21 世纪高等院校经典教材同步辅导
ERSHIYISHIJIGAODENGYUANXIAOJINGDIANJIAOCAITONGBUFUDAO

微积分

同济第三版

全程导学及习题全解（上册）

主　编　杨　萩　副主编　林一强　苗　璐　主　审　黄　江

中国时代经济出版社

微积分

同济第三版

全程导学及习题全解（上册）

中国时代经济出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分(同济第三版)全程导学及习题全解. 上册 / 杨蕤主编.
— 北京 : 中国时代经济出版社，2011.9
(21 世纪高等院校经典教材同步辅导)
ISBN 978-7-5119-0947-3
Ⅰ.①微…　Ⅱ.①杨…　Ⅲ.①微积分 - 高等学校 -
教学参考资料　Ⅳ.①O172
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 149243 号

书　　名：微积分(同济第三版)全程导学及习题全解. 上册
出 版 人：王鸿津
作　　者：杨　蕤
出版发行：中国时代经济出版社
社　　址：北京市丰台区玉林里 25 号楼
邮政编码：100078
发行热线：(010)83910219
传　　真：(010)68320584
邮购热线：(010)88361317
网　　址：www.cmepub.com.cn
电子邮箱：zgsdjj@hotmail.com
经　　销：各地新华书店
印　　刷：北京市优美印刷有限责任公司
开　　本：787 × 1092　1/16
字　　数：320 千字
印　　张：17.625
版　　次：2011 年 9 月第 1 版
印　　次：2011 年 9 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 978-7-5119-0947-3
定　　价：30.00 元

内容提要

本书是同济大学数学系编《微积分》(第三版上册)教材的配套学习辅导及习题解答教材。编写的重点在于原教材中各章节全部习题的精解详答,并对典型习题做了很详细的分析和提纲挈领的点评,思路清晰,逻辑缜密,循序渐进的帮助读者分析并解决问题,内容详尽,简明易懂。本书对各章的知识点进行了归纳和提炼,帮助读者梳理各章脉络,统揽全局。在《微积分》教材习题的基础上,根据每章的知识重点,精选了有代表性的例题,方便读者迅速掌握各章的重点和难点。

本书是在《微积分》(第二版)题解的基础上修订完成的。《微积分》第三版教材对原习题做了增加和删减。为了便于读者学习和使用教材,本书将第三版新增的习题解加以增补,特别是有关计算机辅助计算的习题,给出了详细的解答,对于第二版中的原有习题,本书也全部保留,对第三版教材中删除的习题,本书将其做为补充题或加 *,放在每一章节之后,供读者参考。

本书可作为工科各专业本科学生《微积分》课程教学辅导材料和复习参考用书及工科考研强化复习的指导书。也可以作为《微积分》课程教师的教学参考书。

前　言

《微积分》是解决工科数学问题和工程实际问题的重要理论基础和实用工具，也是工科各专业研究生入学考试的内容。为了帮助广大学生更好的学习和掌握《微积分》课程的理论精髓和解题方法，我们根据同济大学应用数学系编写的《微积分》教材，编写了这本辅导资料。

本辅导教材根据同济大学数学系编写的《微积分》教材中各章的内容，着重编写了以下几方面的内容：

知识点概要：精练了各章中的主要知识点，理清各知识点之间的脉络联系，囊括了主要定理及相关推论，重要公式和解题技巧等，帮助读者融会贯通，系统理解各章的体系结构，奠定扎实的理论基础。

典型例题讲解：精选具有代表性的重点习题进行讲解，分析问题的突破点，指引解决问题的思路，旨在帮助读者培养独立思考的方式和分析问题的方法。

习题全解：依据教材各章节的习题，进行详尽的解答。考虑到不同层次读者的需求，在解答过程中，对于重点和难点习题进行了分析和讲解，归纳解题技巧。

本次编写中，我们对所有习题给出了详细的解答，特别是有关计算机辅助计算的习题。对于第二版中原有的习题，全部保留。我们将第三版中删除的习题做为补充题或加 *，入在每章节之后，供读者参考。

本教材由杨蕤、林一强、苗璐等编写，全书由黄江老师主审。本书编写过程中得到杨晓叶、潘大伟、任卉、谢婧等的大力协助，并得到中国时代经济出版社的领导和有关编辑的大力支持，为此表示忠心的感谢！

对《微积分》教材作者同济大学应用数学系的老师们，表示衷心的感谢！

由于编者水平有限，加之时间仓促，本书难免有缺点和疏漏，这些不妥之处，敬请各位专家及广大读者批评指正。

编　者

2011 年 8 月

目　录

预备知识

知识点概要

1. **集合**

(1)概念　事物组成的总体.

(2)元素　组成集合的事物.

(3)分类(按元素个数)　有限集,无限集.

(4)特殊集合的表示方法

实数集	$\mathbf{R}$	正实数集	$\mathbf{R}^+$
自然数集	$\mathbf{N}$	空集	$\mathbf{\Phi}$
整数集	$\mathbf{Q}$	负整数集	$\mathbf{Q}^-$
复数集	$\mathbf{C}$	除 0 复数集	$\mathbf{C}^*$

2. **集合的运算**

(1)并集　$A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$;

(2)交集　$A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$;

(3)差集　$A\backslash B=\{x|x\in A$ 且 $x\notin B\}$;

(4)余集　$A^C=\{x|x\in I, I$ 为余集,且 $x\notin A\}$;

(5)集合运算律

①交换律　$A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$;

②结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C), (A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

③分配律　$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C), A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;

④对偶律　$(A\cup B)^C=A^C\cap B^C, (A\cap B)^C=A^C\cup B^C$.

(6)直积(笛卡尔积)　$A\times B=\{(a,b)|a\in A, b\in B\}$.

3. **区间和邻域**

(1)开区间　$(a,b)=\{x|a<x<b\}$.

(2)闭区间　$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$.

(3)半开半闭区间　$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$.

(4)半闭半开区间　$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$.

(5)无穷区间　$[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\}, (-\infty,a)=\{x|x<a\}$.

(6)邻域　$U(a,\delta)=\{x|a-\delta<x<a+\delta\}$.

(7)去心邻域　$\dot{U}(a,\delta)=\{x|0<|x-a|<\delta\}$.

4. **映射**

(1)函数的三要素　定义域,值域,对应法则.

(2)满射

(3)单射

(4)一一映射(一一对应)

(5)逆映射　只有一一映射才是可逆映射.

(6)复合映射

5. **一元函数**

(1)函数的表示法　表格法、图形法、解析法.

(2)自然定义域

(3)分段函数

6. **函数性质**

(1)有界性　$\exists M>0,\forall x\in X$,满足$|f(x)|\leqslant M$. f在X上有界:$f\in B(X)$.

(2)单调性　递增:$\forall x_1,x_2\in X,x_1<x_2$时,$f(x_1)<f(x_2)$.

递减:$\forall x_1,x_2\in X,x_1<x_2$时,$f(x_1)>f(x_2)$.

(3)奇偶性

①偶函数　$\forall x\in D,f(x)=f(-x)$.偶函数关于$y$轴对称.

②奇函数　$\forall x\in D,f(x)=-f(-x)$.奇函数关于原点对称.

(4)周期性　$\exists T\neq 0,\forall x\in D$,有$x\pm T\in D$,且$f(x+T)=f(x)$.

(5)反函数　原函数与反函数的图形在同一坐标平面内关于直线$y=x$对称.

(6)复合函数

(7)函数的运算　和、差、积、商、线性组合.

7. **基本初等函数**

(1)幂函数	$y=x^a$	(a为常数)
(2)指数函数	$y=a^x$	($a>0$且$a\neq 1$)
(3)对数函数	$y=\log_a x$	(a是常数且$a>0,a\neq 1$)
(4)三角函数	$y=\sin x$	$y=\cos x$
	$y=\tan x$	$y=\cot x$
	$y=\sec x$	$y=\csc x$
(5)反三角函数	$y=\arcsin x$	$y=\arccos x$
	$y=\arctan x$	$y=\operatorname{arccot} x$
	$y=\operatorname{arcsec} x$	$y=\operatorname{arccsc} x$

8. **初等函数**

(1)概念

(2)双曲函数及其反函数

$$y=\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},y=\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

$$y=\tanh x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}},y=\coth x=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$$

$$y=\operatorname{arsinh} x=\ln(x+\sqrt{x^2+1}),y=\operatorname{arcosh} x=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$$

$$y=\operatorname{artanh} x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

习题全解

1. 设 $A=\{x|\sqrt{1-x^2}\leqslant1\}$、$B=\{x|0<x<2\}$是实数域中的两个子集，写出 $A\cup B$、$A\cap B$、$A\backslash B$ 及 $B\backslash A$ 的表达式.

解：$A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}=\{x|\sqrt{1-x^2}\leqslant1$ 或 $0<x<2\}=\{x||x|\leqslant1$ 或 $0<x<2\}$
$=\{x|-1\leqslant x\leqslant1$ 或 $0<x<2\}=\{x|-1\leqslant x<2\}=[-1,2)$.

$A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}=\{x|-1\leqslant x\leqslant1$ 且 $0<x<2\}=\{x|0<x\leqslant1\}=(0,1]$.

$A\backslash B=\{x|x\in A$ 且 $x\notin B\}=\{x|-1\leqslant x\leqslant0\}=[-1,0]$.

$B\backslash A=\{x|x\in B$ 且 $x\notin A\}=\{x|1<x<2\}=(1,2)$.

2. 两个集合 A 与 B 之间如果存在一一对应，则称集合 A 与 B 等势. 例如，设 A 是正奇数集合，B 是正偶数集合，如果定义从 A 到 B 的映射 $T:T(2n+1)=2n+2$，其中 n 为任一自然数，则 T 是 A 与 B 之间的一一对应，因此这两个集合等势. 试说明下列数集是等势的：

(1)整数集合 $\mathbf{Z}$ 与自然数集 $\mathbf{N}$；

(2)区间(1,2)与区间(3,5).

解：(1)$T(x)=\begin{cases}2x & x\geqslant0\text{ 且 }x\text{ 为整数.}\\1-2x & x<0\text{ 且 }x\text{ 为整数.}\end{cases}$

且 $T:\mathbf{Z}\to\mathbf{N}$ 且 T 为一一映射. 整数集合 $\mathbf{Z}$ 与自然数集 $\mathbf{N}$ 等势.

(2)$T(x)=2x+1,x\in(1,2)$

则 $T:(1,2)\to(3,5)$，且 T 为一一映射. 所以区间(1,2)与区间(3,5)等势.

3. 求下列函数的自然定义域：

(1)$y=\dfrac{1}{x+2}$；　　(2)$y=\sqrt{x^2-9}$；

(3)$y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+1}$；　　(4)$y=\dfrac{1}{[x+1]}$.

解：(1)$D=\{x|x+2\neq0\}=\{x|x\neq-2\}=(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)$.

(2)$D=\{x|x^2-9\geqslant0\}=\{x|x\geqslant3$ 或 $x\leqslant-3\}=(-\infty,-3]\cup[3,+\infty)$.

(3)$D=\{x|1-x^2\neq0$ 且 $x+1\geqslant0\}=\{x|x\neq\pm1$ 且 $x\geqslant-1\}=(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

(4)$D=\{x|[x+1]\neq0\}=\{x|x+1<0$ 或 $x+1\geqslant1\}=(-\infty,-1)\cup[0,+\infty)$.

4. 下列函数 f 和 φ 是否相同？为什么？

(1)$f(x)=\dfrac{x}{x},\varphi(x)=1$；　　(2)$f(x)=x,\varphi(x)=\sqrt{x^2}$；

(3)$f(x)=1,\varphi(x)=\sin^2x+\cos^2x$；　　(4)$f(x)=1,\varphi(x)=\sec^2x-\tan^2x$.

解：(1)$D(f)=\{x|x\neq0\},D(\varphi)=\mathbf{R}$

因为 $D(f)\neq D(\varphi)$，所以函数 f 与 φ 不相同.

(2)$D(f)=\mathbf{R},D(\varphi)=\{x|x^2\geqslant0\}=\mathbf{R}$

$\varphi(x)=\sqrt{x^2}=|x|\geqslant0$

因为函数 f 与 φ 的值域不相同,所以函数 f 与 φ 不相同.

(3)$D(f)=\mathbf{R}$,$D(\varphi)=\mathbf{R}$

$\varphi(x)=\sin^2 x+\cos^2 x=1=f(x)$

所以函数 f 与 φ 相同.

(4)$D(f)=\mathbf{R}$

$D(\varphi)=\{x|\cos x\neq 0\}=\{x|x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$

因为 $D(f)\neq D(\varphi)$,所以函数 f 与 φ 不相同.

注意:在讨论函数是否相同时,应分别考察定义域,值域和对应法则是否相同.

5. 讨论下列函数的奇偶性:

(1)$y=x+x^2-x^3$; (2)$y=a+b\cos x$;

(3)$y=x+\sin x+e^x$; (4)$y=x\sin\frac{1}{x}$.

解:(1)$f(x)=x+x^2-x^3$

$D(f)=\mathbf{R}$

$f(-x)=-x+(-x)^2-(-x)^3=-x+x^2+x^3$

因为 $f(-x)\neq f(x)$ 且 $f(-x)\neq -f(x)$,所以 $y=x^2+x^2-x^3$ 是非奇非偶函数.

(2)$f(x)=a+b\cos x$

$D(f)=\mathbf{R}$

因为 $f(-x)=a+b\cos(-x)=a+b\cos x=f(x)$,所以 $y=a+b\cos x$ 是偶函数.

(3)$f(x)=x+\sin x+e^x$,

$D(f)=\mathbf{R}$

因为 $f(-x)=(-x)+\sin(-x)+e^{-x}=-x-\sin x+e^{-x}$,$f(-x)\neq f(x)$ 且 $f(-x)\neq -f(x)$

所以 $y=x+\sin x+e^x$ 是非奇非偶函数.

(4)$f(x)=x\sin\frac{1}{x}$

$D(f)=\{x|x\neq 0,x\in\mathbf{R}\}$

因为 $f(-x)=(-x)\sin\frac{1}{(-x)}=x\sin\frac{1}{x}=f(x)$,所以 $y=x\sin\frac{1}{x}$ 是偶函数.

注意:判断函数奇偶性时,考察定义域是否关于原点对称是一个很重要的步骤.在定义域满足条件的前提下再去判断函数 $f(-x)$ 的性质.

6. 证明:两个偶函数之积是偶函数,两个奇函数之积是偶函数;一个奇函数与一个偶函数之积是奇函数.

证明:(1)若 $f(x)$,$g(x)$ 均为偶函数,则 $\forall x\in D$

$f(-x)=f(x)$,$g(-x)=g(x)$

则 $h(x)=f(x)g(x)$ 的定义域关于原点对称,且

$h(-x)=f(-x)g(-x)=f(x)g(x)=h(x)$

所以两个偶函数之积是偶函数.

(2)若 $f(x)$,$g(x)$ 均为奇函数,则

$f(-x)=-f(x)$,$g(-x)=-g(x)$

由 $h(x)=f(x)g(x)$ 的定义域关于原点对称,且

$h(-x)=f(-x)g(-x)=f(x)g(x)=h(x)$

所以两个奇函数之积是奇函数.

(3)若 $f(x)$ 为偶函数, $g(x)$ 为奇函数,则

$f(-x)=f(x), g(-x)=-g(x)$

则 $h(x)=f(x)g(x)$ 的定义域关于原点对称,且

$h(-x)=f(-x)g(-x)=f(x)[-g(x)]=-h(x)$

所以一个奇函数与一个偶函数之积是奇函数.

7. 设 $f(x)$ 是定义在对称区间 $(-l,l)$ 上的任何函数,证明:

(1) $\varphi(x)=f(x)+f(-x)$ 是偶函数, $\psi(x)=f(x)-f(-x)$ 是奇函数,

(2)定义在区间 $(-l,l)$ 上的任何函数可以表示为一个偶函数与一个奇函数的和.

证明:(1)因为 $\varphi(x)=f(x)+f(-x), \psi(x)=f(x)-f(-x)$,

所以 $D(\varphi)=D(\psi)=D(f)=(-l,l)$

$\varphi(-x)=f(-x)+f(x)=f(x)+f(-x)=\varphi(x)$

$\psi(-x)=f(-x)-f(x)=-[f(x)-f(-x)]=-\psi(x)$

所以 $\varphi(x)=f(x)+f(-x)$ 是偶函数, $\psi(x)=f(x)-f(-x)$ 是奇函数.

(2)由前题,知 $\varphi(x)$ 是偶函数, $\psi(x)$ 为奇函数,

则 $f(x)=\frac{1}{2}[\varphi(x)+\psi(x)]=\frac{1}{2}\varphi(x)+\frac{1}{2}\psi(x)$

且 $\frac{1}{2}\varphi(x)$ 仍为偶函数, $\frac{1}{2}\psi(x)$ 仍为奇函数

所以定义在区间 $(-l,l)$ 上的任何函数可以表示为一个偶函数与一个奇函数的和.

8. 证明:

(1)两个单调增加(单调减少)的函数之和是单调增加(单调减少)的;

(2)两个单调增加(单调减少)的正值函数之积是单调增加(单调减少)的;

(3)两个单调增加的函数的复合函数是单调增加的. 又问两个单调减少的函数的复合函数情况如何?

证明:(1)设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是单调增加的函数,则

$\forall x_1, x_2 \in D$,若 $x_1<x_2$,

则 $f(x_1)<f(x_2), g(x_1)<g(x_2)$

令 $h(x)=f(x)+g(x)$

$h(x_1)-h(x_2)=[f(x_1)+g(x_1)]-[f(x_2)+g(x_2)]=[f(x_1)-f(x_2)]+[g(x_1)-g(x_2)]<0$

即 $h(x_1)<h(x_2)$,所以两个单调增加的函数之和是单调增加的;

同理可证,两个单调减少的函数之和是单调减少的.

(2)若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是单调增加的正值函数,则

$\forall x_1, x_2 \in D$,若 $x_1<x_2$,

则 $f(x_2)>f(x_1)>0, g(x_2)>g(x_1)>0$

令 $h(x)=f(x)g(x)$,

$$\begin{aligned} h(x_2)-h(x_1)&=f(x_2)g(x_2)-f(x_1)g(x_1) \\ &=[f(x_2)g(x_2)-f(x_2)g(x_1)]+[f(x_2)g(x_1)-f(x_1)g(x_1)] \\ &=f(x_2)[g(x_2)-g(x_1)]+g(x_1)[f(x_2)-f(x_1)]>0 \end{aligned}$$

即 $h(x_2)>h(x_1)$

所以两个单调增加的正值函数之积是单调增加的;

同理可证,两个单调减少的正值函数之积是单调减少的.

(3)若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是单调增加的函数,则

$\forall x_1,x_2\in D$,若 $x_1<x_2$,

则 $f(x_1)<f(x_2),g(x_1)<g(x_2)$,

令 $h(x)=f[g(x)]$,

则 $h(x_2)-h(x_1)=f[g(x_2)]-f[g(x_1)]$

因为 $g(x_2)>g(x_1)$

所以 $f[g(x_2)]>f[g(x_1)]$

即 $h(x_2)>h(x_1)$

所以两个单调增加的函数的复合函数是单调增加的;

同理可证,两个单调减少的函数的复合函数是单调增加的.

9. 求下列函数的反函数及反函数的定义域:

(1)$y=\sqrt{1-x^2}(-1\leqslant x\leqslant 0)$;　　(2)$y=\begin{cases}x^3 & 当-\infty<x<1,\\ 2^{x-1} & 当 1\leqslant x<+\infty.\end{cases}$

解:(1)$y=\sqrt{1-x^2}(-1\leqslant x\leqslant 0)$是一一映射,故存在反函数

所以 $y^2=1-x^2,x=-\sqrt{1-y^2}$

又因为 $x\in[-1,0]$时,$y\in[0,1]$

所以反函数为 $y=-\sqrt{1-x^2}$,定义域为$[0,1]$.

(2)$y=\begin{cases}x^3 & 当-\infty<x<1\\ 2^{x-1} & 当 1\leqslant x<+\infty\end{cases}$是一一映射,故存在反函数

当$-\infty<x<1$ 时,$y=x^3$,

所以 $y\in(-\infty,1),x=\sqrt[3]{y}$

当 $1\leqslant x<+\infty$时,$y=2^{x-1}$,

所以 $y\in[1,+\infty),x=\log_2 y+1$,

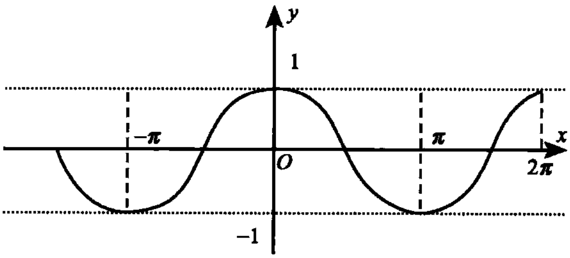
所以反函数为 $y=\begin{cases}\sqrt[3]{x} & -\infty<x<1\\ \log_2 x+1 & 1\leqslant x<+\infty\end{cases}$,定义域为 $\mathbf{R}$.

10. 作出下列函数的图形:

(1)$y=\mathrm{sgn}(\cos x)$;　　(2)$y=x-[x]$.

解:(1)因为 $y=\mathrm{sgn}(\cos x)$,

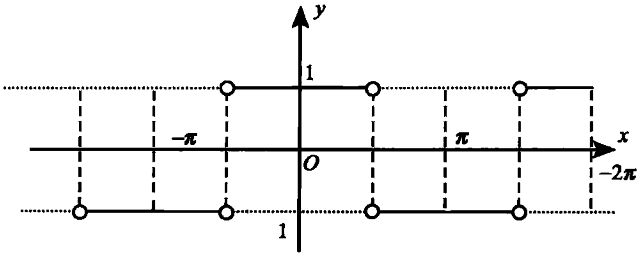
所以作 $y=\cos x$ 的图形,如图题 0—1—10(a).



图题 0—1—10(a)

因为 $y=\mathrm{sgn}\,x=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0,\\ -1 & x<0\end{cases}$

则 $y=\mathrm{sgn}(\cos x)$的图形如图题 0—1—10(b)所示.



图题 0−1−10(b)

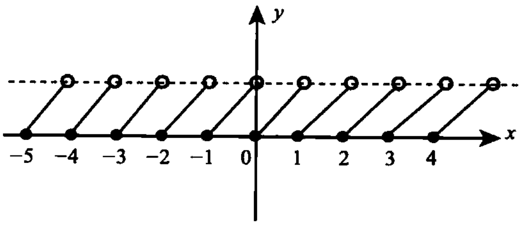
(2)$y=x-[x]$ （设 $k\in\mathbf{Z},0<c<1$）

当 $x=k$ 时，$[x]=x,y=0$

当 $x=k+c$ 时，$[x]=k,y=c$

所以 $y=\begin{cases}0 & x=k\\ c & x=k+c,\end{cases}k\in\mathbf{Z},\quad 0<c<1$

则 $y=x-[x]$图形如图题 0−1−10(c)所示.



图题 0−1−10(c)

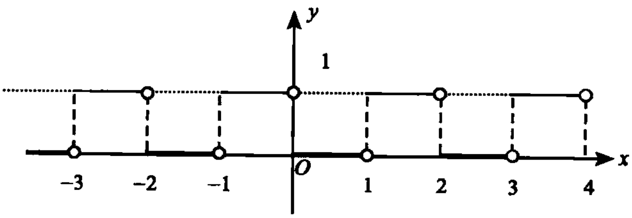
*（补充）若 $y=[x]-2[\frac{x}{2}]$，作图.

当 $2k\leqslant x<2k+1$ 时，$[x]=2k,[\frac{x}{2}]=k$，此时 $y=0$

当 $2k+1\leqslant x<2k+2$ 时，$[x]=2k+1,[\frac{x}{2}]=k$，此时 $y=1$

所以 $y=\begin{cases}0 & 2k\leqslant x<2k+1,\\ 1 & 2k+1\leqslant x<2(k+1),\end{cases}k\in\mathbf{Z}$

所以 $y=[x]-2[\frac{x}{2}]$的图形如图题 0−1−10(d)所示.



图题 0−1−10(d)

11. 给定函数$y=f(x),x\in(-\infty,+\infty)$,令

$$f_1(x)=-f(x);f_2(x)=f(-x);f_3(x)=-f(-x).$$

说明函数 $y=f_1(x),y=f_2(x),y=f_3(x)$的图形与 $y=f(x)$的图形的位置关系.

解:因为 $f_1(x)=-f(x),x\in(-\infty,+\infty)$

所以 $y=f_1(x)$的图形与 $y=f(x)$的图形关于 x 轴对称.

因为 $f_2(x)=f(-x),x\in(-\infty,+\infty)$

所以 $y=f_2(x)$的图形与 $y=f(x)$的图形关于 y 轴对称.

因为 $f_3(x)=-f(-x),x\in(-\infty,+\infty)$

所以 $y=f_3(x)$的图形与 $y=f(x)$的图形关于原点对称.

12. 证明:

(1)$\sinh x+\sinh y=2\sinh\frac{x+y}{2}\cosh\frac{x-y}{2}$;

(2)$\cosh x-\cosh y=2\sinh\frac{x+y}{2}\sinh\frac{x-y}{2}$.

证明:(1)因为 $\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\cosh y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$,

$$\text{所以 }2\sinh\frac{x+y}{2}\cosh\frac{x-y}{2}=2\cdot\frac{e^{\frac{x+y}{2}}-e^{-\frac{x+y}{2}}}{2}\cdot\frac{e^{\frac{x-y}{2}}+e^{\frac{y-x}{2}}}{2}$$

$$=\frac{1}{2}(e^{\frac{x+y}{2}}\cdot e^{\frac{x-y}{2}}-e^{-\frac{x+y}{2}}\cdot e^{\frac{x-y}{2}}+e^{\frac{x+y}{2}}\cdot e^{\frac{y-x}{2}}-e^{-\frac{x+y}{2}}\cdot e^{\frac{y-x}{2}})$$

$$=\frac{1}{2}(e^x-e^{-y}+e^y-e^{-x})=\frac{e^x-e^{-x}}{2}+\frac{e^y-e^{-y}}{2}=\sinh x+\sinh y$$

所以得证.

(2)因为 $\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$

$$\text{所以 }2\sinh\frac{x+y}{2}\sinh\frac{x-y}{2}=2\cdot\frac{e^{\frac{x+y}{2}}-e^{-\frac{x+y}{2}}}{2}\cdot\frac{e^{\frac{x-y}{2}}-e^{\frac{y-x}{2}}}{2}$$

$$=\frac{1}{2}(e^{\frac{x+y}{2}}\cdot e^{\frac{x-y}{2}}-e^{-\frac{x+y}{2}}\cdot e^{\frac{x-y}{2}}-e^{\frac{x+y}{2}}\cdot e^{\frac{y-x}{2}}+e^{-\frac{x+y}{2}}\cdot e^{\frac{y-x}{2}})$$

$$=\frac{1}{2}(e^x-e^{-y}-e^y+e^{-x})=\frac{e^x+e^{-x}}{2}-\frac{e^y+e^{-y}}{2}=\cosh x-\cosh y$$

所以得证.

13. 设 $f(x)=\begin{cases}1 & \text{当}|x|<1,\\ 0 & \text{当}|x|=1,\\ -1 & \text{当}|x|>1,\end{cases}$ $g(x)=e^x$, 求 $f[g(x)]$和 $g[f(x)]$,并作出这两个函数的图形.

解:因为

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{当}|x|<1\\ 0 & \text{当}|x|=1,g(x)=e^x,\\ -1 & \text{当}|x|>1\end{cases}$$

所以

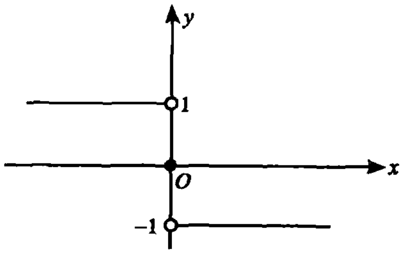
$$f[g(x)]=\begin{cases}1 & (|e^x|<1)\\ 0 & (|e^x|=1)\\ -1 & (|e^x|>1)\end{cases}=\begin{cases}1 & (x<0)\\ 0 & (x=0)\\ -1 & (x>0)\end{cases}$$

所以

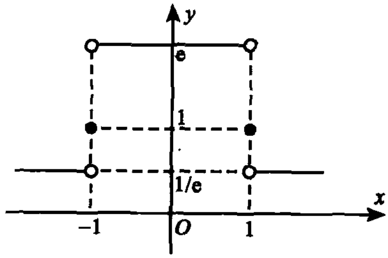
$$g[f(x)]=\begin{cases}e & \text{当}|x|<1\\ 1 & \text{当}|x|=1\\ \frac{1}{e} & \text{当}|x|>1\end{cases}$$

函数 $y=f[g(x)]$ 的图形如图题 0—1—13(a)所示，

函数 $y=g[f(x)]$ 的图形如图题 0—1—13(b)所示.



图题 0—1—13(a)



图题 0—1—13(b)

14. (1)设 $f(x-2)=x^2-2x+3$，求 $f(x+2)$；

(2)设 $f\left(\sin\frac{x}{2}\right)=1+\cos x$，求 $f(\cos x)$.

解：(1)因为 $f(x-2)=x^2-2x+3=(x-2)^2+2(x-2)+3$

所以 $f(x)=x^2+2x+3$

所以 $f(x+2)=(x+2)^2+2(x+2)+3=x^2+6x+11$.

(2)因为 $f(\sin\frac{x}{2})=1+\cos x=2-2\sin^2\frac{x}{2}$

所以 $f(x)=2-2x^2$

所以 $f(\cos x)=2-2\cos^2 x=2\sin^2 x$.

注意：对自变量的不同形式求解函数表达式时，应先求出函数 y 关于自变量 x 的基本形式，然后整体进行变量替换.

15. 利用计算机作函数的图形时，必须注意选择好图形的显示区域. 若选择不好，则显示的图形不能充分表示出所作图形的特点，甚至可能因机器误差而产生变形，得出错误的图形. 试用 Mathematica 在计算机上作下列图形：

(1) $y=x^3-49x$，显示区域分别取作

(Ⅰ) $[-10,10]\times[-10,10]$；

(Ⅱ) $[-10,10]\times[-100,100]$；

(Ⅲ) $[-10,10]\times[-200,200]$，

试对显示的图形进行比较，哪一个能比较充分地反映所求作图形的特点？

(2) $y=\sin 50x$，显示区域分别取作

(Ⅰ) $[-12,12]\times[-1.5,1.5]$；

(Ⅱ) $[-9,9]\times[-1.5,1.5]$；

(Ⅲ) $[-0.25,0.25]\times[-1.5,1.5]$，

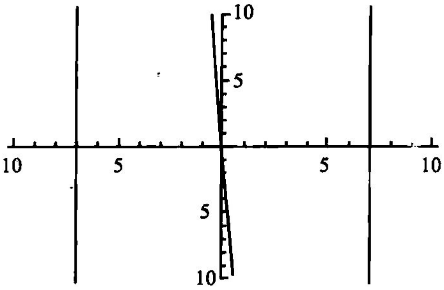
试对显示的图形进行比较，哪一个显示了真实的函数图形？

解：(1)作图 $y=x^3-49x$

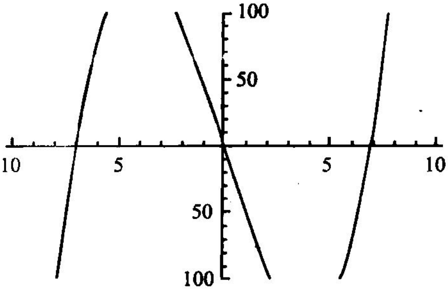
依次输入

```
Plot[x^3-49*x,{x,-10,10},PlotRange→{-10,10}]
Plot[x^3-49*x,{x,-10,10},PlotRange→{-100,100}]
Plot[x^3-49*x,{x,-10,10},PlotRange→{-200,200}]
```

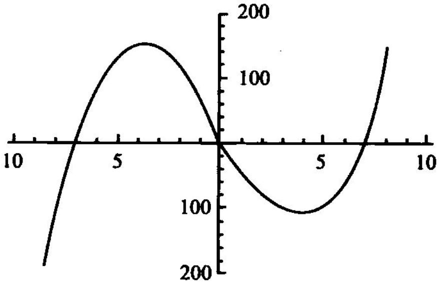
得到图形：见图 0—1—15(a)～15(c).



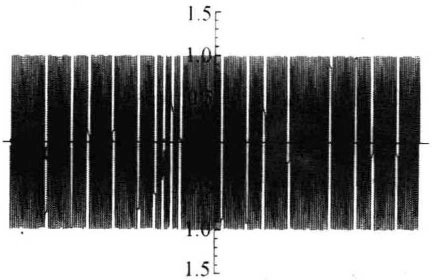
图题 0—1—15(a)



图题 0—1—15(b)



图题 0—1—15(c)



图题 0—1—15(d)

显然,在三个图中第三个图能最好地反映函数的特点.

(2)作图 $y=\sin 50x$

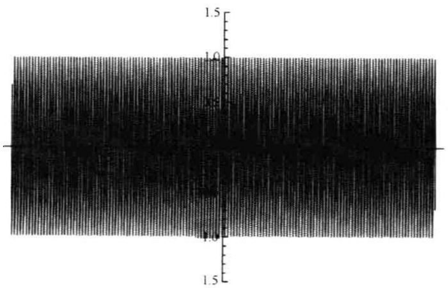
依次输入

Plot[Sin[50 * x],{x,—12,12},PlotRange→{—1.5,1.5}]

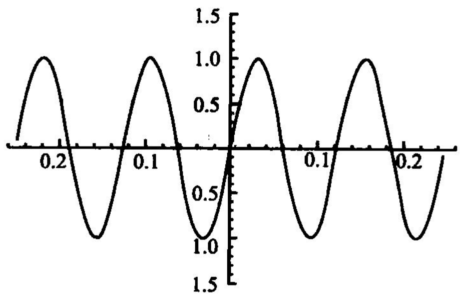
Plot[Sin[50 * x],{x,—9,9},PlotRange→{—1.5,1.5}]

Plot[Sin[50 * x],{x,—0.25,0.25},PlotRange→{—1.5,1.5}]

得到图形:见图 0—1—15(d)~15(f).



图题 0—1—15(e)



图题 0—1—15(f)

前两个图形显示了过多的周期,没法很好地表示出函数的特点;第三幅图则能清晰地表示出函数的真实图形.