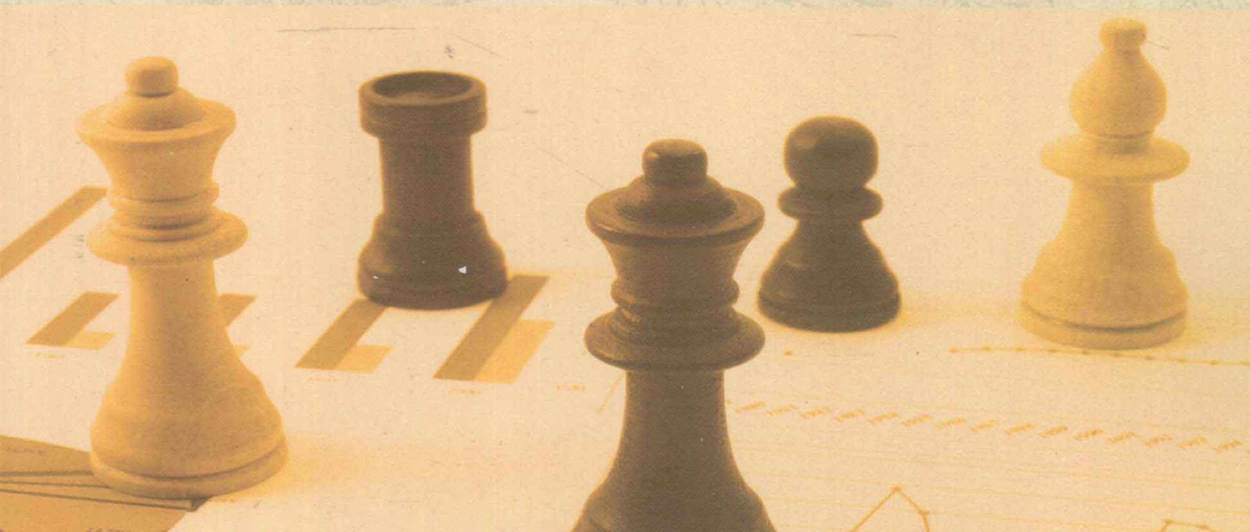
中国科学院规划教材

运筹学

（第二版）

党耀国 朱建军 李帮义 等 编著



科学出版社

中国科学院规划教材

运 筹 学

（第二版）

党耀国 朱建军 李帮义 等 编著

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书系统地介绍了运筹学中的主要内容，重点讲解了应用广泛的线性规划、运输问题、整数规划、动态规划、图论与网络计划、存储论、决策分析与排队论等定量分析和优化的理论与方法。本书强调学以致用，以大量实际问题为背景引出运筹学各分支的基本概念、模型和方法，具有很强的实用性；在基本原理和方法的介绍方面，本书尽量避免复杂的理论证明，通过大量通俗易懂的例子进行理论方法的讲解，具有较强的趣味性，又不失理论性，理论难度由浅入深，适合不同层次的读者。

本书可作为高等院校经济类、管理类、工程类各专业的本科生教材和部分专业研究生教材，也可供各类管理人员及相关人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

运筹学/党耀国等编著. 一北京：科学出版社，2012

中国科学院规划教材

ISBN 978-7-03-033475-6

Ⅰ.①运…　Ⅱ.①党…　Ⅲ.①运筹学校-教材　Ⅳ.①022

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 017472 号

责任编辑：林 建 兰 鹏 / 责任校对：张凤琴

责任印制：张克忠 / 封面设计：蓝正设计

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

北京市文林印务有限公司印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2009 年 1 月第 一 版　开本：720×1000　1/16

2012 年 2 月第 二 版　印张：19 3/4

2012 年 2 月第四次印刷　字数：390 000

定价：36.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

第二版前言

“运筹帷幄之中，决胜千里之外”。运筹学是一门应用科学，它广泛应用现有的科学技术知识和数学方法，解决生产、管理等实践中的现实问题，为决策者选择优化决策提供定量的依据。运筹学已经广泛应用于工业、农业、交通运输、商业、国防、建筑、通信、政府机关等各个部门领域，涉及生产管理实践中的最优生产计划、最优分配、最佳设计、最优决策、最佳管理等实际问题。掌握运筹学的基本理论与方法，是高等院校经济管理类专业学生，各级各类管理人员必须具备的基本素质。

本教材编写组成员具有丰富的教学和科研经验，由党耀国教授负责的“运筹学”课程被评为江苏省精品课程(2010 年)。本书在第一版的基础上，根据教学过程中有关专家、学者的意见，对部分内容进行了修订，并且增加了排队论和实验部分。

在教材编写过程中，以生产管理实践中的实际问题为素材，强调实践中的管理理念，通过大量实际案例的分析和讲解，加深了读者对实际问题的认识，增强其学习兴趣；深入浅出地讲解各种模型的基本概念和求解思路，尽量避开纯粹数学上的复杂推导，易于学生理解和自学；教材体系结构清晰，涵盖了运筹学的经典理论模型和方法，内容选择安排合理，简单实用。

本书共分 10 章，其中第 1、2、3、5 章由党耀国教授执笔，第 4、8 章由朱建军教授执笔，第 6 章由李帮义教授和党耀国教授执笔，第 7 章由李帮义教授执笔，第 9 章由章玲副教授执笔，第 10 章由徐海燕教授执笔。党耀国教授负责全书统稿，并审定了各章内容。

本书可作为高等院校经济类、管理类、工程类各专业的本科生教材和部分专业研究生教材，也可供各类管理人员及相关人员参考。

由于作者水平有限，本书难免存在不足之处，敬请专家、学者及读者不吝指正。

党耀国

2012年1月

第一版前言

运筹学是从实际问题中抽象出来的模型化手段，是一种解决实际问题的系统化思想，它帮助人们学会如何从实践中发现问题、提出问题和分析问题，基于定性和定量相结合的方法，对实际问题进行数学建模并对模型求解以寻求最优的解决方案。运筹学的核心思想是当我们面临各种决策问题时，如何做事才能有较高的效率。运筹学已经广泛应用于工业、农业、交通运输、商业、国防、建筑、通信、政府机关等各个部门领域，涉及生产管理实践中的最优生产计划、最优分配、最佳设计、最优决策、最佳管理等实际问题。掌握运筹学的基本理论与方法，是高等院校经济、管理、工程类专业学生和各级各类管理人员必须具备的基本素质。

到目前为止，世界上已经出版的运筹学教材有数百种，它们各有特色。实际上，对以解决实际问题为目标的经济、管理类专业的学生而言，最重要的是通过本门课程的学习，培养系统的解决问题的能力，养成运用模型解决问题的习惯，储备一定的数学建模与求解的知识。为此，本书在编写过程中以生产管理实践中的实际问题为基本素材，强调实践中的理念和悟性，通过大量实际案例的分析和讲解加深读者对实际问题的认识，增强其学习兴趣；深入浅出地讲解各种模型的基本概念和求解思路，尽力避开纯粹数学上的复杂推导，易于学生理解和自学；教材体系结构清晰，涵盖了运筹学的经典理论模型和方法，内容选择安排合理、简单实用。本书适用于高等院校经济、管理类专业的本科生、研究生，MBA，面向实际应用的工程类、管理类和各类管理干部进修班的学员。

本书共 8 章，其中第 1 章由党耀国和赵占平执笔，第 2 章、第 3 章由党耀国执

笔，第 4 章、第 8 章由朱建军执笔，第 5 章、第 7 章由李帮义执笔，第 6 章由李帮义和赵占平执笔。

由于作者水平有限，本书的缺点以及疏漏在所难免，敬请专家、学者和读者不吝指正。

党耀国

2008 年 8 月

目 录

第1章

线性规划的数学模型与单纯形法

线性规划是运筹学的一个重要分支，它是研究在给定的约束条件下，求所考察的目标函数在某种意义下的极值问题。自 1947 年美国数学家丹捷格(G. B. Dantzig)提出了求解线性规划问题的方法——单纯形法之后，线性规划在理论上趋于成熟，在实际中的应用日益广泛与深入。特别是在能用计算机来处理成千上万个约束条件和变量的大规模线性规划问题之后，它的适用领域更加广泛。从解决技术问题中的最优化设计到工业、农业、商业、交通运输业、军事、经济计划与管理、决策等各个领域均可发挥重要作用。从范围来看，小到一个小组的日常工作和计划安排，大至整个部门以致国民经济计划的最优方案的提出，都有用武之地。它具有适应性强、应用广泛、计算技术比较简单的特点，是现代管理科学的重要基础和手段之一。

1.1 线性规划问题及其数学模型

1.1.1 线性规划问题的数学模型

在生产管理和经济活动中，经常会遇到线性规划问题，如何利用线性规划的方法来进行分析，下面举例来加以说明。

例 1.1(计划安排问题)　某工厂在计划期内安排生产Ⅰ、Ⅱ两种产品，已知生产单位产品所占用的设备 A，B 的工时、原材料的消耗见表 1.1。

表 1.1 生产单位产品占用设备工时、原材料的消耗

	Ⅰ	Ⅱ	资源总量
设备 A/单位设备工时	0	3	15
设备 B/单位设备工时	4	0	12
原材料/吨	2	2	14

工厂每生产一单位产品Ⅰ可获利润 2 万元，每生产一单位产品Ⅱ可获利润 3 万元，问工厂应如何合理安排这两种产品的产量，使得在资源有限的条件下工厂获得利润最大？

解 工厂目前要决策的问题是生产多少单位产品Ⅰ和生产多少单位产品Ⅱ才使工厂获利最大，我们把在计划期内生产单位产品Ⅰ和生产单位产品Ⅱ的件数用变量 x_1,x_2 来表示，则称 x_1,x_2 为决策变量。因为在计划期内设备 A 的可利用有效工时是 15 个单位，所以在确定单位产品Ⅰ、Ⅱ的产量时，可用不等式表示为

$$3x_2 \leqslant 15$$

同理，因在计划期内设备 B 的限制，有不等式

$$4x_1 \leqslant 12$$

因在计划期内原材料的限制，有不等式

$$2x_1 + 2x_2 \leqslant 14$$

若用 Z 表示该工厂的利润，则该工厂的利润值

$$Z = 2x_1 + 3x_2 \text{（万元）}$$

综上所述，该工厂的计划安排问题可用数学模型表示为

目标函数 $\max Z = 2x_1 + 3x_2$

约束条件 $$\text{s.t.} \begin{cases} 3x_2 \leqslant 15 \\ 4x_1 \leqslant 12 \\ 2x_1 + 2x_2 \leqslant 14 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

例 1.2（成本问题） 某炼油厂每季度需供应给合同单位汽油 15 万吨、煤油 12 万吨、重油 12 万吨。该厂计划从 A，B 两处运回原油提炼。已知两处的原油成分含量见表 1.2。又已知从 A 处采购的原油价格为每吨（包括运费）200 元，B 处采购的原油价格为每吨（包括运费）290 元，问：在满足供应合同的条件下，该炼油厂该如何从 A，B 两处采购原油，使购买成本最小。

表 1.2　A,B 两处的原油成分含量

成分 \ 产品来源	A	B
汽油	15%	50%
煤油	20%	30%
重油	50%	15%
其他	15%	5%

分析：很明显，该厂可以有多种不同的方案从 A,B 两处采购原油，但最优方案应是使购买成本最小的一个，即在满足供应合同单位的前提下，使成本最小的一个采购方案。

解　设 x_1,x_2 分别表示从 $A、B$ 两处采购的原油量（单位：万吨），则所有的采购方案均应同时满足

$$\begin{cases} 0.15x_1+0.50x_2\geqslant 15 \\ 0.20x_1+0.30x_2\geqslant 12 \\ 0.50x_1+0.15x_2\geqslant 12 \\ x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0 \end{cases}$$

采购成本为 x_1,x_2 的函数，即

$$S=200x_1+290x_2\text{（万元）}$$

而最终目标是求满足约束条件和使采购成本最小时的解。由此，建立的数学模型为

$$\min S=200x_1+290x_2$$

$$\text{s. t.}\begin{cases} 0.15x_1+0.50x_2\geqslant 15 \\ 0.20x_1+0.30x_2\geqslant 12 \\ 0.50x_1+0.15x_2\geqslant 12 \\ x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0 \end{cases}$$

由以上两个例子的数学模型可以看出：目标函数为决策变量的线性函数，约束条件也为决策变量的线性不等式（或等式）。该类数学模型具有如下特点：

(1) 有一组非负的决策变量（decision or control variable），这组决策变量的值都代表一个具体方案；

(2) 有一组约束条件，即含有决策变量的线性不等式（或等式）组（linear function constraints）；

(3) 有一个含有决策变量的线性目标函数（objective linear function），按研究

问题的不同，要求目标函数实现最大化或最小化。

满足上述三个条件的数学模型称为线性规划数学模型。如果目标函数是决策变量的非线性函数，或约束条件含有决策变量的非线性不等式(或等式)，称这类数学模型为非线性规划数学模型。

线性规划数学模型的一般形式如下：

$$(\min)\max Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \tag{1.1}$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant (=, \geqslant) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant (=, \geqslant) b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant (=, \geqslant) b_m \qquad (1.2) \\ x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0 \qquad (1.3) \end{cases}$$

在该数学模型中，方程(1.1)称为目标函数；(1.2)称为约束条件；(1.3)称为变量的非负约束条件。

1.1.2 线性规划问题的标准形

由前面所举的例子可知，线性规划问题可能有各种不同的形式。目标函数根据实际问题的要求可能是求最大化，也有可能是求最小化；约束条件可以是"⩽"形式、"⩾"形式的不等式，也可以是"="形式的等式。决策变量有时有非负限制，有时没有非负限制。这种多样性给讨论问题带来了不便。为了便于讨论，规定线性规划问题描述为如下的标准形式：

$$\max Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0 \end{cases} \tag{1.4}$$

这里假设 $b_i \geqslant 0 (i = 1, 2, \cdots, m)$。

以上模型的简写形式为

$$\max Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, & i = 1, 2, \cdots, m \\ x_j \geqslant 0, & j = 1, 2, \cdots, n \end{cases} \tag{1.5}$$

用向量形式表达时,上述模型可以写为

$$\max Z = \boldsymbol{CX}$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{P}_j x_j = \boldsymbol{b} & (i = 1,2,\cdots,m) \\ \boldsymbol{X} \geqslant \boldsymbol{0} & (j = 1,2,\cdots,n) \end{cases} \tag{1.6}$$

用矩阵形式表达时,上述模型可以写为

$$\max Z = \boldsymbol{CX}$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} \boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{X} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases} \tag{1.7}$$

其中,$\boldsymbol{C}=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$,$\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_m)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{P}_j=(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{mj})^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_n)$,$\boldsymbol{0}=(0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$,$j=1,2,\cdots,n$ 。

称 $\boldsymbol{A}$ 为约束方程组的系数矩阵($m\times n$ 阶),一般情况下 $m<n$,m,n 为正整数,分别表示约束条件的个数和决策变量的个数,$\boldsymbol{C}$ 为价值向量,$\boldsymbol{X}$ 为决策向量,通常 $a_{ij},b_i,c_j(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 为已知常数。

实际上,具体问题的线性规划数学模型是各式各样的,需要把它们化成标准形,并借助于标准形的求解方法进行求解。

以下具体讨论如何把一般的线性规划模型化成标准形。

1）目标函数的转化

若原问题的目标函数是求最小化,即 $\min Z=\boldsymbol{CX}$,这时只需要将目标函数的最小值变换为求目标函数的最大值,即 $\min Z=\max(-Z)$ 。令 $Z'=-Z$,就是将目标函数乘以(-1)后转化为如下最大化问题:

$$\max Z' = -\boldsymbol{CX}$$

2）不等式约束转化为等式约束

不等式约束有两种情况:一是约束条件为“$\leqslant$”形式的不等式,则在“$\leqslant$”号的左边加入非负的松弛变量,把原“$\leqslant$”形式的不等式转化为等式;另一种是约束条件为“$\geqslant$”形式的不等式,则可在“$\geqslant$”号的左边减去一个非负的剩余变量,把原“$\geqslant$”形式的不等式转化为等式。同时相应的松弛变量或剩余变量在目标函数中的价值系数取值为 0。

3）变量约束的转换

若原线性规划问题中某个变量是无非负要求的变量。即有某一个变量 x_j 取正值或负值都可以。这时为了满足标准形对变量的非负要求,可令 $x_j=x_j'-x_j''$,其中:$x_j',x_j''\geqslant 0$,将其代入原问题,即在原问题中将 x_j 用两个非负变量之差代替。

上述的标准形具有如下特点:

(1) 目标函数求最大值；

(2) 所求的决策变量都要求是非负的；

(3) 所有的约束条件都是等式；

(4) 常数项非负。

综合以上的讨论，我们可以把任意形式的线性规划问题通过上述手段化成标准形的线性规划问题。现举例如下：

例 1.3 将例 1.1 的线性规划数学模型化为标准形。

解 引进 3 个新的非负变量 x_3, x_4, x_5 使不等式变为等式，标准形为

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} 3x_2 + x_3 = 15 \\ 4x_1 + x_4 = 12 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_5 = 14 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0 \end{cases}$$

例 1.4 试将如下线性规划问题化成标准形：

$$\min Z = -x_1 + 2x_2 - 3x_3$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 7 \\ x_1 - x_2 + x_3 \geqslant 2 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_1, x_2 \geqslant 0, x_3 \text{ 无限制} \end{cases}$$

解 由于 x_3 无限制，因此令 $x_3 = x_4 - x_5 (x_4, x_5 \geqslant 0)$；第 1 个约束不等式左端加上非负松弛变量 x_6，第 2 个约束不等式左端减去非负剩余变量 x_7，目标函数为求最小化，因此令 $Z' = -Z$；同时将目标函数及约束条件中的 x_3 换为 $x_3 = x_4 - x_5$，则可将上述线性规划问题化成如下的标准形：

$$\max Z' = x_1 - 2x_2 + 3x_4 - 3x_5 + 0x_6 + 0x_7$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 - x_5 + x_6 = 7 \\ x_1 - x_2 + x_4 - x_5 - x_7 = 2 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_4 - 2x_5 = 5 \\ x_1, x_2, x_4, \cdots, x_7 \geqslant 0 \end{cases}$$