GAODENGDAISHU

华腾教育

高等学校教材经典同步辅导丛书数学专业类(二)

配高教社《高等代数》(第二版)上册 丘维声 编

高等代数

丘维声第二版 上册

同步辅导及习题全解

华腾教育教学与研究中心

丛书主编 清华大学 戎晓政

本书主编 清华大学 吴庆伟

◇紧扣教材 ◇知识精讲 ◇习题全解

◇应试必备 ◇联系考研 ◇网络增值

中国矿业大学出版社

内 容 提 要

本书是高等教育出版社出版，丘维声编写的《高等代数》(第二版上册)教材的配套辅导书。本书由课程学习指南、知识点归纳、典型例题与解题技巧、历年考研真题评析及课后习题全解等部分组成，旨在帮助读者掌握知识要点，学习分析问题和解决问题的方法技巧，并提高学习能力及应试能力。

本书可供高等院校高等代数课程的同步辅导使用，也可作为研究生入学考试的复习资料，同时可供本专业教师及相关工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等代数同步辅导及习题全解. 上册 / 吴庆伟主编. 一徐州：中国矿业大学出版社，2008.1

(高等学校教材经典同步辅导丛书)

ISBN 978-7-81107-913-5

Ⅰ.高… Ⅱ.吴… Ⅲ.高等代数一高等学校一教学参考资料 Ⅳ.O15

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 003080 号

书　　名　高等代数同步辅导及习题全解(上册)
主　　编　吴庆伟
责任编辑　罗　浩
选题策划　孙怀东
特约编辑　王丽娜
出版发行　中国矿业大学出版社
(江苏省徐州市中国矿业大学内　邮政编码 221008)
网　　址　http://www.cumtp.com　**E-mail**：cumtpvip@cumtp.com
印　　刷　北京市昌平百善印刷厂
经　　销　新华书店
开　　本　850×1168　1/32　**本册印张** 11.00　**本册字数** 372 千字
版次印次　2008 年 2 月第 1 版　2008 年 2 月第 1 次印刷
总 定 价　77.80 元

高等学校教材
经典同步辅导丛书编委会

前 言

PREFACE

高等代数是数学及其相关专业重要的基础课之一，也是报考该类专业硕士研究生的必考科目。丘维声编的《高等代数》(第二版)以体系完整、结构严谨、层次清晰、深入浅出的特点成为这门课程的经典教材，被全国许多院校采用。

为了帮助读者更好地学习这门课程，掌握更多知识，我们根据多年的教学经验编写了这本与此教材配套的《高等代数同步辅导及习题全解》(第二版上册)。本书旨在使广大读者理解基本概念，掌握基本知识，学会基本的解题方法与解题技巧，进而提高应试能力。

本书作为一种辅助性的教材，具有较强的针对性、启发性、指导性和补充性。考虑到高等代数这门课程的特点，我们在内容上做了以下安排：

1. 课程学习指南　从该课程的知识体系出发，对各个章节在全书的位置，以及与其他章节的联系作了简明扼要的阐述，使学习更有重点。

2. 知识点归纳　串讲概念，总结性质和定理，使得知识全面系统，便于掌握。

3. 典型例题与解题技巧　精选各类题型，涵盖本章所有重要知识点，对题目进行深入、详细的讨论与分析，并引导学生思考问题，能够举一反三，拓展思路。

4. 历年考研真题评析　精选历年考研真题进行深入

的讲解。

5. 课后习题全解 本书给出了丘维声编的《高等代数》(第二版上册)各章课后习题的答案。我们不仅给出了详细的解题过程,而且对有难度或综合性较强的习题做了分析和小结,从而更好地帮助学生理解掌握每一知识点。

本书在编写时参考了大量的优秀教材和权威考题。在此,谨向有关作者和所选考试、考研试题的命题人以及对本书的出版给予帮助和指导的所有老师、同仁表示衷心的感谢!

由于编者水平有限,本书难免出现不妥之处,恳请广大读者批评指正。

联系我们

华腾教育网: http://www.huatengedu.com.cn

电子邮件: huateng@huatengedu.com

华腾教育教学与研究中心

目 录

CONTENTS

课程学习指南

高等代数是数学类及其相关专业必修的一门核心理论基础课,也是以后继续深化系统学习数学理论的基础,同时也是数学类各专业硕士研究生入学考试的必考科目。

学习高等代数的目的是掌握高等代数的基本理论,进而提高自己解决实际问题的能力。在社会经济高速发展的今天,高等代数在工程方面的应用也越来越普遍。

高等代数具有很强的理论性和系统性,需要一定的理论分析能力与逻辑思维能力,因此在学习本课程之前最好有计划地进行适当的预习,并了解一下相关理论的发展历程,对所学的课程有一个体系性的把握。同时,本课程又是一门指导性的学科,对它的掌握直接关系到数学专业的其他后续课程。

高等代数	⇒	泛函分析 高等代数续论 抽象代数 常微分方程

本书包含六章内容,可分为两个部分。第一部分为行列式与方程组,包括第一、二、三章,主要介绍行列式和线性方程组及其进一步理论;第二部分为矩阵的相关内容,包括第四、五、六章,主要介绍矩阵的运算、相抵与相似,二次型与矩阵的合同等内容。

高等代数是一门逻辑性很强的课程,因此学习这门课程有一定难度。为了学好这门课程,建议在学习过程中应按以下方法学习:

1. **理解掌握基本概念与定理,掌握基本方法。**
2. **注意理论前后发展的系统性与关联性,做到融会贯通。**

3. 要注意应用所学的理论分析实际问题，做到理论与实际相结合。

4. 要养成综合分析，认真思考的良好学习习惯。

此外，为了帮助学生在考研、期末等考试中取得好成绩，我们提出以下建议：

1. 勤动脑、爱思考。将课程中所学的理论知识与实际问题相结合，认识到知识的力量在应用实践。

2. 多阅读、善分析。要重点阅读一些高等代数方面的书籍，提高自己的分析能力及综合理论素质，并归纳总结解题的思维方法，做到学为所用，举一反三。

第一章

线性方程组

知识点归纳

一、矩阵

(1) 定义：由 $s \cdot m$ 个数排列成 s 行、m 列的一张表称为一个 $s \times m$ **矩阵**. 记为 $A_{s\times m}$，其中第 i 行与第 j 行交叉位置的元素称为 (i,j) 元.

(2) 矩阵的初等行变换：① 一行的倍数加到另一行上；② 互换两行的位置；③ 用一个非零数乘其一行，这三种变换称为矩阵的初等行变换.

(3) 数域 K 上一切 $s \times n$ 矩阵组成的集合，记为 $M_{s\times n}(K)$. 当 $s=n$ 时，$M_n(K)$ 称为 n 级方阵组成的集合. 元素全为 0 的矩阵称为零矩阵.

(4) 阶梯形矩阵：它们任一行从第一行元素起至该行的第一个非零元素所在下方及左下方全为零；如果某一行为零，则它的下面各行均为零，这样的 $s \times n$ 矩阵称为阶梯形矩阵.

(5) 简化行阶梯形矩阵：满足每个主元都是 1 且每个主元所在列的其余元素都是 0 的阶梯形矩阵.

(6) 关于矩阵初等行变换

① 任意一个矩阵都可以经过一系列初等行变换化成阶梯形矩阵.

② 任意一个矩阵都可以经过一系列初等行变换化成简化行阶梯形矩阵.

二、线性方程组

1. 线性方程组的初等变换

(1) 把一个方程的倍数加到另一个方程上；

(2) 互换两个方程的位置；

(3) 用一个非零数乘某一个方程.

2. 重要结论

(1) 一个线性方程组经过若干次初等变换所得到的新的线性方程组与原方程组同解.

(2) 对一个线性方程组实行初等变换等价于对它的增广矩阵实行初等行变换.

3. 关于线性方程组解的情况

定理 1 n 元线性方程组的解的情况只有三种可能:无解,有唯一解,有无穷多个解. 把 n 元线性方程组的增广矩阵经过初等行变换化成阶梯形矩阵,如果相应的阶梯形方程组出现"$0 = d$(其中 d 是非零数)"这样的方程,则原方程无解;否则,有解. 当有解时,如果阶梯形矩阵的非零行数目 r 等于未知量数目 n,则原方程组有唯一解;如果非零行数目 $r < n$,则原方程组有无穷多个解.

(1) n 元齐次线性方程组有非零解的充分必要条件是:它的系数矩阵经过初等行变换化成的阶梯形矩阵中,非零行的数目 $r < n$.

(2) n 元齐次线性方程组如果方程的数目 s 小于未知量的数目 n,那么它一定有非零解.

三、数域

(1) 定义:设 K 是复数集的一个子集,如果 K 满足:

① 0 、$1 \in K$;

② 对于任意的 a、$b \in K$,都有 $a \pm b$、$ab \in K$;并且 $b \neq 0$ 时,有 $\frac{a}{b} \in K$,

那么称 K 是一个**数域**. 其中性质 ② 称为 K 对于加、减、乘、除四则运算封闭.

(2) 设 K 为至少包含两个数的数集,如果 K 中任两数的和、差、积、商均仍属于 K,则 K 是一个数域.

(3) 任何数域都包含有理数域,即有理数域是最小数域.

(4) 在讨论矩阵问题时,都是在一个给定的数域 K 里进行,即矩阵的元都是取自 K,称数域 K 上的矩阵.

典型例题与解题技巧

题型一 求解线性方程组

例 1 解下述线性方程组：

$$\begin{cases}(1+a_1)x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n=b_1,\\ x_1+(1+a_2)x_2+x_3+\cdots+x_n=b_2,\\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\ x_1+x_2+x_3+\cdots+(1+a_n)x_n=b_n,\end{cases}$$

其中 $a_i\neq 0, i=1,2,\cdots,n$，且 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\neq -1$.

【分析】 用 Gauss-Jordan 消去法求解线性方程组.

解 **解法 1** Gauss-Jordan 消去法求解线性方程组.

该方程组的增广矩阵为

$$\begin{pmatrix}1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & b_1\\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 & b_2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n & b_n\end{pmatrix}$$

对该矩阵实行初等行变换：$(-1)r_1+r_i(2\leqslant i\leqslant n)$，于是可得

$$\begin{pmatrix}1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & b_1\\ -a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & b_2-b_1\\ -a_1 & 0 & a_3 & \cdots & 0 & b_3-b_1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -a_1 & 0 & 0 & \cdots & a_n & b_n-b_1\end{pmatrix}$$

由于 $a_i\neq 0, 1\leqslant i\leqslant n$，且 $\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}\neq -1$.

再实行初等行变换：$r_i\times\frac{1}{a_1a_i}+r_1\times(\frac{1}{-a_1})$，由此可化为

$$\begin{pmatrix} -1-(\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}) & 0 & 0 & \cdots & 0 & \sum\limits_{i=2}^{n}\frac{b_i-b_1}{a_ia_1}-\frac{b_1}{a_1} \\ -\frac{1}{a_2} & \frac{1}{a_1} & 0 & \cdots & 0 & \frac{b_2-b_1}{a_1a_2} \\ -\frac{1}{a_3} & 0 & \frac{1}{a_1} & \cdots & 0 & \frac{b_3-b_1}{a_1a_3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\frac{1}{a_n} & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_1} & \frac{b_n-b_1}{a_1a_n} \end{pmatrix}$$

也就是说原方程组同解于如下的方程组

$$\begin{cases} [-1-(\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n})]x_1 = \sum\limits_{i=2}^{n}\frac{b_i-b_1}{a_ia_1}-\frac{b_1}{a_1}, \\ (-\frac{1}{a_2})x_1 + \frac{1}{a_1}x_2 = \frac{b_2-b_1}{a_1a_2}, \\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots \\ (-\frac{1}{a_n})x_1 + \frac{1}{a_1}x_n = \frac{b_n-b_1}{a_1a_n}, \end{cases}$$

let $s=1+\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}$,于是有 $x_i=\frac{b_i}{a_i}-\frac{1}{a_is}\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{b_j}{a_j}, i=1,2,\cdots,n.$

用消元法求解线性方程组是最常用方法,但我们发现虽然能解出来,但很麻烦,有没有更好的办法呢?

观察每个方程的特点,发现第 i 个方程的左端为$(x_1+x_2+\cdots+x_n)+a_ix_i$. 如果能够先求出 $x_1+x_2+\cdots+x_n$ 的值,那么就容易求出 x_i 的值.

解法 2 根据方程组本身的特点快速求解.

令 $y=x_1+x_2+\cdots+x_n$,则原方程组可以写成

$$\begin{cases} y+a_1x_1=b_1, \\ y+a_2x_2=b_2, \\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots \\ y+a_nx_n=b_n. \end{cases}$$

由此得出(已知 $a_i\neq 0, i=1,2,\cdots,n$)

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1 - y}{a_1}, \\ x_2 = \dfrac{b_2 - y}{a_2}, \\ \quad\cdots \\ x_n = \dfrac{b_n - y}{a_n}. \end{cases}$$

把这 n 个式子相加,得

$$y = \left(\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \cdots + \frac{b_n}{a_n}\right) - \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right)y$$

记

$$s = 1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}$$

得

$$y = \frac{1}{s}\sum_{j=1}^{n}\frac{b_j}{a_j}$$

于是有

$$x_i = \frac{b_i}{a_i} - \frac{1}{a_i s}\sum_{j=1}^{n}\frac{b_j}{a_j}, i = 1, 2, \cdots, n$$

例 2　解线性方程组:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + (n-1)x_{n-1} + nx_n = a_1, \\ nx_1 + x_2 + 2x_3 + \cdots + (n-2)x_{n-1} + (n-1)x_n = a_2, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + \cdots + x_{n-1} + 2x_n = a_{n-1}, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + \cdots + nx_{n-1} + x_n = a_n. \end{cases}$$

【分析】　用 Gauss-Jordan 算法求解.

解　该方程组的增广矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n & a_1 \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 & a_2 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 & a_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 & a_{n-1} \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 & a_n \end{pmatrix} \longrightarrow$$

实行初等行变换:$r_i + r_1, 2 \leqslant i \leqslant n$,可得

$$\begin{pmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & \frac{n(n+1)}{2} & \frac{n(n+1)}{2} & \cdots & \frac{n(n+1)}{2} & \frac{n(n+1)}{2} & \sum_{i=1}^{n} a_i \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 & a_2 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 & a_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 & a_{n-1} \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 & a_n \end{pmatrix}$$

再实行初等行变换：$r_1 \times \frac{2}{n(n+1)}$，并且 $r_{i+1} \times (-1) + r_i, 2 \leqslant i \leqslant n$，可得

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \frac{2\sum_{i=1}^{n} a_i}{n(n+1)} \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 & a_2 - a_3 \\ 1 & 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 & a_3 - a_4 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 & a_{n-1} - a_n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 & a_n \end{pmatrix} \longrightarrow$$

最后实行初等行变换：$r_1 \times (-1) + r_i, 2 \leqslant i \leqslant n-1$，可得

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \frac{2\sum_{i=1}^{n} a_i}{n(n+1)} \\ 0 & -n & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_2 - a_3 - \frac{2\sum_{i=1}^{n} a_i}{n(n+1)} \\ 0 & 0 & -n & \cdots & 0 & 0 & a_3 - a_4 - \frac{2\sum_{i=1}^{n} a_i}{n(n+1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -n & 0 & a_{n-1} - a_n - \frac{2\sum_{i=1}^{n} a_i}{n(n+1)} \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 & a_n \end{pmatrix}$$

于是原方程组同解于下面的方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-1} + x_n = \dfrac{2\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}{n(n+1)}, \\ (-n)x_2 + 0 + \cdots + 0 + 0 = a_2 - a_3 - \dfrac{2\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}{n(n+1)}, \\ (-n)x_3 + \cdots + 0 + 0 = a_3 - a_4 - \dfrac{2\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}{n(n+1)}, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ (-n)x_{n-1} + 0 = a_{n-1} - a_n - \dfrac{2\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}{n(n+1)}, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + \cdots + nx_{n-1} + x_n = a_n. \end{cases}$$

可得 $x_i = \dfrac{2\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}{n^2(n+1)} + \dfrac{a_{i+1}}{n} - \dfrac{a_i}{n} (1 < i \leqslant n-1)$，而

$$\begin{cases} x_1 + x_n = \dfrac{4\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}{n(n+1)} - \sum\limits_{i=2}^{n-1} x_i = \dfrac{4\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}{n^2(n+1)} + \dfrac{a_2}{n} - \dfrac{a_n}{n}, \\ 2x_1 + x_n = a_n - 3x_2 - \cdots - nx_{n-1} = \dfrac{6\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}{n^2(n+1)} + \dfrac{2a_2}{n} - \dfrac{a_1}{n} - \dfrac{a_n}{n}, \end{cases}$$

于是有

$$x_1 = \frac{2\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}{n^2(n+1)} + \frac{a_2}{n} - \frac{a_1}{n}, x_n = \frac{2\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}{n^2(n+1)} + \frac{a_1}{n} - \frac{a_n}{n}$$

题型二　讨论方程组解的情况

例 3　λ 取何值时，线性方程组

$$\begin{cases} (2\lambda+1)x_1 - \lambda x_2 + (\lambda+1)x_3 = \lambda - 1, \\ (\lambda-2)x_1 + (\lambda-1)x_2 + (\lambda-2)x_3 = \lambda, \\ (2\lambda-1)x_1 + (\lambda-1)x_2 + (2\lambda-1)x_3 = \lambda, \end{cases}$$

有唯一解、无解、无穷多解？

【分析】 利用定理 1 解此类题.

解 该方程的增广矩阵为

$$\begin{pmatrix} 2\lambda+1 & -\lambda & \lambda+1 & \lambda-1 \\ \lambda-2 & \lambda-1 & \lambda-2 & \lambda \\ 2\lambda-1 & \lambda-1 & 2\lambda-1 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-1)r_2+r_3} \begin{pmatrix} 2\lambda+1 & -\lambda & \lambda+1 & \lambda-1 \\ \lambda-2 & \lambda-1 & \lambda-2 & \lambda \\ \lambda+1 & 0 & \lambda+1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-1)r_3+r_1} \begin{pmatrix} \lambda & -\lambda & 0 & \lambda-1 \\ \lambda-2 & \lambda-1 & \lambda-2 & \lambda \\ \lambda+1 & 0 & \lambda+1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

下面对矩阵(*)进行如下讨论

如果 $\lambda=-1$,上面矩阵可变为

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -2 \\ -3 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

实行初等行变换:$2r_1+r_2$,可化为

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -2 \\ -5 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

于是原方程组有无穷多个解.

如果 $\lambda=0$,显然原方程组无解.

如果 $\lambda=1$,矩阵(*)可变换为

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

实行初等行变换:$2r_2+r_3$,得

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

于是原方程组无解.