中册

# 高职数学及其应用

GAOZHISHUXUEJIQIYINGYONGFUDAOYUCESHI

# 辅导与测试

主 编 李和逊
副主编 李 勇

重庆大学出版社

高等职业教育系列教材

# 辅导与测试

## 中册

主　编　李和逊
副主编　李　勇

重庆大学出版社

**图书在版编目（CIP）数据**

高职数学及其应用辅导与测试/李和逊主编. 一重庆：重庆大学出版社，2001. 9
高等职业教育系列教材

ISBN 7-5624-2468-3

Ⅰ. 高...Ⅱ. 李... Ⅲ. 数学一高等教育：技术教育一教学参考资料 Ⅳ. 01

中国版本图书馆CIP数据核字（2001）第064145号

**高职数学及其应用**
辅导与测试
中 册
主编 李和逊
责任编辑 彭 宁
*
重庆大学出版社出版发行
新 华 书 店 经 销
重庆迪美印务公司封面印刷
重 庆 电 力 印 刷 厂 印 刷
*
开本：850×1168 1/32 印张：5.75 插页：1 字数：155千
2001年 9月 第 1 版 2001年 9月 第 1 次印刷
印数：1-8 000
ISBN 7-5624-2468-3/O·202 定价：10.00元

# 前　言

为了全面贯彻《中共中央关于深化教育改革全面推进素质教育的决定》精神，根据《教育部关于加强高职高专人才培养工作的意见》，进一步搞好高职高专的教育改革和提高教学质量，更好地帮助高职高专学生学好数学，在编写完《高职数学及其应用》教材上、中、下三册后，此次应出版社的聘约，以及高职院校学生的要求，编写组编写了同现行《高职数学及其应用》教材相配套的辅导与测试一书。本书以教材为主线，章、节秩序不变，突出高职基础教育的特点，知识以必须够用为度、重应用。注重学生能力和创新意识的培养。全书由基本要求，内容提要，题型示例解析，习题、测试与解答，考试与解答等内容组成，使该书成为与教材优化配套的辅导与测试集。可提供招收初中毕业生五年制高职和高中、中职毕业生三年制高职高专选用。

本书的特点是：

1. 根据教学基本要求，精心组织素材，突出了学习目标。

2. 基础知识“必须够用”为度，重应用、注重学生能力和创新意识的培养。

3. 题型示例解析求真、求实、学有所用。

4. 习题、自测试题、考试试题、可组建试题库，便于组织测试和试卷质量分析。

5. 结合学生实际，配合教材，极具可导、可练、可测性。

编写组：

上册：主编　耿恭健　韩乐文　副主编　胡先富

中册：主编　李和逊　副主编　李勇　参编　焦合华

下册：主编　龙辉　副主编　曾乐辉　主审　黄锡年

参编　郑文　代子玉

本书编写过程中得到了市教委领导，高职院校以及一些举办了高职、高专学校的领导和教师的支持和帮助，在此表示诚挚的感谢。

由于编写水平有限，且时间较仓促。难免有缺点和错误，恳请使用本书的读者批评指正。

《高职数学及其应用》编写组

2001 年 6 月 14 日

# 目　录

# 第十二章　函　数

**【基本要求】**

1. 理解函数及其有关概念，会求函数的定义域与某点函数的值.

2. 了解函数的有界性与周期性，理解函数的单调性与奇偶性.

3. 了解反函数、复合函数、初等函数的概念，理解基本初等函数的基本性质及其图像.

4. 会用数学方法分析与解决简单实际问题.

**【知识点】**

函数，函数的性质，反函数，复合函数，初等函数，函数的应用.

## §12-1　函数的概念

### 一、内容提要

函数的定义，函数的定义域，反函数，函数的几种特性，函数的表示，函数值的求法.

### 二、题型示例

**例 1**　求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+4}$　　(2) $y=\arcsin\dfrac{x-3}{2}$

**解**　(1) 要使 $\dfrac{1}{1-x^2}$ 有意义，必须 $1-x^2\neq 0$

要使 $\sqrt{x+4}$ 有意义，必须 $x+4\geqslant 0$

故要使函数有意义，必须 $1-x^2\neq 0$ 且 $x+4\geqslant 0$，解得 $x\geqslant -4$ 且 $x\neq\pm 1$，

所以函数的定义域为 $[-4,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

(2) 要使函数有意义，必须 $\left|\dfrac{x-3}{2}\right|\leqslant 1$，解得 $1\leqslant x\leqslant 5$. 所以函数的定义域为 $[1,5]$.

**例 2**　下列各对函数是否相同？为什么？

(1) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$，$g(x)=x+2$

(2) $f(x)=1$，$g(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$

**解**　(1) 因为 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$，而 $g(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，因此它们不相同.

(2) 由于它们定义域与对应关系都相同，所以它们相等.

注意，只有当两个函数的定义域与对应关系都相同时，才称两个函数相同.

**例 3**　判断下列函数的奇偶性：

(1) $y=x\cos x$　　(2) $y=x^2-\cos x$　　(3) $y=(\sqrt{x})^2$

**解**　(1) 因为函数 $y=x\cos x$ 的定义域为 $R$，是对称集.

又 $f(-x)=-x\cos(-x)=-x\cos x=-f(x)$

所以 $y=x\cos x$ 是奇函数.

(2) 函数 $y=x^2-\cos x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，是对称集，

又 $f(-x)=(-x)^2-\cos(-x)=x^2-\cos x=f(x)$

所以 $y=x^2-\cos x$ 是偶函数.

(3) $y=(\sqrt{x})^2$ 的定义域为 $[0,+\infty)$，不是对称集.

所以 $y=(\sqrt{x})^2$ 不是奇函数，也不是偶函数即是非奇非偶函

数.

注意:判定函数的奇偶性应首先考察函数所给区间是否为对称集.

**例 4** 求下列函数的反函数:

(1)$y=2x-4$ (2)$y=\dfrac{2x+3}{3x-1}$

**解** (1) 函数 $y=2x-4$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$(-\infty,+\infty)$.

且有 $x=\dfrac{y}{2}+2$,把 $x$ 与 $y$ 对换得反函数:

$y=\dfrac{x}{2}+2$,其定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$(-\infty,+\infty)$.

(2) 函数 $y=\dfrac{2x+3}{3x-1}$ 的定义域为$(-\infty,\dfrac{1}{3})\cup(\dfrac{1}{3},+\infty)$,值域为$(-\infty,\dfrac{2}{3})\cup(\dfrac{2}{3},+\infty)$,且有 $x=\dfrac{3+y}{3y-2}$,把 $x$ 与 $y$ 对换得反函数:

$y=\dfrac{3+x}{3x-2}$,其定义域为$(-\infty,\dfrac{2}{3})\cup(\dfrac{2}{3},+\infty)$. 值域为$(-\infty,\dfrac{1}{3})\cup(\dfrac{1}{3},+\infty)$.

## 习题 12-1

1. 判断下列各对函数是否为同一函数?

(1)$f(x)=\ln x^2$ 与 $g(x)=2\ln x$

(2)$f(x)=\sqrt{(x-1)(x+2)}$ 与 $g(x)=\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+2}$

(3)$f(x)=x$ 与 $g(x)=\sqrt[3]{x^3}$

2. 求下列函数的定义域:

(1)$y=\sqrt{x+1}+\dfrac{1}{\lg(2-x)}$

(2) $y = \dfrac{1}{|x| - x}$

(3) $y = \log_3(x^2 - 5x + 6)$

(4) $y = \sqrt{x^2 - x - 6} + \arcsin\dfrac{2x-1}{7}$

(5) $y = \sqrt{|x| - 1} + \dfrac{\sqrt{x+1}}{x}$

3. 求下列各函数的函数值：

(1) 已知 $f(x) = \dfrac{4}{9x+3}$，求 $f(x+2)$

(2) 已知 $f(x+1) = x^2 - x + 1$，求 $f(x)$

(3) 已知 $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$，求 $f(1)$，$f(a+1)$，$f(-x)$，$f(\dfrac{1}{x})$

4. 求下列函数的反函数：

(1) $y = \sqrt{x^2 + 1}$，$(x < 0)$

(2) $y = 1 + \lg(x+3)$，$(x > -3)$

5. 判断下列函数的奇偶性：

(1) $y = x^2 - 3\cos 2x$

(2) $y = x(x-1)(x+1)$

(3) $y = a^x + a^{-x}$

(4) $y = x\sin x$

(5) $y = x - x^2$

6. 设 $f(x) = x^2 - 3x + 1$，且有 $2f(x) + 1 = 2f(x+1)$，试求 $x$ 的值.

7. 证明：函数 $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ 在 $(0, +\infty)$ 是单调减函数.

## §12-2　基本初等函数与初等函数

### 一、内容提要

基本初等函数、复合函数、初等函数的概念，基本初等函数的

图像,复合函数的复合与分解.

## 二、题型示例

**例 1** 将 $y$ 表为 $x$ 的函数.

(1) $y = u^2$, $u = \sin v$, $v = 2^x$

(2) $y = \lg u$, $u = \sqrt{v}$, $v = 1 + \tan x$

**解** (1) 将 $v = 2^x$ 代入 $u = \sin v$,得 $u = \sin 2^x$,将其再代入 $y = u^2$,得 $y = \sin^2 2^x$.

(2) 将 $v = 1 + \tan x$ 代入 $u = \sqrt{v}$ 得 $u = \sqrt{1 + \tan x}$,最后将其再代入 $y = \lg u$ 中,得: $y = \lg\sqrt{1 + \tan x}$.

**例 2** 指出下列各复合函数的复合过程:

(1) $y = \tan(2x + \frac{\pi}{4})$　　　(2) $y = \frac{1}{(1 - x^2)^3}$

(3) $y = 3^{2\cos^2 x}$　　　(4) $y = 2^{\arctan\frac{1}{x}}$

**解** (1) $y = \tan(2x + \frac{\pi}{4})$ 是由 $y = \tan u, u = 2x + \frac{\pi}{4}$ 两个函数复合而成.

(2) $y = \frac{1}{(1 - x^2)^3}$ 是由 $y = \frac{1}{u^3}, u = 1 - x^2$ 复合而成.

(3) $y = 3^{2\cos^2 x}$ 是由 $y = 3^u, u = 2v^2, v = \cos x$,这三个函数复合而成.

(4) $y = 2^{\arctan\frac{1}{x}}$ 是由 $y = 2^u, u = \arctan v, v = \frac{1}{x}$ 这三个函数复合而成.

# 习题 12-2

1. 填空题

(1) 确定下列各式中 $x$ 的正负:

若 $10^x = 6$ 则 $x$ ____ 0,若 $2^x = 0.5$ 则 $x$ ____ 0.

(2) 已知 $a^{\frac{3}{2}} < a^{\sqrt{2}}$ 则 $a$ 的取值范围是____.

(3) $\log_2\sqrt{8} =$ ____. $\log_5 7^0 =$ ____.

2. 选择题

(1) 下列四个关系式中正确的是(　　).

A. $(\frac{1}{2})^{\frac{2}{3}} < (\frac{1}{5})^{\frac{2}{3}} < (\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}$

B. $(\frac{1}{2})^{\frac{1}{3}} < (\frac{1}{2})^{\frac{2}{3}} < (\frac{1}{5})^{\frac{2}{3}}$

C. $(\frac{1}{5})^{\frac{2}{3}} < (\frac{1}{2})^{\frac{1}{3}} < (\frac{1}{2})^{\frac{2}{3}}$

D. $(\frac{1}{5})^{\frac{2}{3}} < (\frac{1}{2})^{\frac{2}{3}} < (\frac{1}{2})^{\frac{1}{3}}$

(2) 下列函数中在$(-\infty, +\infty)$内是单调减少的是(　　).

A. $y = (\frac{4}{3})^x$　　B. $y = (\frac{3}{4})^x$

C. $y = 9^x$　　D. $y = 1.6^x$

(3) $\dfrac{\log_3 9}{\log_2 4}$ 的值是(　　).

A. 1　　B. $\dfrac{2}{3}$　　C. $\dfrac{3}{2}$　　D. 2

3. 比较下列两个数的大小：

(1) $(\frac{3}{4})^{-\frac{1}{3}}$ 与 $(\frac{3}{4})^{-\frac{1}{4}}$　　(2) $(-\frac{3}{5})^{-\frac{2}{5}}$ 与 $(-\frac{5}{6})^{-\frac{2}{5}}$

4. 化简：

(1) $\lg 1 + (\frac{1}{5})^0 + (64)^{-\frac{1}{3}}$

(2) $(\log_2 4 + \log_2 8)(\log_5 3 + \log_5 \frac{1}{3})$

5. 将 $y$ 表成 $x$ 的函数.

(1) $y = 3^u, u = v^2, v = 2x + 1$

(2) $y = e^u, u = \sin v, v = x^2 + 1$

6. 指出下列各复合函数的复合过程：

(1) $y = (\arccos\sqrt{x})^2$　　(2) $y = \ln(\tan e^{\frac{x}{2}})$

(3) $y = \sin e^{\sqrt{x}}$　　(4) $y = e^{\sin\frac{x}{2}}$

(5) $y = \arcsin\dfrac{1}{x}$　　(6) $y = \lg\sin\sqrt{1+x^2}$

## §12-3　函数的应用

### 一、内容提要

简单函数关系的建立，常用函数的作图.

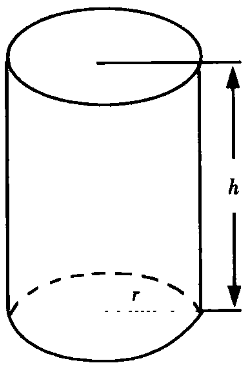


图 12-1

### 二、题型示例

**例 1**　某炼油厂要建造一个容积为 $V_0$ 的圆柱形油罐（如图 12-1），试建立表面积和底半径之间的函数关系.

**解**　显然，圆柱油罐的尺寸设计取决于其底半径和高，当圆柱容积给定后，底半径（设为 $r$）与高（设为 $h$）并没有随之而被完全确定，容易看出，油罐总表面积等于上下底面（都是半径为 $r$ 的圆）面积及侧面（长为 $2\pi r$，高为 $h$ 的矩形）面积之和：

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

由题意，容积是给定的，故 $r$ 与 $h$ 之间有下列约束关系

$\pi r^2 \cdot h = V_0$ 即 $h = V_0/\pi r^2$. 代入

$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ 中得 $S = 2\pi r^2 + 2V_0/r$.

这才是所求的函数关系式，其定义域为$(0, +\infty)$.

由此例可看出，建立函数关系时，首先应根据题意弄清哪些是常量，哪些是变量，哪个是自变量，哪个是因变量，然后根据题意建立要求的函数关系，最后指出该函数的定义域.

**例 2** 某运输公司规定一吨货物的运价为：在 $a$ 公里内每公里 $k$ 元，超过 $a$ 公里，每增加一公里为$\frac{4}{5}k$ 元. 试表示运价 $y$ 和里程 $s$ 之间的函数关系.

**解** 当里程在 $a$ 公里内$(0 \leqslant s \leqslant a)$，运价 $y = k \cdot s$.

当里程超过 $a$ 公里$(s > a)$，则超过的里程为$(s - a)$ 公里，

此时运价为 $y = ka + \frac{4}{5}k(s - a)$，于是

$$y = \begin{cases} ks & 0 \leqslant s \leqslant a \\ ka + \frac{4}{5}k(s-a) & s > a \end{cases}$$ 其定义域为$[0, +\infty)$.

**例 3** 作下列函数的图像：

(1)$y = 2^{x-1} - 2$

(2)$y = \log_2(-x)$

**解** (1) 先作 $y = 2^x$ 的图像.

然后把 $y = 2^x$ 的图像往右平移 1 个单位，得 $y = 2^{x-1}$ 的图像.

最后把 $y = 2^{x-1}$ 的图像向下平移 2 个单位

得 $y = 2^{x-1} - 2$ 的图像，如图 12-2.

(2) 作 $y = \log_2 x$ 的图像关于 $y$ 轴的对称图像，如图 12-3.

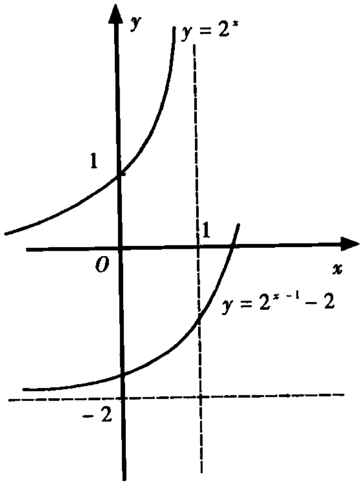


图 12-2

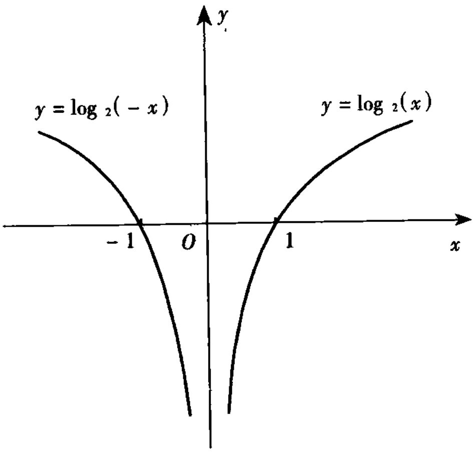


图 12-3

## 习题 12-3

1. 设一矩形，长为 $x$，面积为 $A$，周长为 $S$.

(1) 若已知面积 $A$ 一定，将周长 $S$ 表为 $x$ 的函数.