全国硕士研究生入学考试辅导丛书

2011

全国硕士研究生入学考试 标准模拟考场 数学分册（数学三）

全国硕士研究生入学考试命题研究组　编

- 原命题组成员、阅卷组组长亲自编写，融合北京大学、清华大学权威讯息
- 深度梳理命题轨迹，解析详尽、规避误区，培养最佳解题思路
- 以题型训练为核心，全面展现题型变换
- 凸显历年试题精华，明示命题原则与规律，把握命题脉搏
- 注重实战，讲求技巧，切实提升综合应试能力

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

全国硕士研究生入学考试辅导丛书

全国硕士研究生入学考试标准模拟考场

数学分册(数学三)

全国硕士研究生入学考试命题研究组　编

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

全国硕士研究生入学考试标准模拟考场. 数学. 3/全国硕士研究生入学考试命题研究组编. —2 版. —杭州：浙江大学出版社，(2010.3 重印)

(全国硕士研究生入学考试辅导丛书)

ISBN 978-7-308-06688-4

Ⅰ.全… Ⅱ.全… Ⅲ.高等数学—研究生—入学考试—习题 Ⅳ.G643-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2009) 第 047829 号

全国硕士研究生入学考试标准模拟考场·数学分册(数学三)

全国硕士研究生入学考试命题研究组　编

丛书策划　樊晓燕　杨晓鸣

责任编辑　冯社宁

出版发行　浙江大学出版社

(杭州市天目山路 148 号　邮政编码 310007)

(网址：http://www.zjupress.com)

排　　版　杭州大漠照排印刷有限公司

印　　刷　富阳市育才印刷有限公司

开　　本　889mm×1194mm　1/16

印　　张　16

字　　数　409 千

版 印 次　2010 年 3 月第 2 版　2010 年 3 月第 2 次印刷

书　　号　ISBN 978-7-308-06688-4

定　　价　31.00 元

浙江大学出版社发行部邮购电话 (0571) 88925591

前　言

2010年全国硕士研究生入学考试已经拉下了帷幕，超过140万人参加了这场规模空前的选拔性考试。参加人数的增多，录取率的有限，更显现了竞争的激烈程度。为了指导参加2011年全国硕士研究生入学统一考试的广大考生数学考试的复习，根据最新考试大纲的要求，我们组织部分多年来参加考试大纲制订和修订工作及参加考前辅导的教授、专家编写了这本《全国硕士研究生入学考试标准模拟考场·数学分册(数学三)》，以供广大考生复习使用。

本书的特点如下：

一、作者阵容强大，预测具有权威性

本套丛书的主编都是考研培训学校的首席主讲专家，他们都在全国各地考研辅导学校一线亲自辅导广大考生的考前复习，并有多年考研培训和教育工作经历，有相当丰富的辅导和教学工作经验，深谙研究生入学考试的命题规律和出题动态，同时又结合了清华大学、北京大学和中国人民大学的权威信息，浓缩成本书模拟试卷。

二、紧扣最新大纲，高效预测

本套模拟试卷系列严格按照最新考试大纲进行编写，题型和题量与实际考试试题一致，紧紧联系当前的考试动态以及最新形式，注重实际操作训练。每套试卷均由一线著名专家精选材料、题题推敲、优化设计编制完成。

三、启迪备考，极具操作性

许多考生缺乏实际临场经验。本套模拟考场系列考卷将精辟阐明解题思路，全面展现题型变化，将浩渺的习题浓缩于有限的模拟题目中，迅速提高考生快速、准确、灵活的解题能力，为考研学子全程领航和理性分析，引领考生高效通过考研难关。

首先不论是数学理论的建立，还是数学运算和逻辑推理，无一不是以明确而又清晰的概念为基础的。考生应系统掌握大纲规定的基础知识，对大纲规定的内容进行梳理，形成知识网络。其次，在接触一定量的题型之后，头脑中留下的不应是纷繁的题目，而应是清晰、鲜明、深刻的基础知识和基本技能，以及基本的数学思想和方法。

解题时既要考虑解题的通性解法，又要分析它的特殊性，寻求最佳解决方法，以提高解题能力和对新题型的适应能力。考生复习时演练一定数量的习题是非常必要的，它是提高考试

成绩的重要手段,但也不要搞题海战术,重要的是要吃透大纲规定的基本考点,提高分析问题和解决问题的能力。

本书是北京大学、清华大学和中国人民大学等校广大数学教师及原考研命题组的专家、教授智慧和劳动的结晶,是一份宝贵的资料。其中的每一道试题,既反映了考研数学考试大纲对考生数学知识、能力和水平的要求,又蕴涵着命题的指导思想、基本原则和趋势。因此,对照考试大纲分析、研究这些试题,考生不仅可以了解考研以来数学考试的全貌,而且可以方便地了解有关试题和信息,从中发现规律,归纳出各部分内容的重点、难点,以及常考的题型,进一步把握考试的特点及命题的思路和规律,从而从容应考,轻取高分。

由于时间仓促,书中疏漏之处在所难免,诚请专家和读者指正。

编者

于清华园

目　　录

一、模拟试卷

二、参考答案与解析

一、模拟试卷

模拟试卷(一)

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的横线上.

1. 当 $x\to 1$ 时，函数 $\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限________.

A. 等于 2　　B. 等于 0　　C. 为 ∞　　D. 不存在但不为 ∞

2. 设对任意的 x，总有 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ ________.

A. 存在且等于零　　B. 存在但不一定为零　　C. 一定不存在　　D. 不一定存在

3. 下列各式中正确的是________.

A. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=1$　　B. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$

C. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x=-e$　　D. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=-e$

4. 齐次方程组

$$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+\lambda^2x_3=0,\\ x_1+\lambda x_2+x_3=0,\\ x_1+x_2+\lambda x_3=0\end{cases}$$

的系数矩阵记为 $\boldsymbol{A}$. 若存在三阶矩阵 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$，使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则________.

A. $\lambda=-2$ 且 $|B|=0$　　B. $\lambda=-2$ 且 $|B|\neq 0$

C. $\lambda=1$ 且 $|B|=0$　　D. $\lambda=1$ 且 $|B|\neq 0$

5. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同阶可逆矩阵，则________.

A. $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$　　B. 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$

C. 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{B}$　　D. 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$，使 $\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$

6. 设向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示，但不能由向量组(Ⅰ)：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性表示，记向量组(Ⅱ)：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1},\boldsymbol{\beta}$，则________.

A. $\boldsymbol{\alpha}_m$ 不能由(Ⅰ)线性表示，也不能由(Ⅱ)线性表示

B. $\boldsymbol{\alpha}_m$ 不能由(Ⅰ)线性表示，但可能由(Ⅱ)线性表示

C. $\boldsymbol{\alpha}_m$ 可由(Ⅰ)线性表示，也可由(Ⅱ)线性表示

D. $\boldsymbol{\alpha}_m$ 可由(Ⅰ)线性表示，但不可由(Ⅱ)线性表示

7. 设 A、B 为两随机事件，且 $B\subset A$，则下列结论中肯定正确的是________.

A. $P(A+B)=P(A)$　　B. $P(AB)=P(A)$

C. $P(B|A)=P(B)$　　D. $P(B-A)=P(B)-P(A)$

8. 假设事件 A 和 B 满足 $P(B|A)=1$，则________.

A. A是必然事件　　B. $P(B|\overline{A})=0$　　C. $A\supset B$　　D. $A\subset B$

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

9. 极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}(\sin x+\cos x)=$ ________.

10. 已知 $f'(x_0)=-1$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}=$ ________.

11. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 m 阶方阵，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，且 $|\boldsymbol{A}|=a$，$|\boldsymbol{B}|=b$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}$，则 $|\boldsymbol{C}|=$ ________.

12. 设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为可逆矩阵，$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}$ 为分块矩阵，则 $\boldsymbol{X}^{-1}=$ ________.

13. 将C、C、E、E、I、N、S这七个字母随机地排成一行，那么，恰好排成SCIENCE的概率为 ________.

14. 设随机变量 X 的分布函数为：

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ 0.4, & -1\leqslant x<1,\\ 0.8, & 1\leqslant x<3,\\ 1, & x\geqslant 3,\end{cases}$$

则 X 的概率分布为 ________.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定的位置上，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（本题满分 9 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$，其中 n 是给定的自然数.

16.（本题满分 9 分）

计算 $I=\displaystyle\int\frac{\operatorname{arccot}\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$.

17.（本题满分 11 分）

计算二重积分 $I=\displaystyle\iint\limits_D y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由 x 轴、y 轴与曲线 $\sqrt{\dfrac{x}{a}}+\sqrt{\dfrac{y}{b}}=1$ 所围成的区域，$a>0,b>0$.

18.（本题满分 11 分）

已知对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，存在自然数 k，使得 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}$，试证明：矩阵 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵并求它的表达式（$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵）.

19.（本题满分 10 分）

设含 n 个方程的齐次线性方程组

$$\begin{cases} ax_1+bx_2+bx_3+\cdots+bx_n=0, \\ bx_1+ax_2+bx_3+\cdots+bx_n=0, \\ \qquad\vdots \\ bx_1+bx_2+bx_3+\cdots+ax_n=0, \end{cases}$$

其中 $a\neq 0, b\neq 0, n\geqslant 2$. 试讨论 a、b 为何值时，方程组仅有零解、无穷多组解？在有无穷多解时，求出全部解，并用基础解系表示全部解.

20.（本题满分 11 分）

设二次型

$$f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2\alpha x_1x_2+2\beta x_2x_3+2x_1x_3$$

经正交变换 $x=\boldsymbol{P}y$ 化成 $f=y_2^2+2y_3^2$，其中 $x=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$ 和 $y=(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}$ 是三维列向量，$\boldsymbol{P}$ 是 3 阶正交矩阵. 试求常数 α, β.

21.（本题满分 11 分）

设有来自三个地区的各 10 名、15 名和 25 名考生的报名表，其中女生的报名表分别为 3 份、7 份和 5 份. 随机地取一个地区的报名表，从中先后抽出两份.

(1) 求先抽到的一份是女生的概率 p；

(2) 已知后抽到的一份是男生表，求先抽到的一份是女生表的概率 q.

22.（本题满分 11 分）

一电子仪器由两个部件构成，以 X 和 Y 分别表示两个部件的寿命(单位：千小时)，已知 X 和 Y 的联合分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}1-e^{-0.5x}-e^{-0.5y}+e^{-0.5(x+y)}, & 若\ x\geqslant 0,y\geqslant 0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

(1) 问 X 和 Y 是否独立?

(2) 求两个部件的寿命都超过 100 小时的概率 α.

23.（本题满分 11 分）

一生产线生产的产品成箱包装，每箱的重量是随机的. 假设每箱平均重 50 千克，标准差为 5 千克. 若用最大载重为 5 吨的汽车承运，试利用中心极限定理说明每辆最多可以装多少箱，才能保障不超载的概率大于 0.977?($\Phi(2)=0.977$，其中 $\Phi(x)$ 是标准正态分布函数.)

模拟试卷(二)

一、选择题：1～8小题，每小题4分，共32分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的横线上.

1. 函数 $f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间内有界?________.

A. $(-1,0)$　　B. $(0,1)$　　C. $(1,2)$　　D. $(2,3)$

2. 已知函数 $f(x)$ 具有任意阶导数，且 $f'(x)=[f(x)]^2$，则当 n 为大于2的正整数时，$f(x)$ 的 n 阶导数 $f^{(n)}(x)$ 是________.

A. $n![f(x)]^{n+1}$　　B. $n[f(x)]^{n+1}$　　C. $[f(x)]^{2n}$　　D. $n![f(x)]^{2n}$

3. 设函数 $f(x)$ 对任意 x 均满足等式 $f(1+x)=af(x)$，且 $f'(0)=b$，其中 a、b 为非零常数，则________.

A. $f(x)$ 在 $x=1$ 处不可导　　B. $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，且 $f'(1)=a$

C. $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导. 且 $f'(1)=b$　　D. $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，且 $f'(1)=ab$

4. 设 $f(x)$ 是连续函数，$F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，则________.

A. 当 $f(x)$ 是奇函数时，$F(x)$ 必为偶函数

B. 当 $f(x)$ 是偶函数时，$F(x)$ 必为奇函数

C. 当 $f(x)$ 是周期函数时，$F(x)$ 必为周期函数

D. 当 $f(x)$ 是单调增函数时，$F(x)$ 必为单调增函数

5. 设

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{24} & a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{34} & a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{44} & a_{43} & a_{42} & a_{41} \end{bmatrix},$$

$$P_1=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad P_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 等于________.

A. $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$　　B. $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}_2$　　C. $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}^{-1}$　　D. $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}_1$

6. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关的充分条件是________.

A. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 均不为零向量

B. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意两个向量的分量不成比例

C. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任一个向量均不能由其余 $s-1$ 个向量线性表示

D. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中有一部分向量线性无关

7. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*\neq\boldsymbol{0}$,若 $\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3,\zeta_4$ 是非齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的互不相等的解,则对应的齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系________.

A. 不存在　　B. 仅含一个非零解向量

C. 含有两个线性无关的解向量　　D. 含有三个线性无关的解向量

8. 设 A 和 B 是任意两个概率不为 0 的不相容事件,则下列结论中肯定正确的是________.

A. $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 不相容　　B. $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 相容

C. $P(AB)=P(A)P(B)$　　D. $P(A-B)=P(A)$

二、填空题:9～14 小题,每小题 4 分,共 24 分,请将答案写在答题纸指定位置上.

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5}{5x+3}\sin\dfrac{2}{x}=$________.

10. 设曲线 $f(x)=x^3+ax$ 与 $g(x)=bx^2+c$ 都通过点 $(-1,0)$,且在点 $(-1,0)$ 有公共切线,则 $a=$________,$b=$________,$c=$________.

11. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1\\-1&2\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{E}$ 为 2 阶单位矩阵,矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$,则 $|\boldsymbol{B}|=$________.

12. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}$,而 $n\geqslant 2$ 为正整数,则 $\boldsymbol{A}^n-2\boldsymbol{A}^{n-1}=$________.

13. 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}, & 若\ x\in[0,1],\\[2mm] \dfrac{2}{9}, & 若\ x\in[3,6],\\[2mm] 0, & 其他.\end{cases}$$

若 k 使得 $P\{X\geqslant k\}=\dfrac{2}{3}$,则 k 的取值范围是________.

14. 设随机变量 X 在区间 $[-1,2]$ 上服从均匀分布,随机变量

$$Y=\begin{cases}1, & 若\ X>0,\\ 0, & 若\ X=0,\\ -1, & 若\ X<0,\end{cases}$$

则方差 $D(Y)=$________.

三、解答题:15～23 小题,共 94 分.请将解答写在答题纸指定的位置上,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.(本题满分 9 分)

求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{\cos^2 x}{x^2}\right)$.

16. (本题满分 9 分)

设 $f(\sin^2 x)=\dfrac{x}{\sin x}$,求$\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} f(x)\mathrm{d}x$.

17. (本题满分 11 分)

设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-\mathrm{e}^{-x}}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 其中 $g(x)$ 有二阶连续导数,且 $g(0)=1, g'(0)=-1$.

(1) 求 $f'(x)$;

(2) 讨论 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续性.

18. (本题满分 11 分)

设有三维列向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1+\lambda\\1\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\1+\lambda\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1\\1\\1+\lambda\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}0\\\lambda\\\lambda^2\end{bmatrix}.$$

问 λ 取何值时,

(1) $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,且表达式唯一;

(2) $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,且表达式不唯一;

(3) $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

19.（本题满分 10 分）

已知齐次线性方程组

$$\begin{cases}(a_1+b)x_1+a_2x_2+a_3x_3+\cdots+a_nx_n=0,\\ a_1x_1+(a_2+b)x_2a_3x_3+\cdots+a_nx_n=0,\\ a_1x_1+a_2x_2+(a_3+b)x_3+\cdots+a_nx_n=0,\\ \qquad\qquad\vdots\\ a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+\cdots+(a_n+b)x_n=0,\end{cases}$$

其中 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\neq 0$，试讨论 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 和 b 满足何种关系时，

(1) 方程组仅有零解；

(2) 方程组有非零解，在有非零解时，求此方程组的一个基础解系.

20.（本题满分 11 分）

假设一设备开机后无故障工作的时间 X 服从指数分布，平均无故障工作时间（$E(X)$）为 5 小时. 设备定时开机，出现故障时自动关机，而在无故障的情况下工作 2 小时便关机. 试求该设备每次开机无故障工作的时间 Y 的分布函数 $F(y)$.

21.（本题满分 11 分）

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=4x_2^2-3x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+8x_2x_3$.

(1) 写出二次型 f 的矩阵表达式；

(2) 用正交变换把二次型 f 化为标准形，并写出相应的正交矩阵.

22.（本题满分 11 分）

假设一厂家生产的每台仪器，以概率 0.70 可以直接出厂，以概率 0.30 需进一步调试，经调试后以概率 0.80 可以出厂，以概率 0.20 定为不合格品不能出厂. 现该厂新生产了 $n(n \geqslant 2)$ 台仪器(假设各台仪器的生产过程相互独立)，求：

(1) 全部能出厂的概率 α；

(2) 其中恰好有两台不能出厂的概率 β；

(3) 其中至少有两台不能出厂的概率 θ.

23.（本题满分 11 分）

设总体 X 的概率密度为

$$p(x,\lambda)=\begin{cases}\lambda a x^{a-1}\mathrm{e}^{-\lambda x^{a}}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$$

其中 $\lambda>0$ 为未知参数，$a>0$ 是已知常数. 试根据来自总体 X 的简单随机样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$，求 λ 的最大似然估计量 $\hat{\lambda}$.

模拟试卷(三)

一、选择题:1～8 小题,每小题 4 分,共 32 分,下列每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的横线上.

1. 当 $x\to 0^{+}$ 时,与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是________.

A. $1-e^{\sqrt{x}}$　　B. $\ln(1+\sqrt{x})$　　C. $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$　　D. $1-\cos\sqrt{x}$

2. 设函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处可导,则函数 $|f(x)|$ 在点 $x=a$ 处不可导的充分条件是________.

A. $f(a)=0$ 且 $f'(a)=0$　　B. $f(a)=0$ 且 $f'(a)\neq 0$

C. $f(a)>0$ 且 $f'(a)>0$　　D. $f(a)<0$ 且 $f'(a)<0$

3. 设线性无关的函数 y_1,y_2,y_3 都是二阶非齐次线性方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的解,C_1、C_2 是任意常数,则该非齐次方程通解是________.

A. $C_1y_1+C_2y_2+y_3$　　B. $C_1y_1+C_2y_2-(C_1+C_2)y_3$

C. $C_1y_1+C_2y_2-(1-C_1-C_2)y_3$　　C. $C_1y_1+C_2y_2+(1-C_1-C_2)y_3$

4. 下列广义积分中发散的是________.

A. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sin x}$　　B. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

C. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}e^{-x^2}dx$　　D. $\displaystyle\int_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^2x}$

5. 设有任意两个 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$,若存在两组不全为零的数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ 和 $k_1,\cdots,k_m$,使 $(\lambda_1+k_1)\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+(\lambda_m+k_m)\boldsymbol{\alpha}_m+(\lambda_1-k_1)\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+(\lambda_m-k_m)\boldsymbol{\beta}_m=\boldsymbol{0}$,则________.

A. $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 都线性相关

B. $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 都线性无关

C. $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m+\boldsymbol{\beta}_m,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m-\boldsymbol{\beta}_m$ 线性相关

D. $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m+\boldsymbol{\beta}_m,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m-\boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关

6. 设当事件 A 与 B 同时发生时,事件 C 也发生,则________.

A. $P(C)\leqslant P(A)+P(B)-1$.　　B. $P(C)\geqslant P(A)+P(B)-1$.

C. $P(C)=P(AB)$.　　D. $P(C)=P(A\cup B)$.

7. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵,且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似,$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵,则________.

A. $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}$　　B. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值和特征向量

C. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都相似于一个对角矩阵　　D. 对任意常数 t,$t\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 与 $t\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}$ 相似

8. 设 $0<P(A)<1,0<P(B)<1,P(A|B)+P(\overline{A}|\overline{B})=1$,则________.

A. 事件 A 和 B 互不相容　　B. 事件 A 和 B 相互对立

C. 事件 A 和 B 互不独立　　D. 事件 A 和 B 相互独立