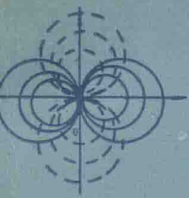

上海、江苏职工高校试用教材

FU BIAN HAN SHU

复变函数

李峻霄 李超志 罗健雄 编

职 大 教 学 编 辑 部

上海市、江苏省职工高校试用教材

复变函数

李峻霄　李超志　罗健雄　编

职大教学编辑部

前　言

本书是按照教育部成人教育司于1983年11月在无锡会议上审定通过的全国职工高等专科学校《复变函数》的教学大纲编写的。书中加有“△”号的章节各专业可根据具体情况决定取舍。书中加有“*”号的内容各校可根据不同的实际情况，如教时是否充裕，学员的基础及理解力的状况等等而决定取舍。

为了使本书区别于大学本科的教材，在编写过程中，我们对教学内容的处理偏重于基本运算及技能。对基础理论，仅保留一些简单的证明。某些虽然基本但证明冗长的内容，如台劳定理、罗伦定理的证明也删去了。如果需要深入了解这部分内容，可以查阅其它工科院校的复变函数教材。

多年来的教学经验使我们体会到，掌握教学内容与运用这些知识独立地进行解题之间是有一定距离的。为了缩短这二者之间的距离并为读者解题提供适当的启示及必要的示范，我们除尽可能从国内外一些较新的复变函数书籍中选出比较典型且又富有启发性的例子外，还通过一例多解，一例多用等手段来开拓读者的思路，加深对课程内容的内在联系的理解，使之能融会贯通，举一反三。

我们还认为，在学完每章内容以后，由读者独立地对该章内容进行归纳小结，对提高理解率、功固率来说，无疑是一个很好的学习方法。为此我们在每章末都布置了一些复习思考题。

本书由上海市卢湾区业余大学李峻霄同志、天津市河北区职工大学李超志同志和上海市石油化工通用机械公司职工大学

罗健雄同志编写，由华东师范大学宋国栋同志和上海第二工业大学黄午阳同志审阅。在编写和试用过程中得到了卢湾区业余大学、杨浦区业余大学的有关领导和教师的大力支持，提出了不少有益的意见，在此我们表示衷心感谢。

由于我们学识浅薄，教学经验不足，错误和不妥之处在所难免，殷切期望同志们批评指教。

编　者

1985 年 4 月

目　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一章　复数与复变函数

在初等代数中，我们已经知道为了保证开方运算的顺利进行，就必须把实数系扩充到复数系。而随着微积分学的出现和发展，又使复变函数的理论和方法日益成为研究其它自然科学如流体力学、电磁学等的有力工具。为了便于我们今后的学习，在这一章里，我们首先对复数进引系统的复习和补充，然后再逐步过渡到复变函数。

§1　复数及其各种表示法

1.1　复数的概念

设 x, y 表示两个实数，i 表示虚数单位 $\sqrt{-1}$，我们称形如

$$x+iy \quad (或\ x+yi)$$

的数为复数，记为

$$z=x+iy$$

当 x 与 y 均为常数时，称 z 为复常数。当 x 与 y 中至少有一个是变量时，称 z 为复变量。当 $y=0$ 时，$z=x$ 表示实数，故称 x 为复数 z 的实部，记作 $\mathrm{Re}\,z$。当 $x=0$ 时，$z=yi$ 表示纯虚数，故称 y 为复数 z 的虚部，记作 $\mathrm{Im}\,z$。

两个复数

$$z_1=x_1+iy_1,\quad z_2=x_2+iy_2$$

当且仅当

$$x_1=x_2,\quad y_1=y_2$$

时，称这两个复数是相等的，记作 $z_1=z_2$。应当注意，复数与实数不同，两个实数可以比较大小，但两个复数只能说相等或不等，不能比较大小。

我们称复数 $x-iy$ 为复数 $z=x+iy$ 的共轭复数，记作 $\bar{z}$。显然，$\bar{\bar{z}}=z$，即 z 与 $\bar{z}$ 互为共轭。

1.2 复数的各种表示法

(1) *复数的代数式* 为今后叙述方便，我们称 $z=x+iy$ 为复数 z 的代数表示式。

(2) *复数的几何表示* 由于复数 $z=x+iy$ 与有序实数对 (x, y) 成一一对应关系，而有序实数对 (x, y) 又与引入直角坐标系的平面上的点 $M(x, y)$ 或者一个起点在原点，终点在 (x, y) 的向量（称为矢径）成一一对应关系，所以我们就可以建立起复数 z 与平面上的点 $M(x, y)$ 或矢径之间的一个一一对应关系。因此平面上的点 $M(x, y)$ 或矢径可以看成是复数 z 的几何表示（图 1.2-1）。由于实数 x 对应于横轴上的点，故称横轴为实轴。纯虚数 iy 对应于纵轴上的点，故称纵轴为虚轴。实轴与虚轴所在的平面称为复平面或 z 平面。今后，我们常把“点 z”或“向量 z”作为“复数 z”的同义词。

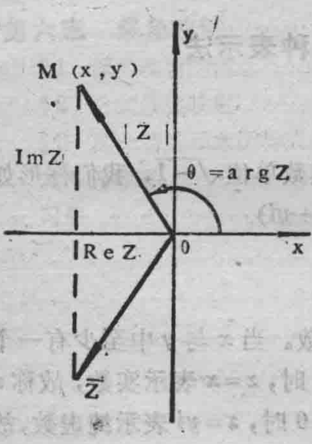

图 1.2-1

向量 z 的长度称为复数 z 的模（或绝对值），记作 $|z|$ 或 r。由图 1.2-1 中可以看出，以下各式是成立的：

$$|z|^2=x^2+y^2=\mathrm{Re}^2 z+\mathrm{Im}^2 z, \quad |\bar{z}|=|z|$$

$$|\mathrm{Re}z|\leqslant|z|,\ |\mathrm{Im}z|\leqslant|z|,\ |z|\leqslant|\mathrm{Re}z|+|\mathrm{Im}z|$$

向量 z 与实轴正方向之间的夹角称为复数 z 的幅角，记作 $\mathrm{Arg}\,z$。有下列几点值得注意：

(i) 当 $z=0$ 时，$|z|=0$，但它的幅角不能确定，可以取作任意的角度，这与极坐标中极点的极角十分相似。

(ii) 任意一个不为零的复数 z 有无穷多的幅角。如果 θ_1 是其中的一个，那么 $\mathrm{Arg}z=\theta_1+2k\pi$（$k$ 为任意整数）。当 z 不为负实数时，在这无穷多个幅角中只有一个幅角 θ_0 是在 $-\pi$ 与 π 之间，我们称它为幅角的主值，记作 $\arg z$。但当 z 为负实数时，它的幅角可以是 π 也可以是 $-\pi$。如果我们再规定，这时 z 的幅角的主值为 π，则对于任意一个不为零的复数 z，其幅角仅有一个唯一的主值 $\arg z$，而且它的取值范围为 $-\pi<\arg z\leqslant\pi$（在有些复变函数教材中，也有规定主值的范围为 $0\leqslant\arg z<2\pi$）。由图 1.2-1 中可见

$$\mathrm{tg}(\mathrm{Arg}\,z)=\mathrm{tg}(\arg z)=\frac{y}{x}$$

且当 z 不为零或负实数时，有 $\arg\bar{z}=-\arg z$。

(iii) $\arg z$ 并非永远等于 $\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{y}{x}\right)$。由于 $\arg z$ 的取值范围是在 $-\pi$ 与 π 之间，而 $\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{y}{x}\right)$ 的取值范围在 $-\frac{\pi}{2}$ 与 $\frac{\pi}{2}$ 之

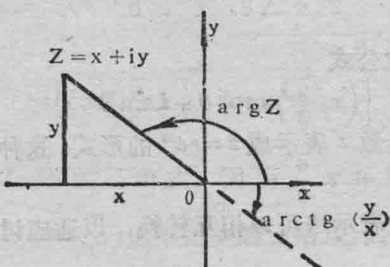

图 1.2-2

间，因此当点 z 在复平面中的第二象限或第三象限时，$\arg z \neq \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y}{x}\right)$，而应该是 $\arg z = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y}{x}\right) \pm \pi$，如图 1.2-2 所示。

一般地，应有

$$
\arg z = \begin{cases} \operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{y}{x}\right), & \text{当 } x>0 \text{ 时；} \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{当 } x=0,\ y>0 \text{ 时；} \\ \operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{y}{x}\right)+\pi, & \text{当 } x<0,\ y>0 \text{ 时；} \\ \pi & \text{当 } x<0,\ y=0 \text{ 时；} \\ \operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{y}{x}\right)-\pi & \text{当 } x<0,\ y<0 \text{ 时；} \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{当 } x=0,\ y<0 \text{ 时；} \end{cases}
$$

(3) 复数的三角式与指数式　利用直角坐标与极坐标的关系：

$$x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta,$$

我们可以把复数 $z = x + iy$ 表示成

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

的形式（其中 $r = |z|$，$\theta = \operatorname{Arg} z$）。我们称这种形式为复数 z 的三角表示式。

再利用尤拉公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

我们又可以将复数 z 表示成 $z = re^{i\theta}$ 的形式，这种形式称为复数 z 的指数式。

复数的各种表示法可以相互转换，以适应讨论各种不同问题时的需要。

例 1　将复数 $z = -\sqrt{12} - 2i$ 化为三角式与指数式。

解
$$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{12+4}=4$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{Arg} z)=\frac{y}{x}=\frac{-2}{-\sqrt{12}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

因为 z 在第三象限，所以

$$\begin{aligned}\arg z&=\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y}{x}\right)-\pi\\&=\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)-\pi\\&=\frac{\pi}{6}-\pi=-\frac{5\pi}{6}\end{aligned}$$

z 的三角式为

$$z=4\left[\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right]$$

z 的指数式是 $z=4e^{i\left(-\frac{5}{6}\pi\right)}$

必须注意，尽管

$$\begin{aligned}&4\left[\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right)\right]\\&=4\left[\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right)-i\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right)\right]\\&=-4\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\end{aligned}$$

但

$$4\left[\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right)-i\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right)\right]$$

并非 $z=-\sqrt{12}-2i$ 的三角式，因为 $\frac{5}{6}\pi$ 并非 z 的幅角。同样，$-4\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ 也不是 z 的三角式，因为 -4 并非 z 的模，$\frac{\pi}{6}$ 亦不是 z 的幅角。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertong

§2 复数的运算

2.1 复数的加法与减法

当复数 z 用代数式来表示时，设

$$z_1=x_1+iy_1, \quad z_2=x_2+iy_2,$$

我们定义

$$\begin{aligned} z_1\pm z_2&=(x_1+iy_1)\pm(x_2+iy_2)\\ &=(x_1\pm x_2)+i(y_1\pm y_2) \end{aligned}$$

即实部与实部相加减，虚部与虚部相加减。显然，当 z，z_2 为实数时，复数的加法(或减法)运算与实数的加法(或减法)运算是一致的。

根据加法(或减法)的定义，我们容易验证以下各式：

$$z+\overline{z}=2\,\mathrm{Re}\,z;\quad z-\overline{z}=2i\,\mathrm{Im}\,z$$

$$\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2},$$

即和(或差)的共轭等于共轭的和(或差)。

$$z_1+z_2=z_2+z_1;\quad (z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3),$$

即复数的加法运算满足交换律及结合律。

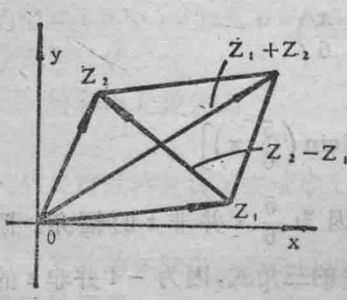

图 2.1-1

当复数 z 用向量来表示时，利用平面解析几何的知识，容易看出复数的加法(或减法)与向量的加法(或减法)的平行四边形法则是完全一致的。由图 2.1-1 可见，$|z_2-z_1|$ 就是点 z_2 和 z_1 之间的距离。且有

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|;$$

$$|z_2-z_1|\geqslant\big||z_2|-|z_1|\big|。$$

2.2 复数的乘法与乘方

当复数用代数式表示时，我们定义

$$z_1\cdot z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_2y_1+x_1y_2)$$

即与多项式的乘法相似。

由乘法的定义，我们容易验证以下各式：

$$z_1\cdot\overline{z_1}=|z_1|^2$$

$$\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2},$$

即积的共轭等于共轭的积；

$z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1$；

$(z_1\cdot z_2)\cdot z_3=z_1(z_2\cdot z_3)$；

$(z_1+z_2)z_3=z_1\cdot z_3+z_2\cdot z_3$，即复数的乘法同样满足交换律、结合律及对加法的分配律。

当复数用三角式表示时，我们有

$$\begin{aligned}z_1\cdot z_2&=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\\&=r_1\cdot r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)\\&\quad+i(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)]\\&=r_1\cdot r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]\end{aligned}$$

由此可得：

$$|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$$

即乘积的模等于模的乘积。

$$\operatorname{Arg}(z_1\cdot z_2)=\theta_1+\theta_2=\operatorname{Arg}z_1+\operatorname{Arg}z_2,$$

即积的幅角等于幅角的和。

由于幅角具有多值性，上面这个等式应该理解为：对于右边的任一个值，左边必有一个值与它相等，反之亦然。以后，凡此类多值相等的式子都应当这样理解。

当复数 z_1, z_2 用几何表示时，上述结果表明向量 z_1 乘以向

量 z_2 所得之向量 $z=z_1\cdot z_2$ 是这样一个向量，其幅角为 z_1 与 z_2 的幅角之和，其模为 z_1 模与 z_2 模之积。因此只须将向量 z_1 旋转一个角度 $\theta_2=\arg z_2$，并将 z_1 模乘以 z_2 模即得乘积 $z_1\cdot z_2$ 的向量。

当复数用指数式来表示时，我们有

$$z_1\cdot z_2=r_1e^{i\theta_1}\cdot r_2e^{i\theta_2}=r_1r_2\cdot e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

由此可见，在做复数的乘法运算时，三角式或指数式要比代数式方便得多。

例 1 设 $\qquad z_1=x_1+iy_1 \quad z_2=x_2+iy_2$

为任意两个复数，求证：$z_1\cdot\overline{z_2}+\overline{z_1}\cdot z_2=2\mathrm{Re}(z_1\cdot\overline{z_2})$

证法 1
$$\begin{aligned}z_1\cdot\overline{z_2}+\overline{z_1}\cdot z_2&=(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)\\&\quad+(x_1-iy_1)(x_2+iy_2)\\&=(x_1x_2+y_1y_2)+i(x_2y_1-x_1y_2)\\&\quad+(x_1x_2+y_1y_2)+i(x_1y_2-x_2y_1)\\&=2(x_1x_2+y_1y_2)=2\mathrm{Re}(z_1\cdot\overline{z}_2)\end{aligned}$$

证法 2 $z_1\cdot\overline{z_2}+\overline{z_1}\cdot z_2=z_1\cdot\overline{z_2}+\overline{z_1\cdot\overline{z_2}}=2\mathrm{Re}(z_1\cdot\overline{z_2})$

例 2 已知平面内并列的三个相等的正方形，如图 2.2-1 所示，利用复数，证明 $\theta_1+\theta_2+\theta_3=\dfrac{\pi}{2}$

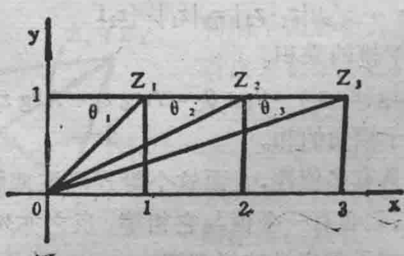

图 2.2-1

证明 由图 2.2-1 可见，θ_1，θ_2，θ_3 分别是 $\arg z_1$，$\arg z_2$，$\arg z_3$。

因为 $$z_1 = 1+i,\ z_2 = 2+i,\ z_3 = 3+i$$

所以 $$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = (1+i)(2+i)(3+i) = 10i$$

从而 $$\arg z_1 + \arg z_2 + \arg z_3 = \arg(10i) + 2k\pi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

由图 2.2-1 又可知

$$0 < \arg z_1 < \frac{\pi}{2},\ 0 < \arg z_2 < \frac{\pi}{2},\ 0 < \arg z_3 < \frac{\pi}{2},$$

所以 $$0 < \arg z_1 + \arg z_2 + \arg z_3 < \frac{3}{2}\pi$$

因此 $k=0$，即

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \arg z_1 + \arg z_2 + \arg z_3 = \frac{\pi}{2}$$

例 3 设 $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$，$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$，求点 z_1 与点 z_2 之间的距离。

解 因为 $$|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2}) = (z_1 - z_2)(\overline{z}_1 - \overline{z}_2)$$
$$= z_1 \cdot \overline{z}_1 + z_2 \cdot \overline{z}_2 - (z_1\overline{z}_2 + \overline{z}_1 z_2)$$
$$= r_1^2 + r_2^2 - 2\,\mathrm{Re}\,(z_1 \cdot \overline{z}_2)$$

因为 $$\overline{z}_2 = r_2(\cos(-\theta_2) + i\sin(-\theta_2)]$$

所以 $$z_1 \cdot \overline{z}_2 = r_1 \cdot r_2[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

从而有 $$|z_1 - z_2|^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 \cdot r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

所以 $$|z_1 - z_2| = \sqrt{r_1^2 - r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)},$$

即为我们早已熟知的余弦定理。

定义了复数的乘法运算后，我们就能定义复数的乘方运算。我们称 $\overbrace{z \cdot z \cdots z}^{n}$ 为 z 的 n 次幂，记作 z^n。

当复数用三角式或指数式表示时，显然有

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r^n e^{in\theta}$$

特别，当 $r=1$ 时，得

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

即为熟知的棣美弗公式。

例 4 利用棣美弗公式证明：

$$\sin 3\theta=3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta$$
$$\cos 3\theta=\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta$$

证 因为

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^3=\cos 3\theta+i\sin 3\theta$$

又因为

$$\begin{aligned}(\cos\theta+i\sin\theta)^3&=\cos^3\theta+3\cos^2\theta(i\sin\theta)\\&\quad+3\cos\theta(i\sin\theta)^2+(i\sin\theta)^3\\&=(\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta)\\&\quad+i(3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta)\end{aligned}$$

所以有

$$\cos 3\theta=\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta$$
$$\sin 3\theta=3\sin\theta\cos^2\theta-\sin^3\theta$$

证毕。

2.3 复数的除法

设有复数 z_1，$z_2(z_2\neq 0)$ 与 z，如满足 $z_2\cdot z=z_1$，则称复数 z 为 z_1 除以 z_2 的商，记作 $z=\dfrac{z_1}{z_2}$。

当复数用代数式来表示时，我们容易求得商 z 的代数表示式。因为 $z_2\cdot z=z_1$，所以

$$(xx_2-yy_2)+i(xy_2+x_2y)=x_1+iy_1$$

所以 $$xx_2-yy_2=x_1,\quad xy_2+yx_2=y_1$$

又因为 $z_2\neq 0$，所以 $x_2^2+y_2^2\neq 0$，即上述方程组的系数行列式 $\Delta\neq 0$，于是从方程组可解得：

$$x=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}, \qquad y=\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$$

所以商

$$z=\frac{z_1}{z_2}=x+iy=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$$

上面这个式子可以利用共轭复数的性质较简便地得到：

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z}_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$$

利用除法的定义，容易验证

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$$

即商的共轭等于共轭的商。

当复数用三角式来表示时，我们可以得到：

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z}_2}=\frac{r_1r_2[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]}{r_2^2}$$

$$=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]$$

由此可得：

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{r_1}{r_2}=\frac{|z_1|}{|z_2|}$$

即商的模等于模的商：

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\theta_1-\theta_2=\operatorname{Arg} z_1-\operatorname{Arg} z_2$$

即商的幅角等于分子的幅角减去分母的幅角。

当复数用指数式来表示时，显然有

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1e^{i\theta_1}}{r_2e^{i\theta_2}}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

例 1 已知 $z=-\frac{1}{i}-\frac{3i}{1-i}$，求 $|z|$。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com