_n\}$ 的一个**聚点(或极限点)**.

一个序列可以有不止一个聚点, 例如序列

$$\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \frac{5}{6}, -\frac{6}{7}, \dots \quad (1.15)$$

就有两个聚点, ± 1 .

特别是, 对于实数序列 x_n 的聚点 (也必然是实数), 其中数值最大的, 称为 $\{x_n\}$ 的**上极限**, 记为 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$; 而数值最小的, 称为 $\{x_n\}$ 的**下极限**, 记为 $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$. 上面的序列 (1.15) 中, ± 1 就分别是它的上、下极限.

由序列上 (下) 极限的定义, 不难证明:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot y_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n, \quad (1.16a)$$

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot y_n \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n. \quad (1.16b)$$

有界序列和无界序列 给定序列 $\{z_n\}$, 如果 $\exists M > 0$, 使 $\forall n$, 都有 $|z_n| < M$, 则序列称为有界的; 否则就是无界的.

波尔查诺 - 魏尔斯特拉斯定理 一个有界的无穷序列至少有一个聚点.

极限 给定序列 $\{z_n\}$, 如果存在复数 z , $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N(\varepsilon) > 0$, 使当 $n > N(\varepsilon)$ 时, 有 $|z_n - z| < \varepsilon$, 则称 $\{z_n\}$ 收敛于 z , 记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z.$$

一个序列的极限必然是此序列的聚点, 而且是唯一的聚点.

序列极限存在 (序列收敛) 的柯西充要条件 $\forall \varepsilon > 0$, \exists 正整数 $N(\varepsilon)$, 使对于任意正整数 p , 有

$$|z_{N+p} - z_N| < \varepsilon.$$

一个无界序列不可能是收敛的.

1.3 复变函数

本节讨论定义在复数平面上的某些区域的复变函数.

为了建立区域的概念, 先要定义点集的内点.

如果以某一点为圆心作一个圆, 只要半径足够小, 使得圆内的所有的点都属于该点集, 则称此点为点集的**内点**.

区域是满足下列两个条件的点集: (1) 全部都由内点组成; (2) 具有连通性, 即点集中任意两点, 都可以用一条折线连接起来, 折线上的点全都属于此点集.

图 1.3(a) 和 (b) 中的图形都是区域, 但 (c) 不构成区域.

区域常常可用不等式表示. 例如, $|z| < r$ 表示以原点为圆心、 r 为半径的圆内区域;

$0 < \arg z < \pi/2$ 表示第一象限; $\operatorname{Im} z < 0$ 表示下半平面. 图 1.4 中给出了几个示例.

与区域有关的概念还有边界点和边界.

所谓区域的**边界点**, 并不属于区域, 但是以它为圆心作圆, 不论半径如何小, 圆内总含有区域的点. 边界点的全体就构成**边界**.

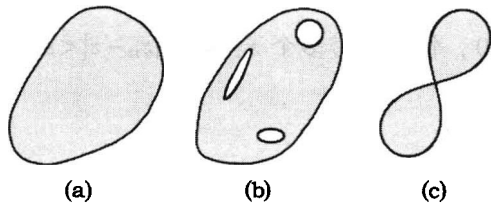


图 1.3 (a)(b) 区域, (c) 非区域