中国科学院“十一五”规划教材配套用书

经·济·管·理·类·数·学·基·础·系·列

微积分
学习指导

党高学　潘黎霞 主编

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$$

中国科学院“十一五”规划教材配套用书
经济管理类数学基础系列

微积分学习指导

党高学　潘黎霞　主编

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书是中国科学院"十一五"规划教材《微积分》(科学出版社出版)的配套用书，是经济管理类数学基础系列之一.

书中各章内容与主教材同步，每章包括基本要求、内容提要、典型例题、教材习题选解、自测题及自测题参考答案六个部分. 本书内容丰富、思路清晰、例题典型，注重分析解题思路、揭示解题规律、引导读者思考问题，对培养和提高学生的学习兴趣、增强分析问题和解决问题的能力有极大的作用.

本书适合经济管理类专业和其他相关专业的学生学习微积分课程时使用，也可供报考研究生的学生复习时使用.

图书在版编目(CIP)数据

微积分学习指导/党高学，潘黎霞主编. —北京：科学出版社，2011
中国科学院"十一五"规划教材配套用书·经济管理类数学基础系列
ISBN 978-7-03-031302-7

Ⅰ.①微… Ⅱ.①党…②潘… Ⅲ.①微积分-高等学校-教学参考资料
Ⅳ.①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 102829 号

责任编辑：相 凌 唐保军 / 责任校对：张 林
责任印制：张克忠 / 封面设计：华路天然工作室

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京市文林印务有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011 年 6 月第 一 版 开本：720×1000 1/16
2011 年 6 月第一次印刷 印张：22 1/4
印数：1—10 000 字数：490 000

定价：34.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

本书是中国科学院“十一五”规划教材《微积分》(科学出版社出版)的配套用书，是经济管理类数学基础系列中的一本，主要面向使用该教材的教师和学生，同时也可供报考研究生的学生作为复习用书.

全书以提高大学生的数学素养、领会微积分基本概念和理论、掌握微积分的基本解题方法和思路为目的，精心编写而成. 书中包括教材的全部内容，共 10 章：函数及其图形、极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、多元函数微积分、无穷级数、微分方程初步及差分方程. 每章均有基本要求、内容提要、典型例题、教材习题选解、自测题及自测题参考答案六项内容.

基本要求，既是对学习内容的要求，也是学习的重点；内容提要，指明学习要点，对有关概念、性质和定理作了深入分析与归纳，以方便读者课后复习；典型例题，是在教材已有例题的基础上，进一步扩展了例题范围，通过对典型例题的深入分析和详尽解答，帮助读者弄懂基本概念、提高分析能力、熟悉解题方法、掌握解题技巧；教材习题选解，针对教材中部分有一定特点或难度较大的习题，给以详细的解答，解决读者在学习课程时遇到的困难；自测题及自测题参考答案，是对本章学习内容的进一步扩展，有针对性地给出了一些综合练习题，同时提供参考答案，以帮助读者增强自主学习的能力.

书的最后附有模拟试题及参考答案，以方便读者考试前进行总复习.

本书由党高学、潘黎霞主编. 第 1、2 章由党高学编写；第 3、4 章由孟立平编写；第 5、6 章由马育英编写；第 7 章由张明军编写；第 8～10 章由潘黎霞编写. 全书由党高学和潘黎霞统稿定稿.

由于作者水平所限，书中难免有不足之处，恳请读者及专家学者批评指正.

作　者

2011 年 3 月

目　　录

第1章　函数及其图形

一、基本要求

(1) 理解函数的概念,会求函数的定义域与某些简单函数的值域.

(2) 理解函数的奇偶性、单调性、有界性和周期性.

(3) 理解反函数和复合函数的概念,会求反函数,会正确分析复合函数的复合过程.

(4) 熟悉基本初等函数及其图形,理解初等函数的概念.

(5) 熟悉经济中的5个常用函数以及它们之间的关系.

二、内容提要

1. 函数的定义

设 x,y 是两个变量,x 的取值范围是非空数集 D,f 是某个对应法则,如果对每一个 $x\in D$,按照此法则 f 都能确定唯一的一个 y 值与之对应,则称此对应法则 f 为定义于 D 上的**函数**,或称变量 y 是变量 x 的函数,记作

$$y=f(x),\quad x\in D,$$

x 称为**自变量**,y 称为**因变量**或函数,D 称为函数的**定义域**,常记作 D_f,D_f 中每个数 x 在 f 下的像 $f(x)$(即对应的 y 值),也称为函数在点 x 处的**函数值**,全体函数值的集合称为函数的**值域**,记为 R_f 或 $f(D)$,即

$$R_f=f(D)=\{y\mid y=f(x),x\in D_f\}.$$

平面点集 $\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D_f\}$ 称为函数 $f(x)$ 的图像. 确定函数的要素:定义域和对应法则.

2. 函数的几种特性

设 $y=f(x)$ 是一给定函数.

(1) 如果对所有的 $x\in D_f$,都有 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$ 是**偶函数**;其图形对称于 y 轴.

(2) 如果对所有的 $x\in D_f$,都有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$ 是**奇函数**;其图形对称于原点.

设 $f(x)$ 是一给定函数,区间 $I\subset D_f$,对区间 I 上任意两点 x_1,x_2,且 $x_1<x_2$,如果恒有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2)\quad (f(x_1)\geqslant f(x_2)),$$

则称 $f(x)$ 在区间 I 上**单调增加**(**单调减少**);如果恒有

$$f(x_1) < f(x_2) \quad (f(x_1) > f(x_2)),$$

则称 $f(x)$ 在区间 I 上**严格单调增加**(**严格单调减少**).单调增加或单调减少的函数统称为**单调函数**.区间 I 上的增(减)函数的图形是沿 x 轴正向上升(下降)的.

设 $f(x)$ 是一给定函数,区间 $I \subset D_f$,如果存在正常数 M,使对区间 I 上任一点 x,恒有

$$|f(x)| \leqslant M,$$

则称 $f(x)$ 在区间 I 上**有界**;如果这样的 M 不存在,则称 $f(x)$ 在区间 I 上**无界**.

对函数 $f(x)$,如果存在正常数 T,使对 D_f 内任意一点 x 都有

$$f(x+T) = f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**周期函数**,正常数 T 称为**周期**,把满足上式的最小正常数 T 称为函数的**最小正周期**或**基本周期**,简称**周期**.通常所说的周期一般指最小正周期.

3. 反函数与复合函数

设 $y=f(x)$ 是一给定函数,如果对每个 $y \in R_f$,都有唯一的一个满足 $y=f(x)$ 的 $x \in D_f$ 与之对应,则 x 也是 y 的函数,称此函数为原来函数 $y=f(x)$ 的**反函数**,记为 $x=f^{-1}(y)$,而把 $y=f(x)$ 称为**直接函数**,或说它们互为反函数.为与习惯一致,常将反函数改写为 $y=f^{-1}(x)$.

$y=f(x)$ 存在反函数的充分必要条件是 $y=f(x)$ 是一一对应的函数.严格单调是存在反函数的充分条件;$D_{f^{-1}}=R_f$;$R_{f^{-1}}=D_f$;$f^{-1}[f(x)]=x$;$f[f^{-1}(x)]=x$;$y=f^{-1}(x)$ 与 $y=f(x)$ 的图关于直线 $y=x$ 对称.而 $x=f^{-1}(y)$ 与 $y=f(x)$ 的图像则是同一条曲线.

设 y 是 u 的函数,$y=f(u)$,而 u 是 x 的函数,$u=\varphi(x)$.如果 $D_f \cap R_\varphi \neq \varnothing$,则 $y=f[\varphi(x)]$ 是定义于数集 $\{x \mid u=\varphi(x) \in D_f, x \in D_\varphi\}$ 上的函数,称此函数为由 $y=f(u)$ 与函数 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数,x 仍为自变量,y 仍为因变量,而 u 称为中间变量.

4. 初等函数

1) 基本初等函数

常数函数　$y=c$(c 为实常数);

幂函数　$y=x^\alpha$(α 为实常数);

指数函数　$y=a^x$($0<a\neq 1$);

对数函数　$y=\log_a x$($0<a\neq 1$);

三角函数　$y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$;

反三角函数　$y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\mathrm{arccot}\, x$.

2) 初等函数

由 6 种基本初等函数经过有限次的四则运算以及有限次的复合运算所得到的函数统称为**初等函数**.

5. 经济中的 5 个常用函数

设 Q 表示产量(或销售量或需求量),C 表示总成本(或总费用),R 表示总收入,P 表示价格,L 表示总利润.

总成本函数

$$C=C(Q)=C_0+C_1(Q),$$

其中,C_0 为固定成本,$C_1(Q)$为可变成本,$C(0)=C_0$. 平均成本为 $\bar{C}=\dfrac{C(Q)}{Q}$.

总收益函数　$R=R(Q)=P\cdot Q$.

总利润函数　$L=L(Q)=R(Q)-C(Q)$.

需求函数　$Q=f(P)$(增函数).

供应函数　$Q=\varphi(P)$(减函数).

需求-收益关系　若需求函数为 $Q=f(P)$,则收益为

$$R=P\cdot Q=P\cdot f(P)\quad 或 R=P\cdot Q=f^{-1}(Q)\cdot Q.$$

三、典型例题

例 1　求函数 $f(x)=\sqrt{2-|x|}+\dfrac{1}{\lg\cos x}$的定义域.

分析　函数的(自然)定义域就是使函数的解析表达式有意义的自变量 x 的集合. 往往归结为不等式组的解集合.

解

$$\begin{cases}2-|x|\geqslant 0,\\ \cos x>0,\\ \cos x\neq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2\leqslant x\leqslant 2,\\ 2k\pi-\dfrac{\pi}{2}<x<2k\pi+\dfrac{\pi}{2},\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots\\ x\neq 2k\pi.\end{cases}$$

所以 $D_f=\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

例 2　已知 $y=f(2^x)$的定义域为$[-1,1]$,求函数 $y=f(\log_2 x)+f(x-1)$的定义域.

分析　先由 $f(2^x)$的定义域求出 $f(x)$的定义域,再求所给函数的定义域.

解　因$-1\leqslant x\leqslant 1$,所以$\dfrac{1}{2}\leqslant 2^x\leqslant 2$,即 $f(x)$得定义域为$\left[\dfrac{1}{2},2\right]$. 再由

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}\leqslant \log_2 x\leqslant 2,\\ \dfrac{1}{2}\leqslant x-1\leqslant 2,\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}\sqrt{2}\leqslant x\leqslant 4,\\ \dfrac{3}{2}\leqslant x\leqslant 3.\end{cases}$$

所求定义域为$\left[\frac{3}{2},3\right]$.

例 3 设 $f(x)$的定义域为$[0,1]$,试求 $f(x+a)+f(x-a)$的定义域.

分析 所求定义域是不等式组$\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1,\\0\leqslant x-a\leqslant 1\end{cases}$的解集,即两个区间$[-a,1-a]$和$[a,1+a]$的交集. 当其中一个区间的两个端点中有一个在另一区间时交集非空,否则交集为空集.

解

$$\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1,\\0\leqslant x-a\leqslant 1.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-a\leqslant x\leqslant 1-a,\\a\leqslant x\leqslant 1+a.\end{cases}$$

当$-a\leqslant a\leqslant 1-a$,即 $0\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$时,定义域为$[a,1-a]$;

当$-a\leqslant 1+a\leqslant 1-a$,即$-\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant 0$ 时,定义域为$[-a,1+a]$;

当 $1+a<-a$ 或$a>1-a$ 时,即 $a<-\frac{1}{2}$或 $a>\frac{1}{2}$时,定义域均为空集.

例 4 已知 $f\left(\sin\frac{x}{2}\right)=1+\cos x$,求 $f\left(\cos\frac{x}{2}\right)$.

解法一 $f\left(\sin\frac{x}{2}\right)=1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}=2\left(1-\sin^2\frac{x}{2}\right)$,将两边的 $\sin\frac{x}{2}$换为 $\cos\frac{x}{2}$,得

$$f\left(\cos\frac{x}{2}\right)=2\left(1-\cos^2\frac{x}{2}\right)=2\sin^2\frac{x}{2}=1-\cos x.$$

解法二 $f\left(\cos\frac{x}{2}\right)=f\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)\right]=f\left(\sin\frac{\pi-x}{2}\right)=1+\cos(\pi-x)$
$=1-\cos x$.

例 5 设函数 $f(x)$满足方程.

$$af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=x\quad(|a|\neq|b|),$$

求 $f(x)$.

解 在原方程两边将 x 换为$\frac{1}{x}$,得

$$af\left(\frac{1}{x}\right)+bf(x)=\frac{1}{x}.$$

解方程组

$$\begin{cases}af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=x,\\af\left(\frac{1}{x}\right)+bf(x)=\frac{1}{x},\end{cases}$$

得

$$f(x)=\frac{1}{a^2-b^2}\left(ax-\frac{b}{x}\right).$$

例 6 证明：定义在对称区间$(-l,l)$内任何函数$f(x)$必可表示为一个偶函数和一个奇函数之和.

分析 先假设$f(x)$可表示为一个偶函数$H(x)$和一个奇函数$G(x)$之和，即

$$f(x)=H(x)+G(x),$$

则

$$f(-x)=H(-x)+G(-x)=H(x)-G(x),$$

联立方程组

$$\begin{cases}H(x)+G(x)=f(x),\\ H(x)-G(x)=f(-x),\end{cases}$$

可解出

$$H(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2},\quad G(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

证明 令

$$H(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)],\quad G(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)],$$

由

$$H(-x)=\frac{1}{2}[f(-x)+f(x)]=H(x)$$

知$H(x)$是偶函数；由

$$G(-x)=\frac{1}{2}[f(-x)-f(x)]=-\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]=-G(x)$$

知$G(x)$是奇函数. 且

$$f(x)=H(x)+G(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

例 7 $f(x)=|x\sin x|e^{\cos x}(-\infty<x<+\infty)$是(　　).

(A) 有界函数；　(B) 单调函数；　(C) 周期函数；　(D) 偶函数.

解 因为$f(-x)=|-x\sin(-x)|e^{\cos(-x)}=|x\sin x|e^{\cos x}=f(x)$，所以选(D).

例 8 设$f(x)$为奇函数，且对任何$x\in\mathbf{R}$，有

$$f(x+2)=f(x)+f(2),$$

已知$f(1)=a$，则

(1) 求$f(2)$与$f(5)$；

(2) 当a取何值时，$f(x)$以 2 为周期.

分析 (1) 仔细观察$f(x+2)=f(x)+f(2)$，即$f(2)=f(x+2)-f(x)$. 利用$f(x)$的奇偶性，当$x=-1$时，右边两项均可化为$f(1)$的式子，可得出$f(2)$，进而令$x=1$时可把$f(3)$化为$f(1)$与$f(2)$的表达式. 从而得到$f(3)$，再令$x=3$，可把$f(5)$化为$f(3)$与$f(2)$的表达式，从而得到$f(5)$.

(2) 根据周期函数的定义分析.

解 (1) 在

$$f(x+2)=f(x)+f(2) \tag{①}$$

中令$x=-1$，得

$$f(1)=f(-1)+f(2),$$

又 $f(-1)=-f(1)$，所以

$$f(2)=f(1)-f(-1)=2f(1)=2a.$$

在①中，令 $x=1$，得

$$f(3)=f(1)+f(2)=a+2a=3a;$$

在①中，令 $x=3$，得

$$f(5)=f(3)+f(2)=3a+2a=5a.$$

(2) 要使 $f(x)$ 以 2 为周期，须对任一 x 有

$$f(x+2)=f(x),$$

即

$$f(x+2)-f(x)=0.$$

但

$$f(x+2)-f(x)=f(2)=2a,$$

所以 $2a=0$，即 $a=0$.

例 9 设 $f(x)=\begin{cases}2x, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ x^2, & 1<x\leqslant 4,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}4x, & x\leqslant 2,\\ x-2, & x>2.\end{cases}$ 求 $f[g(x)]$ 与 $g[f(x)]$.

分析 求 $f[g(x)]$ 的方法是：在内函数 $g(x)$ 的每一段上，讨论使 $g(x)$ 的值落在外函数 $f(x)$ 的定义域各个段内的自变量 x 的取值范围. 在每个取值范围内将 $g(x)$ 代入 $f(x)$ 的相应表达式. 若某个范围是空集，则在该范围内 $f[g(x)]$ 无意义.

解 (1) 当 $x\leqslant 2$ 时，使 $g(x)=4x$ 的值落在外函数 $f(x)$ 的定义域的两段 $[-1,1]$ 和 $(1,4]$ 内的自变量 x 的取值范围分别为 $\begin{cases}x\leqslant 2,\\ -1\leqslant 4x\leqslant 1\end{cases}$ 的解集 $-\frac{1}{4}\leqslant x\leqslant \frac{1}{4}$ 和 $\begin{cases}x\leqslant 2,\\ 1<4x\leqslant 4\end{cases}$ 的解集 $\frac{1}{4}<x\leqslant 1$；

当 $x>2$ 时，使 $g(x)=x-2$ 的值落在 $[-1,1]$ 和 $(1,4]$ 内的自变量 x 的取值范围分别为不等式组 $\begin{cases}x>2,\\ -1\leqslant x-2\leqslant 1\end{cases}$ 的解集 $2<x\leqslant 3$ 及不等式组 $\begin{cases}x>2,\\ 1<x-2\leqslant 4\end{cases}$ 的解集 $3<x\leqslant 6$.

所以

$$f[g(x)]=\begin{cases}2\cdot(4x), & -\frac{1}{4}\leqslant x\leqslant\frac{1}{4},\\ (4x)^2, & \frac{1}{4}<x\leqslant 1,\\ 2\cdot(x-2), & 2<x\leqslant 3,\\ (x-2)^2, & 3<x\leqslant 6\end{cases}=\begin{cases}8x, & -\frac{1}{4}\leqslant x\leqslant\frac{1}{4},\\ 16x^2, & \frac{1}{4}<x\leqslant 1,\\ 2x-4, & 2<x\leqslant 3,\\ (x-2)^2, & 3<x\leqslant 6.\end{cases}$$

(2) 当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时，使 $f(x)=2x$ 的值落在外函数 $g(x)$ 的定义域内的两段 $(-\infty,2]$ 及 $(2,+\infty)$ 内的自变量 x 的取值范围分别是不等式组 $\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant 1,\\ 2x\leqslant 2\end{cases}$ 的解

集$-1\leqslant x\leqslant 1$及不等式组$\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant 1,\\ 2x>2\end{cases}$的解集空集$\varnothing$.

当$1<x\leqslant 4$时,使$f(x)=x^2$的值落在外函数$g(x)$的定义域内的两段$(-\infty, 2]$及$(2,+\infty)$内的自变量x的取值范围分别是不等式组$\begin{cases}1<x\leqslant 4,\\ x^2\leqslant 2\end{cases}$的解集$1<x\leqslant\sqrt{2}$及不等式组$\begin{cases}1<x\leqslant 4,\\ x^2>2\end{cases}$的解集$\sqrt{2}<x\leqslant 4$.

综上所述可得

$$g[f(x)]=\begin{cases}8x, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ 4x^2, & 1<x\leqslant\sqrt{2},\\ x^2-2, & \sqrt{2}<x\leqslant 4.\end{cases}$$

例 10(等额还本付息模型)　某人贷款a元,n月还清,采用每月等额还本付息法还贷,月利率为r,求每月还款额.

分析　此问题的关键是计算出每月还款后的剩余欠款,n月还清,则第n月还款后的剩余欠款为零.

解　设每月还款x元,y_k表示第k月还款后的剩余欠款.则

$$\begin{aligned}
&y_0=a,\\
&y_1=a(1+r)-x,\\
&y_2=[a(1+r)-x](1+r)-x=a(1+r)^2-x(1+r)-x,\\
&y_3=a(1+r)^3-x(1+r)^2-x(1+r)-x,\\
&\qquad\qquad\cdots\cdots\\
&y_n=a(1+r)^n-x(1+r)^{n-1}-\cdots-x(1+r)-x\\
&\quad=a(1+r)^n-x[1+(1+r)+\cdots+(1+r)^{n-1}]\\
&\quad=a(1+r)^n-x\cdot\frac{(1+r)^n-1}{r}.
\end{aligned}$$

由于$y_n=0$,则

$$a(1+r)^n-x\cdot\frac{(1+r)^n-1}{r}=0,$$

所以

$$x=\frac{ar(1+r)^n}{(1+r)^n-1}\quad(\text{元}).$$

例如,贷款$a=35$万元,10年$=120$月还清,月利率$3.465‰=0.003465$.则每月还款额:$x=\dfrac{350000\cdot 0.003465\cdot 1.003465^{120}}{1.003465^{120}-1}=3569.92$(元).

四、教材习题选解

(A)

4. 设$f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$,求$f(x)$.

解 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x^2+2+\frac{1}{x^2}\right)-2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$,

上式两边将 $x+\frac{1}{x}$ 换为 x 得

$$f(x)=x^2-2.$$

6. 求下列函数的定义域.

(6) $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{x^2-25}$.

解 $\begin{cases}\sin x\geqslant 0,\\ x^2-25\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2k\pi\leqslant x\leqslant(2k\pi+1)\pi & k=0,\pm1,\pm2,\cdots,\\ x\leqslant -5 \text{ 或 } x\geqslant 5\end{cases}$

$\Rightarrow -2\pi\leqslant x\leqslant -5$ 或 $2k\pi\leqslant x\leqslant(2k\pi+1)\pi$

$(k=1,\pm2,\cdots)$,

$$D_f=[-2\pi,-5]\cup\left(\bigcup_{\substack{k\in\mathbf{Z}\\ k\neq -1,0}}[2k\pi,(2k+1)\pi]\right).$$

12. 设 $f(3x-2)=\begin{cases}9x^2-12x, & \frac{2}{3}\leqslant x\leqslant 1,\\ 6x-4, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$ 求 $f(x)$.

解 令 $3x-2=t$,则 $x=\frac{t+2}{3}$,代入原式,得

$$f(t)=\begin{cases}9\cdot\left(\frac{t+2}{3}\right)^2-12\cdot\frac{t+2}{3}, & \frac{2}{3}\leqslant\frac{t+2}{3}\leqslant 1,\\ 6\cdot\frac{t+2}{3}, & 1<\frac{t+2}{3}\leqslant 2\end{cases}$$

$$=\begin{cases}t^2-4, & 0\leqslant t\leqslant 1,\\ 2t, & 1<t\leqslant 4,\end{cases}$$

即

$$f(x)=\begin{cases}x^2-4, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2x, & 1<x\leqslant 4.\end{cases}$$

13. 判断下列函数的奇偶性.

(7) $y=\begin{cases}x(1+x), & x<0,\\ x(1-x), & x\geqslant 0.\end{cases}$

解 $f(x)=\begin{cases}x(1+x), & x<0,\\ x(1-x), & x\geqslant 0.\end{cases}$

$$f(-x)=\begin{cases}-x(1-x), & -x<0,\\ -x(1+x), & -x\geqslant 0\end{cases}=\begin{cases}-x(1+x), & x\leqslant 0,\\ -x(1-x), & x>0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}-x(1+x), & x<0,\\ -x(1-x), & x\geqslant 0\end{cases}=-f(x),$$

所以 $f(x)$ 是奇函数.

(8) $F(x)=f(x)\left(\frac{1}{2^x+1}-\frac{1}{2}\right)$,其中 $f(x)$ 为 R 上的奇函数.

解 $F(-x)=f(-x)\left(\frac{1}{2^{-x}+1}-\frac{1}{2}\right)=-f(x)\left(\frac{2^x}{2^x+1}-\frac{1}{2}\right)$

$$=-f(x)\left(1-\frac{1}{2^x+1}-\frac{1}{2}\right)=f(x)\left(\frac{1}{2^x+1}-\frac{1}{2}\right)=F(x),$$

所以 $F(x)$是偶函数.

15. (1) 证明 $y=\frac{x}{1+x^2}$是有界函数.

证明 $\forall x\in\mathbf{R}$,有$|y|=\frac{|x|}{1+x^2}$. 因

$$1+x^2\geqslant 2\mid x\mid\geqslant\mid x\mid,$$

所以

$$\mid y\mid=\frac{\mid x\mid}{1+x^2}\leqslant 1,$$

故 $y=\frac{x}{1+x^2}$是有界函数.

17. 求下列函数的反函数.

(6) $y=\sin x, x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

解 $y=\sin x=\sin(\pi-x)$,因为$\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\pi$,则 $0\leqslant\pi-x\leqslant\frac{\pi}{2}$.

$$\pi-x=\arcsin y,\quad x=\pi-\arcsin y,$$

即

$$y=\pi-\arcsin x,\quad x\in[0,1].$$

(7) $y=\cos x, x\in[-\pi,0]$.

解法一 $D_f=[-\pi,0], R_f=[-1,1]$.

因为$-\pi\leqslant x\leqslant 0$,则

$$0\leqslant x+\pi\leqslant\pi,$$

$$y=\cos x=-\cos(x+\pi),\quad x+\pi=\arccos(-y),$$

$$x=-\pi+\arccos(-y)=-\pi+\pi-\arccos y=-\arccos y,$$

即

$$y=-\arccos x,\quad x\in[-1,1].$$

解法二 因为$-\pi\leqslant x\leqslant 0$,所以

$$0\leqslant -x\leqslant\pi.$$

$$y=\cos x=\cos(-x),\quad -x=\arccos y,$$

即

$$y=-\arccos x,\quad x\in[-1,1].$$

(8) $y=\begin{cases}-x^2-1, & -2<x<0,\\ \sqrt{1-x^2}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2^{x-1}, & x>1.\end{cases}$

解 当$-2<x<0$ 时,

$$y=-x^2-1\in(-5,-1),\quad x=-\sqrt{-y-1},$$

即

$$y=-\sqrt{-x-1},\quad x\in(-5,-1);$$

当$0\leqslant x\leqslant 1$时，

$$y=\sqrt{1-x^2}\in[0,1],\quad x=\sqrt{1-y^2},$$

即

$$y=\sqrt{1-x^2},\quad x\in[0,1];$$

当$x>1$时，

$$y=2^{x-1}\in(1,+\infty),\quad x=\log_2 y+1,$$

即

$$y=\log_2 x+1,\quad x\in(1,+\infty).$$

所以反函数为

$$y=\begin{cases}-\sqrt{-x-1}, & -5<x<-1,\\ \sqrt{1-x^2}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ \log_2 x+1, & x>1.\end{cases}$$

21. 某产品的单价为400元/台，当年产量不超过1000台时，可以全部售出，当年产量超过1000台时，经广告宣传可以再多售出200台，每台平均广告费40元，生产再多时本年就售不出去. 试将本年的销售总收入R表示为年产量x的函数.

解 当$0\leqslant x\leqslant 1000$(台)时，可全部售出，此时总收入为$R(x)=400x$(元)；

当$1000<x\leqslant 1200$(台)时，前1000台按400元/台售出，后$x-1000$台按360元/台售出，此时总收入为

$$R(x)=1000\times 400+(x-1000)\times 360=360x+40000(\text{元});$$

当$x>1200$(台)时，前1000台按400元/台售出，后200台按360元/台售出，再多余的$x-1200$台没有收入，此时总收入为

$$R(x)=1000\times 400+200\times 360=472000(\text{元}).$$

综上所述，收入函数为

$$y=\begin{cases}400x, & 0\leqslant x\leqslant 1000,\\ 40000+360x, & 1000<x\leqslant 1200,\\ 472000 & x>1200.\end{cases}$$

23. 设某商品的需求函数为$Q=ae^{-bP}$(a,b均为大于零的常数). (1) 求总收益函数$R(Q)$和平均单位收益函数$\bar{R}(Q)$；(2) 若成本$C=100Q+Q^2$，求利润函数$L(Q)$.

解 (1) 由$Q=ae^{-bP}$解出$P=-\dfrac{1}{b}\ln\dfrac{Q}{a}$，则

$$R(Q)=P\cdot Q=-\frac{Q}{b}\ln\frac{Q}{a},$$

$$\bar{R}(Q)=\frac{R(Q)}{Q}=-\frac{1}{b}\ln\frac{Q}{a}.$$

(2) $L(Q)=R(Q)-C(Q)=-\dfrac{Q}{b}\ln\dfrac{Q}{a}-100Q-Q^2.$