

經濟學名著翻譯叢書第一六七種

數理經濟學基本論

(上冊)

Alpha C. Chiang 著

鍾寶梅 譯

臺灣銀行經濟研究室編印

數理經濟學基本論

**Fundamental Methods of
Mathematical Economics**

Alpha C. Chiang 著

鍾 寶 梅 譯

經濟學名著翻譯叢書第一六七種

數理經濟學基本論 (上册)

中華民國七十四年二月出版

原著者 **Alpha C. Chiang**

翻譯者 鍾 寶 梅

編印者 臺灣銀行經濟研究室
臺北市重慶南路

發行者 臺灣銀行
臺北市重慶南路

經售者 中央文物供應社
臺北市重慶南路一段一〇六號

中華書局
臺北市重慶南路一段九十四號

印刷者 臺灣省政府印刷廠
臺中縣大里鄉中興路

第二版 前 言

自第一版出書之後，有無數經濟學者熱心地提供許多意見與富建設性的建議。爲使這些建議具體化，同時我又有些觀念形成，因此乃再版出書，於本版書中，有幾節已較前擴充，又有幾節則予以適度簡化，希望此版之呈現使讀者們覺得較前版更具用途。

於本版中，最重要的改變包括有全新的一章，關於非直線型規劃（第20章），其中包括有名的肯—塔克定理（Kuhn-Tucker theorem）（凹入規劃），與繼之的阿諾—安託芬（Arrow-Enthoven）一般化定理（準凹入規劃）。對所謂「限制條件之合格性」一重要而難以處理之概念已予充分的重視。第二項主要的改變爲運用隱函數定理作爲一般函數比較靜態之分析基礎（第8章）。於下一章，則改採全微分法而非全導來式法，以得比較靜態導來式。

其他的改變則散見諸章，還有，我採用標準術語凹與凸函數（concave, convex functions）（第9章與其後各章），並加入關於準凹入與準凸出函數新材料（第12、20章）。爲作爲測試二次形式符號肯定性之另一種方法，並介紹了矩陣特性方程式之觀念（第11章），稍後又以之與微分與差分方程式之特性方程式比較（第17章）。本版對L'Hôpital法則（第12章）、部分積分（第13章）亦加以介紹。對拉氏乘數均予以充分的經濟闡釋（第12章），且稍後並與線型規劃中之雙重選擇變數相連繫（19章）。精確微分方程式目前以較簡捷方法處理之（第14章）。於動態模型中（第14章至17章），對跨時（intertemporal）與清理市場（market-clearing）兩均衡意義曾作仔細之區分。許多章且加入一些新的習題。又，循多人建議，我嘗試使習題多少顯得「更深入」。但是，我並未放棄我原先的用意，以習題作爲練習以加強學生們的了解，並鞏固其信心，而非以之爲智力上之挑戰，不知不覺地令初學者感到受挫而却

步不前。

雖然有這許多的改變，本書的基本形式與方法仍保持完整性。然而，本書較第一版前言所提及之用法更具彈性。例如，於矩陣代數研討後（第5章），讀者可逕行至線型規劃（第18章與19章）與遊戲理論（第21章）而毫無困難。同樣地，於完成加限制之最適化問題（第12章）後，可直接至非直線型規劃（第20章）而無需具線型規劃之背景。又對最適化問題感興趣之讀者亦可省略一般函數之比較靜態分析（第8章），即由第7章直接至第9章。惟稍後需省略11.6節與12.4節之比較靜態部分。

以下諸位先生對於本版之架構多少均有影響，我謹在此申誌謝意：Nancy S. Barrett (The American University)，Thomas Birnberg (Yale University)，E. J. R. Booth (The University of Connecticut)，Harald Dickson (University of Gothenburg，瑞典)，Roger N. Folsom (Naval Postgraduate School)，Jack Hirshleifer (University of California, Los Angeles)，James C. Hsiao (Southern Connecticut State College)，Ki-Jun Jeong (Seoul National University, Korea)，J. Frank Sharp (New York University Graduate School of Business Administration)，Dennis R. Sturleaf (Iowa State University)；及 Chiou-Nan Yeh 先生 (University of Massachusetts)。然其建議非全被採納，本書一切問題應由我單獨負責。尤其，我深感遺憾的是，放棄了介紹動態最適化之建議。蓋此一主題需先伸延至教學上之數分法，最適控制理論，與動態規劃之研討後，方得以處理，但加上這些範疇可能使本書過於龐大。因此，較妥善之方法是將之歸入另一本書，免於受篇幅之限制。

ALPHA C. CHIANG

第一版 前 言

此本書是為經濟學家所寫。其主要目的有二：（1）有系統地說明某些基本的數學方法，及（2）使這些數學的技巧與許多的經濟分析相連結，以清楚地顯示兩者之相關性。因此，可有兩種讀者受益於本書：其一，具有數學知識，却希望明白其與經濟學的關連，其二，希望對數學有所了解者。可能多數讀者歸入後一類，因之，所有技巧性演算過程非常詳盡，我假定讀者不具任何預備知識，而以逐步分析的方式，儘量減少使讀者感到迷惑的可能性。而且，我致力於簡化之過程主要不在滿足數學技巧的追求者，乃深信可讀性應是本書最重要的考慮。

因欲使讀者具充分之數學知識，且能有信心地涉獵當前經濟論叢，毫無怯懦，本書涵蓋相當廣泛的數學範疇。即使每一個主題均只限於基礎的介紹，能踏實地研讀本書之讀者至少可得到一些關於集合、集合運算、關係與函數、矩陣代數、微分與積分、簡單的微分與差分方程式、與凸集合之基本原理概念的閱讀能力，甚至運算能力。

欲使這些數學主題與經濟分析相結合，特於文內加入許多以數學式表示的經濟模式例題說明。再者，全書結構均依循經濟學而非數學予以組成。於簡短地介紹（第一部分）數學模型的性質與結構後，其餘部分計分成五部分，每一部分均在處理不同的經濟命題：

第二部分：靜態（或均衡）分析

第三部分：比較靜態分析

第四部分：最適化問題（均衡分析之一特例）

第五部分：動態分析

第六部分：數學規劃與遊戲理論（最適化之不同的結構）

每一部分所最適用的數學技巧均依序於每一部分中加以介紹。我相信將數學納入經濟論文內的方式，可予讀者於此兩種方法間得更佳

之了解，有助於日後閱覽更具技巧性的文章。

關於經濟主題之安排，如上節錄，係依循自然次序——由靜態而比較靜態，而後動態。正如其結果所示，此一安排亦方便於說明有關的數學。第二部分均衡分析的討論，即建立基本矩陣代數之介紹，因為均衡分析亦常涉及解一聯立直線方程體系。先對矩陣代數作初步介紹，此一特性不常見於其它書中，事實上證明極其恰當，因自此以後各章，可自如地運用向量、矩陣與行列式。於第三部分，研討比較靜態可引導主變動率與導來式之概念，包括偏導來式與全導來式；然後這些可運用於第四部分之最適化問題。然而，於第三與四部分，均用到前已學過之矩陣代數。當我們繼續進行至第五部分之動態時，數學的範疇則由微分進入積分的領域，與微分方程之後，有差分方程之討論。又，讀者將發現矩陣代數之極為有用。最後，於第六部分的線型規劃與遊戲理論，矩陣代數仍扮演相當重要的角色，雖然此處亦討論凸集合的基本概念。簡言之，本書正如一有系統的「工具箱」。基於上述理由，讀者應依序閱讀首四部分（首12章）。惟，第5與第6部分則可顛倒。在數學上，先看微積分（第4部分），後而微分方程（第5部分）較為適當；但是，在經濟上，於處理動態問題之前，數學規劃與遊戲理論（第6部分）應緊隨最適問題（第4部分）之後。讀者可斟酌逕自作抉擇。

本書最主要宗旨著重於可讀性與教學上的便利，欲達此項，必要時常以圖形說明數學上的討論。又，儘量地運用交錯參照以令讀者可複習、比較與綜合本書所提及之各不同主題。同時，經常以直覺與經濟上的解釋來說明某些特定的數學運算。幾乎於每一節末均有習題；欲由此書獲致最大的裨益，讀者應儘可能地多作習題。

本書重點雖然在方法論上，其內容仍含無數的經濟模型之詳細討論，包括有許多市場模式，廠商與消費者模式，國民所得模式，投入——產出模式，與經濟成長模式。因而，其功用除可作經濟學家的標準數學課程與數理經濟學外，應亦可作如價格理論、國民

——所得分析、企業循環、經濟發展、與經濟成長等等課程之補充教材。

此書係我過去數年教材。學生們的問題與建議，尤以 Roberta Grower Carey 太太為甚，對本版之完成提供極有價值之貢獻。而且，西北大學的 Marc Nerlove 教授並仔細閱完初稿，而作的詳細建議使本書有相當的改善。耶魯大學的費教授亦曾閱過部分初稿而作了極有用之評議。對以上諸位，我在此深誌謝忱。又此書進行過程中，對 Connecticut 大學之減輕我的教學負擔，亦於此一併申謝。最後，雖非為至微的，我須向我的內人表示最深之感謝，她不僅犧牲了許多應屬於她的時刻，而且校對、繕打完成初稿，其功不可磨滅。

ALPHA C. CHIANG

數理經濟學基本論

目 錄

二版前言	(1)
一版前言	(1)
第一部分 簡 介	(1)
第一章 數理經濟學之性質	(1)
1.1 數理經濟學與非數理經濟學之比較	(1)
1.2 數理經濟學與計量經濟學之比較	(4)
第二章 經濟模型	(7)
2.1 數學模式之構成因素	(7)
2.2 實數體系	(10)
2.3 集合之觀念	(11)
2.4 關係與函數	(19)
2.5 函數之形式	(25)
2.6 兩個或更多個自變數之函數	(32)
2.7 一般形函數	(34)
第二部分 靜態 (均衡) 分析	(37)
第三章 經濟上之均衡分析	(37)
3.1 均衡之意義	(37)
3.2 市場之局部均衡——直線型模型	(38)
3.3 市場之局部均衡——非直線型模型	(42)

3.4	一般市場均衡	(49)
3.5	國民所得分析之均衡	(55)
第四章 直線型模式與矩陣代數		(59)
4.1	矩陣與向量	(60)
4.2	矩陣代數	(63)
4.3	向量代數之探討	(73)
4.4	交換、結合與分配律	(83)
4.5	單位矩陣與零矩陣	(86)
4.6	轉置與逆矩陣	(90)
第五章 直線型模式與矩陣代數 (續)		(97)
5.1	矩陣非奇異性的條件	(97)
5.2	利用行列式檢定非奇異性	(101)
5.3	行列式之基本性質	(107)
5.4	逆矩陣之求法	(112)
5.5	克萊滿法則	(117)
5.6	運用於市場與國民所得模型	(121)
5.7	李昂鐵夫之投入—產出模型	(123)
5.8	靜態分析之限制	(132)
第三部分 比較靜態分析		(135)
第六章 比較靜態分析與導來式之觀念		(135)
6.1	比較靜態分析之性質	(135)
6.2	變動率與導來式	(136)
6.3	導來式與曲線斜率	(139)
6.4	極限	(141)

6.5 關於不等式與絕對值之討論	(150)
6.6 極限定理	(154)
6.7 函數之連續性與可微分性	(156)
第七章 微分法則與其在比較靜態分析 之運用	(167)
7.1 單變數函數之微分法則	(167)
7.2 含同一變數之兩個或多個函數之微分法則	(172)
7.3 含多個變數函數之微分法則	(185)
7.4 偏微分	(190)
7.5 運用于比較靜態分析	(195)
7.6 關於賈可賓行列式	(202)
第八章 一般函數模型之比較靜態分析	(207)
8.1 微分式	(208)
8.2 全微分式	(214)
8.3 微分式法則	(217)
8.4 全導來式	(220)
8.5 隱函數之導來式	(226)
8.6 一般函數模型之比較靜態分析	(239)
8.7 比較靜態分析之限制	(252)
第四部分 最適問題	(255)
第九章 最適化：一種特殊的均衡分析	(255)
9.1 最適值與極值	(255)
9.2 相對極大值與極小值：第一次導來式之檢定	(257)
9.3 第二次與高次導來式	(263)

9.4	第二次導來式之檢定	(269)
9.5	關於麥克勞林與泰勒數列	(279)
9.6	具單變數函數相對極值之 n 次導來式檢定	(288)
第十章 指數與對數函數		(295)
10.1	指數函數之性質	(296)
10.2	自然指數函數與成長問題	(301)
10.3	對數	(311)
10.4	對數函數	(318)
10.5	指數函數與對數函數之導來式	(322)
10.6	最適時間	(331)
10.7	指數與對數導來式之更進一步之運用	(336)
第十一章 多於一個選擇變數之情況		(343)
11.1	二次偏導來式與總微分式	(343)
11.2	具雙變數函數之極值	(347)
11.3	二次形式之探討	(355)
11.4	具兩個變數以上之標的函數	(368)
11.5	經濟上之例題	(379)
11.6	最適化之比較靜態面	(391)
第十二章 具限制條件之最適問題		(399)
12.1	限制條件之影響	(399)
12.2	靜態值之求法	(402)
12.3	二次式條件	(410)
12.4	效用極大化與消費者需求	(420)
12.5	關於齊次函數之探討	(434)
12.6	最小成本投入組合	(444)

12.7 結語	(457)
第五部分 動態分析	(461)
第十三章 動態經濟學與微積分	(461)
13.1 動態與積分	(462)
13.2 不定積分	(463)
13.3 定積分	(475)
13.4 不當積分式	(484)
13.5 積分式於經濟上之運用例證	(488)
13.6 多瑪成長模型	(496)
第十四章 連續的時間：一次微分方程	(503)
14.1 具常數係數與常數項之一次直線型微分方程	(503)
14.2 市場價格之動態分析	(509)
14.3 變數係數與變數項	(514)
14.4 恰好微分方程式	(518)
14.5 首階與首次非直線型微分方程	(526)
14.6 質與圖形的分析	(531)
14.7 梭羅成長模型	(535)
第十五章 高次微分方程式	(541)
15.1 具常數係數與常數項之二次直線型微分方程	(541)
15.2 多瑪之公債負擔模型	(551)
15.3 複數與圓函數	(555)
15.4 複數根情況之分析	(572)
15.5 具價格預期心理之市場模型	(578)
15.6 具變數項之微分方程式	(585)

15.7	高次直線微分方程	(588)
第十六章 不連續的時間：首次差分方程式 (595)		
16.1	不連續時間、差分與差分方程式	(595)
16.2	首次差分方程式之解	(598)
16.3	均衡的動態穩定性	(605)
16.4	蛛網模式	(610)
16.5	具存貨之市場模式	(615)
16.6	非直線型的差分方程——質—圖分析法	(619)
第十七章 高次差分方程式與動態的聯立方程式模式 (629)		
17.1	具常數係數與常數項的二次直線型差分方程式	(629)
17.2	薩姆爾遜的乘數——加速因子交錯模式	(639)
17.3	推廣至變數項與高次式之方程式	(646)
17.4	聯立直線型差分方程式與微分方程式	(655)
17.5	動態的投入—產出模式	(668)
17.6	動態分析的限制	(677)
第六部分 數學規劃與遊戲理論 (681)		
第十八章 直線型規劃 (681)		
18.1	直線型規劃之簡例	(681)
18.2	直線型規劃之一般形	(692)
18.3	凸集合	(697)
18.4	簡捷形法：求極點	(709)
18.5	簡捷形法：求最適極點	(714)
18.6	簡捷形法更進一步的說明	(722)

第十九章 直線型規劃 (續)	(729)
19.1 雙重性	(729)
19.2 雙重問題的經濟涵意	(736)
19.3 生產活動分析：于個體方面	(740)
19.4 生產活動分析：總體模型	(751)
第二十章 非直線型規劃	(759)
20.1 非直線型規劃的本質	(759)
20.2 肯—塔克條件	(765)
20.3 限制條件之合格性	(776)
20.4 肯—塔克充分性定理：凹規劃	(785)
20.5 阿諾—安托芬充分性定理：準凹規劃	(793)
20.6 經濟上之運用	(799)
第二十一章 遊戲理論	(807)
21.1 遊戲理論的基本觀念	(807)
21.2 長方遊戲的鞍點解	(812)
21.3 混合策略：無鞍點的情況	(819)
21.4 視長方遊戲為一直線型規劃	(828)
21.5 再談雙重性	(834)
21.6 數學規劃與遊戲理論的限制	(837)

第一部份 簡 介

第一章 數理經濟學之性質

數理經濟學，不若公共財政或國際貿易般屬於經濟學中明顯之一分支；而是一種經濟分析方法，乃經濟學家運用數學符號陳敘某些問題，利用已知的數學定理協助其推理過程。至於分析上所涉及之範圍，可能是個體或總體理論，或公共財政，或低度開發國家經濟，等等。

[數理經濟學] 最廣義之說明是：舉凡目前任何一本經濟學的基本教科書，其利用幾何方法以導出理論結果者皆是。顯然這種說法包括太廣泛。傳統上，數理經濟是指，所運用的數學方法，超越簡單的幾何學，例如矩陣代數，微分與積分學、微分方程、差分方程與集合論。本書宗旨即在介紹這些在今日經濟文獻中最常見的基本數學方法。

1.1 數理經濟學與非數理經濟學之比較

既然數理經濟僅是經濟分析的一種方法，則基本上不應與任何非數理之經濟分析法有何不同。任何理論分析不管所用方法為何，總是由某些已知之假定或假設，然後透過推理過程，導出一連串的結論或定理。[數理經濟] 與 [文字經濟] (literary economics) 最主要之不同在於，前者之假定與結論以數學符號敘述，而非文字；又係以方程式，而非句子來描述；而且，在推理過程，不用文字之邏輯，而係用目前已知之數學定理。符號與文字實際上是互通的（如符號常以文字定義之），故任選一種皆可。然而，無庸置疑的是，使用符號在歸納推理時較為方便，當然，更有益于敘述之簡潔。

與精確性。

再一次說明，利用文字或數學式來推理無關緊要，但使用數學式之優點，在於可迫使分析者，在每個推理階段，皆讓其前提假定明確。此乃因數學定理通常以「若……，則……」之形式來敘述，故分析者欲使其定理之「則」（即結論）部分適合其需要，就必須使「若」（即條件）部分確與所採用之假定一致。

幾何方法作為分析工具又如何呢？幾何學，當然為數學之一支，其使用過程，的確亦脫離了文字經濟學之領域。幾何分析最肯定之優點在於具視覺可見之特點，讓我們更容易了解。惟此項優點為嚴重的空間維度限制所抵銷。讀者應記得，于通常「無異曲線」圖形之討論時，通常假定只有兩種商品可供消費者選擇，並非我們願採如此簡單之假定，而是畫一個三度空間的圖形相當不易，而四（或更高）度空間之圖形根本不可能。欲處理3、4或多種物品等更為一般化的情況，我們只得以方程式為工具。單單此項理由即足以說明我們為何于此研討的數理方法不包括幾何學。

簡言之，數學方法有以下幾種之優點：（1）所使用之「語言」，較簡潔又明確，（2）有很多既存之數學定理可供運用，（3）運用數學定理之先決條件為須將所有假設明白地陳述出，如此則免于無意採取某些隱涵假定之疏忽，（4）得以處理一般化即多變數之模型。

以上為一連串優點之說明。然而，持平而論，我們亦提出另一種說法。數理方法主要不利之處有二：第一，並非所有經濟學家皆精通數學。結果，數理與非數理經濟學者間在溝通上便有困難。意即，一方面非數理經濟學家無法從數理經濟學家之新發現中得利（除非他們願意以文字將之改寫過）；另一方面，或許更重要的是，數理經濟學家無從由非數理經濟學家之評論反應中得到好處。嚴格說來，此非數理方法本身之缺點，而係轉變時期的一種問題，于此轉捩時期，確有兩派別的經濟學家。因而，一個使用數學方法分析