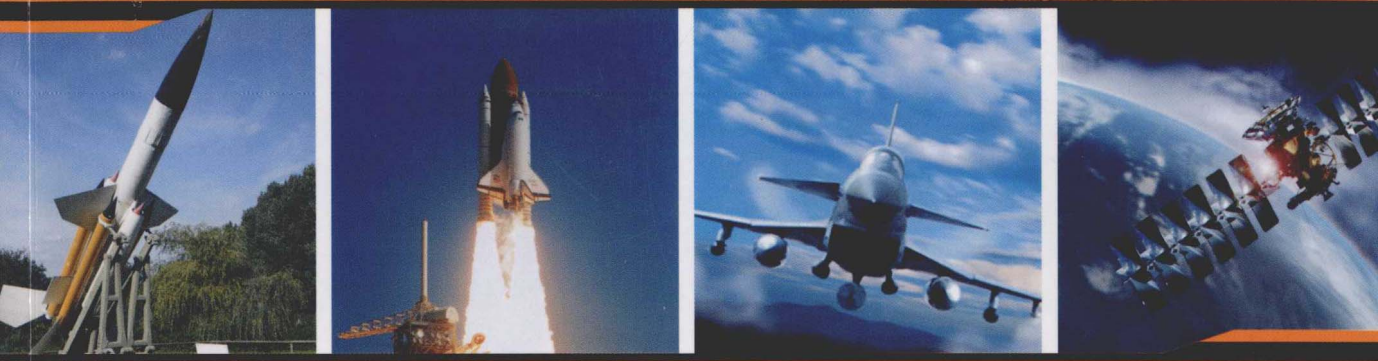


高等学校规划教材 · 航空、航天科学技术
PROGRAMMING TEXTBOOKS FOR HIGHER EDUCATION



飞行器最优控制

杨军 朱学平 朱苏朋 张晓峰 编著

西北工业大学出版社

高等学校规划教材·航空、航天科学技术

飞行器最优控制

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书介绍了飞行器的最优控制问题。全书共 11 章,包括引言、变分法、连续系统最优控制、线性二次型的最优控制、最小值原理、离散系统最优控制、最短时间和最少燃料的最优控制、动态规划、最优控制问题的数值解、最优传递函数设计方法、控制系统参数最优化方法。

本书是以笔者长期从事这一领域的理论研究基础为背景,结合笔者多年在飞行器制导控制系统设计的工作实践,参考国内、外相关资料完成的。本书在编写过程中力图做到理论与实践相结合、内容精练、难易适中,旨在为导航制导与控制专业及相关专业研究生提供一本学时量适中、注重飞行器控制理论分析与介绍的同时兼顾工程实际的新教材。

图书在版编目(CIP)数据

飞行器最优控制/杨军等编著. —西安:西北工业大学出版社,2011.8
ISBN 978-7-5612-3155-5

I. ①飞… II. ①杨… III. ①飞行器—最佳控制 IV. ①V419

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 165910 号

出版发行:西北工业大学出版社

通信地址:西安市友谊西路 127 号 邮编:710072

电 话:(029)88493844 88491757

网 址:www.nwpup.com

印 刷 者:陕西宝石兰印务有限责任公司

开 本:787 mm×1 092 mm 1/16

印 张:14.25

字 数:343 千字

版 次:2011 年 8 月第 1 版 2011 年 8 月第 1 次印刷

定 价:30.00 元

前 言

最优控制理论是从 20 世纪 50 年代末 60 年代初发展起来的现代控制理论的一个重要分支。它最初研究的对象是航天、航空、航海中的导航、制导和控制中的一类按某个性能指标最优(性能指标达到极大或极小)的控制问题。其核心问题是如何为被控对象选择一个控制策略,使得控制系统获得优良的技术品质或满意的经济效益。随着最优控制理论及计算机的发展,不但使得最优控制理论应用于复杂控制系统设计成为可能,而且在具体工程中实现最优控制也屡见不鲜。它不但在航空和空间飞行器的制导和控制系统设计方面得到了卓有成效的应用,而且在民用工业中的汽车、造纸、化工等部门亦有广泛的应用。

目前,越来越多的新技术、新方法应用于飞行器的制导和控制中,对飞行器的性能也提出了越来越高的要求。新技术、新方法的应用以及高性能的要求必然对飞行器制导和控制系统的设计工具即控制理论提出了更高的要求。最优控制理论可以提供一个基于严格的理论基础的获得按某个性能指标达到最优的控制策略,这无疑对现代飞行器的制导和控制系统设计的理论和实践具有十分重要的意义。

笔者长期从事最优控制理论的研究,同时结合笔者多年在飞行器制导控制系统设计的工作实践,参考国内、外相关资料于 2008 年元月完成了西北工业大学研究生讲义《飞行器最优控制》的编写。本书是在讲义的基础上,经过三年的试用,认真修订、整理而成的。全书共 11 章,包括引言、变分法、连续系统最优控制、线性二次型的最优控制、最小值原理、离散系统最优控制、最短时间和最少燃料的最优控制、动态规划、最优控制问题的数值解、最优传递函数设计方法、控制系统参数最优化方法。在主要章节给出了例题和实例,且在每章的最后列出了习题,供学生复习之用。

本书在编写过程中力图做到理论与实践相结合、内容精练、难易适中,旨在为导航制导与控制专业及相关专业研究生提供一本学时量适中、注重飞行器控制理论分析与介绍的同时兼顾工程实际的新教材。本书要求读者具有自动控制原理、现代控制理论等有关课程的学习基础。

全书由杨军教授负责统稿。杨军负责编写第 1, 2, 7, 10 章;朱学平负责编写第 3, 4, 5 章;朱苏朋负责编写第 9, 11 章;张晓峰负责编写第 6, 8 章。在本书的成稿过程中,袁博、凡永华、许涛博士及李玥、王鹤、王琦斐、张智超等硕士生为此书的编写付出了辛勤的汗水,在此表示感谢!本书借鉴参考了国内相关学者的研究成果,在此向相关专家、学者致以衷心的感谢!

由于笔者水平有限,书中难免有疏漏和不妥之处,欢迎读者批评指正。

编著者

2011 年 4 月

目 录

第 1 章 引言	1
1.1 飞行器最优控制的例子	1
1.2 最优控制问题的提法	4
1.3 最优控制理论发展概况	7
第 2 章 变分法	9
2.1 变分法的基本概念	9
2.2 无约束条件的最优化问题	15
2.3 具有等式约束条件的最优化问题	23
小结	34
习题	35
第 3 章 连续系统最优控制	37
3.1 时间端点固定的情况	38
3.2 有终端函数约束的情况	45
3.3 终时不指定的情况	48
小结	52
习题	52
第 4 章 线性二次型的最优控制	53
4.1 线性二次型问题	53
4.2 状态调节器	54
4.3 输出调节器	65
4.4 具有指定衰减速度的最优调节问题	70
4.5 线性系统模型跟踪最优二次型方法	72
4.6 基于频域加权的最优二次型方法	74
4.7 飞机纵向电传系统控制律设计问题	78
习题	83
第 5 章 最小值原理	87
5.1 连续系统的最小值原理	87
5.2 最小值原理的几种具体形式	96
习题	103

第 6 章 离散系统最优控制	105
6.1 离散系统的最优控制	105
6.2 连续系统的离散化处理	112
6.3 离散 LQR 问题	114
习题.....	117
第 7 章 最短时间和最少燃料的最优控制	119
7.1 砰-砰控制原理.....	119
7.2 非线性系统的时间、燃料最优控制.....	122
7.3 线性时不变系统的时间、燃料最优控制.....	128
7.4 双积分模型的时间、燃料最优控制.....	133
7.5 时间-燃料综合最优控制.....	141
7.6 地空导弹最短时间引入段设计问题	144
习题.....	147
第 8 章 动态规划	150
8.1 多段决策过程	150
8.2 动态规划的基本思想	151
8.3 动态规划求解离散系统最优控制的数值计算方法	156
8.4 动态规划求解离散线性调节器问题	163
8.5 动态规划的连续形式(Hamilton - Jacobi 方程)	164
8.6 远程空空导弹最佳中制导问题	169
习题.....	172
第 9 章 最优控制问题的数值解	174
9.1 变分法近似解法的回顾	174
9.2 拟线性化算法	176
9.3 梯度算法	177
9.4 具有控制变量约束的数值方法简介	180
9.5 地空导弹垂直发射转弯控制规律优化问题	182
第 10 章 最优传递函数设计方法	188
10.1 引言.....	188
10.2 最优传递函数.....	188
10.3 状态反馈的设计.....	196
10.4 输出反馈补偿设计及其他.....	205
习题.....	208

第 11 章 控制系统参数最优化方法	209
11.1 控制系统串联校正参数优化.....	209
11.2 控制系统 PID 调节器参数的优化设计	215
参考文献.....	220

第 1 章 引 言

1.1 飞行器最优控制的例子

【例 1-1】 最小耗能问题。

一支火箭在时间 $[0, T]$ 内从地面上升到某一高度 $\bar{y}$, 其运动规律可由微分方程描述为

$$m\ddot{y}(t) = u(t) - mg$$

式中, $y(t)$ 表示时刻 t 火箭的高度; $u(t)$ 表示时刻 t 火箭在垂直方向向上发出的推力; m 为火箭的质量, 如图 1-1 所示。火箭的推力是有限制的, 即

$$|u(t)| \leq b \quad (1-1-1)$$

为方便起见, 改写运动规律方程, 令

$$\dot{y}_1 = y_2, \quad \dot{y}_2 = \frac{1}{m}u(t) - g$$

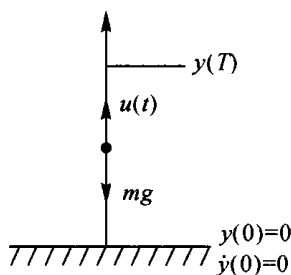


图 1-1

因此有

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u(t) - \begin{bmatrix} 0 \\ g \end{bmatrix} \quad (1-1-2)$$

和

$$\begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1-1-3)$$

目标是使火箭到达某一高度耗能最少, 即满足

$$y(T) = \bar{y} \quad (1-1-4)$$

时耗能最少。根据物理学的观点, 所耗能量可用 $\int_0^T |u(t)| dt$ 表示, 因而本问题就是在满足式

(1-1-1) ~ 式(1-1-4) 的条件下使 $\int_0^T |u(t)| dt$ 达到极小, 求出最佳推力 $u(t)$ 。

【例 1-2】 登月问题。

考虑一登月飞船, 消耗最少的燃料在月球上以速度零安全着陆问题。设飞船质量为 m , 高度为 h , 垂直速度为 v , 月球的重力加速度为常数 g , u 为飞船发动机推力。 u, h, v, m 皆为时间 t 的函数, 又设飞船自身质量为 M , 燃料质量为 F , 运动方程为

$$\left. \begin{aligned} \dot{h} &= v \\ \dot{v} &= -g + u/m \\ \dot{m} &= -ku \quad (k \text{ 是常数}) \end{aligned} \right\} \quad (1-1-5)$$

初始状态:

$$h(0) = h_0, \quad v(0) = v_0, \quad m(0) = M + F \quad (1-1-6)$$

终端状态:

$$h(t_f) = 0, \quad v(t_f) = 0 \quad (t_f \text{ 为终端时刻}) \quad (1-1-7)$$

控制量推力 u 限制在

$$0 \leq u \leq u_{\max} \quad (1-1-8)$$

目标是使燃料消耗最少,因此问题归结为求最佳推力 $u(t)$ 使式(1-1-5) ~ 式(1-1-8)满足,并使 $m(t_f)$ 达到极大。

【例 1-3】 飞行器静止问题。

飞行器上的控制面要在某一固定位置上保持静止,但阵风却使此面与预定位置产生偏离,可以设计一个伺服机构产生回复力矩,使控制面在最小时间内回到静止状态,运动方程满足

$$\ddot{\theta}(t) + a\dot{\theta}(t) + \omega^2\theta(t) = u(t)$$

$$\theta(0) = \theta_0, \quad \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0$$

式中, θ 表示离开预定位置的偏差; θ_0 是初位移; $\dot{\theta}_0$ 是阵风加给控制面的初速度; $u(t)$ 为 t 时刻的回复力矩, $u(t)$ 满足 $|u(t)| \leq c$ (c 为常数)。

显然问题就是寻求 $u(t)$, 使在最小时间内达到 $\theta = 0, \dot{\theta} = 0$ 的终端状态。

把问题简单化: 令 $x_1 = \theta, x_2 = \dot{\theta}$, 有

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad x_1(0) = \theta_0$$

$$\dot{x}_2 = -ax_2 - \omega^2 x_1 + u, \quad x_2(0) = \dot{\theta}_0$$

$$x_1(t_f) = 0, \quad x_2(t_f) = 0$$

选择 $u(t)$ 满足 $|u(t)| \leq c$, 并使

$$c(u) = \int_0^{t_f} dt = t_f$$

为极小。

【例 1-4】 防天拦截问题。

现代战争中,用火箭拦截敌方飞行目标,形成了防天拦截问题,并要求尽可能节省燃料,快速拦截。火箭与飞行目标的相对运动方程为

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= a(t) + \frac{F(t)}{m(t)}u \\ \dot{m} &= -F(t)/c \end{aligned} \right\} \quad (1-1-9)$$

初始条件: $x(t_0) = x_0, v(t_0) = v_0, m(t_0) = m_0$ 。

其中 $x(t), v(t), a(t)$ 分别表示火箭与飞行目标的相对位置向量、相对速度向量和相对加速度向量; $m(t)$ 是火箭的质量; $F(t)$ 是推力的大小; u 是推力的单位方向; c 是有效喷气速度(常数),且要求

$$0 \leq F(t) \leq F_{\max}$$

$$\|u(t)\| = 1$$

在时刻 t_f 实现拦截,即

$$x(t_f) = 0$$

燃料 $m(t_f) \geq m(\text{火箭自身质量})$ 。这是一个多目标问题,它要求时间最快,燃料最省,目标泛函综合为 $At_f - m(t_f)$ 达到最小, A 为加权常数。

问题归结为求 $F(t), u(t), t_f$, 有效实现拦截,并使目标泛函为最小。

【例 1-5】空对空导弹拦截。

为了简化叙述,假定导弹与目标的运动发生在同一水平面内。这就是说,假定能产生充分大的铅垂方向升力以抵消导弹的重力。还假定导弹推力方向与其速度方向一致,即假定水平方向的侧滑角能忽略不计,导弹的飞行方向与导弹的对称轴方向一致。此外,还假定目标以定常速度、定常航向飞行。此种假设并非过分局限。实际上,导弹按此种假设所形成的控制律飞行,直至收到关于目标下一次新的量测为止。根据新的量测再形成新的控制律,如此反复进行,直至与目标遭遇。当测量采样间隔充分小时,关于目标常速常航向的假设离实际情况相差并不太远。

在上述假设下目标运动方程为

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_m &= v_m \cos \psi_m \\ \dot{y}_m &= v_m \sin \psi_m \\ \dot{v}_m &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-1-10)$$

这里 (x_m, y_m) 是目标在坐标平面内的位置; v_m 是目标的线速度; ψ_m 是目标运动方向与 x 轴的夹角(见图 1-2)。

设 m 表示导弹 L 的质量。 (x_d, y_d) 表示导弹在坐标平面内的位置。 v_d 是导弹的飞行速度, v_d 的方向与 x 轴的夹角为 γ_d 。设 F 表示导弹的侧向控制力。 c 是推进剂的排出速度,可视为常数。用 β 表示推进剂秒流量,它是另一个控制量。用 K_d 表示导弹的阻力因子,有

$$K_d = \frac{1}{2} c_0 \rho S$$

这里 c_0 表示零升力阻力系数,可视为常数。 ρ 是大气密度,也可以看做常数。 S 是导弹参考面积。将 F 和 β 看做两个独立的控制量,这时导弹的运动方程为

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_d &= v_d \cos \gamma_d \\ \dot{y}_d &= v_d \sin \gamma_d \\ \dot{v}_d &= \frac{1}{m} (c\beta - K_d v_d^2) \\ \dot{\gamma}_d &= \frac{1}{v_d} \frac{F}{m} \\ \dot{m} &= -\beta \end{aligned} \right\} \quad (1-1-11)$$

令 $x = x_m - x_d, y = y_m - y_d$ 。取状态变量与控制变量分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6]^T \stackrel{\text{def}}{=} [x \ y \ v_d \ \gamma_d \ m \ v_m]^T \\ \mathbf{u} &= [u_1 \ u_2]^T \stackrel{\text{def}}{=} [\beta \ F]^T \end{aligned}$$

则可得到状态方程为

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_6 \cos \psi_m - x_3 \cos x_4 \\ \dot{x}_2 &= x_6 \sin \psi_m - x_3 \sin x_4 \\ \dot{x}_3 &= \frac{1}{x_5} (c u_1 - K_d x_3^2) \\ \dot{x}_4 &= \frac{u_2}{x_3 x_5} \\ \dot{x}_5 &= -u_1 \\ \dot{x}_6 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-1-12)$$

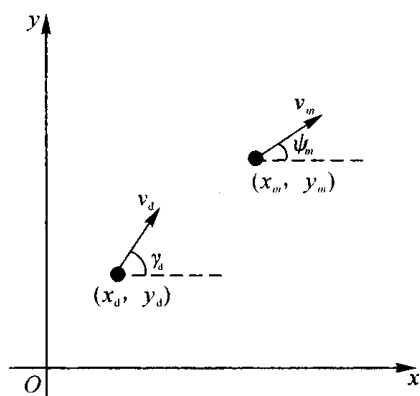


图 1-2

问题是从已知的初始状态 $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ 出发, 选择适当的控制律 $\beta(t), F(t), t_0 \leq t \leq t_f$, 使得在某末态时刻 t_f 尽可能接近目标, 同时, 尽可能地节省控制能量。为此, 取性能指标为

$$J = \mathbf{x}^T(t_f) \mathbf{S} \mathbf{x}(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t) dt \quad (1-1-13)$$

这里 $\mathbf{R}(t)$ 和 $\mathbf{S}$ 均为对角线型加权系数矩阵。

$$\mathbf{R}(t) = \begin{bmatrix} r_1(t) & 0 \\ 0 & r_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S} = \text{diag}[s_1 \quad s_2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

式(1-1-13)中等号右边第一项是末态时刻 t_f 导弹与目标距离的一种度量, 此距离常称脱靶量。而第二项则表示控制过程所消耗的能量。

1.2 最优控制问题的提法

从前面的举例中可以看出, 通常的最优控制问题可以抽象成共同的数学问题, 这会给最优控制理论的研究带来方便。所谓最优控制问题的提法, 就是将通常的最优控制问题抽象成一个数学问题, 并用数学语言严格地表述出来。在叙述提法之前, 先结合前述例子, 讨论一些基本概念。

1. 受控系统的数学模型

一般地说, 描述和解决最优控制问题首先要建立受控系统的数学模型, 即动态系统的微分方程。对于前面所举的例子, 经合理的简化, 根据动力学、运动学的基本定律, 可以直接写出描述动态系统运动规律的微分方程。复杂的受控系统往往难以用解析的方法列出微分方程, 这就需要通过“辨识”的途径确定系统的结构与参数, 从而建立系统的数学模型。

不论用何种方法, 一个集中参数的受控系统总可以用一组一阶常微分方程来描述, 此即状态方程。一般地可表示为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] \quad (1-2-1)$$

式中, $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ 是 n 维状态向量; $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_r]^T$ 是 r 维控制向量; t 是实数自变量; $\mathbf{f} = [f_1, f_2, \dots, f_n]^T$ 是 $\mathbf{x}, \mathbf{u}$ 和 t 的 n 维函数向量。式(1-2-1)状态方程不仅能概括前述三例, 它还可以概括一切具有集中参数的受控系统数学模型。定常非线性系统、线性时变系统及线性定常系统:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)] \quad (1-2-2)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t) \mathbf{u}(t) \quad (1-2-3)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \quad (1-2-4)$$

都是式(1-2-1)系统的一种特例。

2. 目标集

动态系统式(1-2-1)在控制 $\mathbf{u}(t)$ 的作用下总要发生从一个状态到另一个状态的转移。如果把状态视为 n 维欧氏空间中的一个点, 那么, 这种状态转移就可以理解为 n 维空间中点的运动。在最优控制问题中, 起始状态(称初态)通常是已知的, 即 $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ 。而所达到的状态(称末态), 它是控制所要达到的目标, 因问题而异, 它可以是状态空间的一个固定点, 更为一般的情况是末态要落在事先规定的范围内。比如例1-2要求末态 $h(t_f) = 0, v(t_f) = 0, m(t_f) \geq$

M ,它是三维状态空间中的一个线段;例1-4要求 $\mathbf{x}(t_f)=0, v(t_f)$ 自由, $m(t_f) \geq m_0$,它是七维状态空间中的一个集合。也就是说,末态 $\mathbf{x}(t_f)$ 有些分量是固定的数,有些可以在一定范围内变化,甚至可以是任意的。一般地说,对末态的要求可以用如下的末态约束条件来表示:

$$\left. \begin{aligned} g_1[\mathbf{x}(t_f), t_f] &= 0 \\ g_2[\mathbf{x}(t_f), t_f] &\leq 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-2-5)$$

它们概括了对末态的一般要求。实际上,末态约束规定了状态空间的一个时变或非时变的集合,此种满足末态约束的状态集合称为目标集,记为 M ,并可表述为

$$M = \{\mathbf{x}(t_f) | \mathbf{x}(t_f) \in \mathbf{R}^n, \quad g_1[\mathbf{x}(t_f), t_f] = 0, \quad g_2[\mathbf{x}(t_f), t_f] \leq 0\}$$

为简单计,有时末态约束式(1-2-5)笼统地称为目标集。

例1-2问题对末态的所有分量都没有限制,因而目标集 M 是整个 n 维状态空间 $\mathbf{R}^n$ 。需要指出,没有规定末态约束并不说明对末态没有要求,比如例1-5,因为目标机动,拦截只可能是一个逐步逼近的过程,且拦截导弹具有一定的杀伤范围,所以,问题本身只要求导弹最后尽可能接近目标,即 $x_1(t_f), x_2(t_f)$ 都接近于零,并不要求导弹与目标完全相遇。这里控制所要达到的目标不是通过规定目标集,而是通过使脱靶量尽可能小的性能指标体现出来。

至于末态时刻 t_f ,它可以事先规定,也可以是未定的。例1-2和例1-4中的末态时刻 t_f 并未事先规定,甚至 t_f 成为性能指标的一部分(例1-4),因此, t_f 也是一个有待选择的量。

有时初态也没有完全给定,这时,初态集合可以类似地用初态约束来表示。

3. 容许控制

控制向量 $\mathbf{u}$ 的各个分量 u_i 往往是具有不同物理属性的控制量。例如舵偏角、电磁力矩、电流、电压以及例1-2中推力和例1-4中燃料秒流量等。在实际控制问题中,大多数控制量受客观条件的限制只能取值于一定范围。比如例1-2的推力 $u(t)$ 和例1-4的燃料秒流量 $\beta(t)$ 都不能超过容许的最大值。这种限制通常可用如下不等式约束来表示:

$$0 \leq u(t) \leq u_{\max} \quad (1-2-6)$$

$$\text{或} \quad |u_i| \leq a, \quad i=1, 2, \dots, r \quad (1-2-7)$$

式(1-2-7)表示一个控制空间 $\mathbf{R}^r$ 中包括原点在内的超方体,式(1-2-6)和式(1-2-7)都规定了 $\mathbf{R}^r$ 空间中的一个闭集。

上述由控制约束条件所规定的点集称为控制域,并用 U 记之。凡在闭区间 $[t_0, t_f]$ 上有定义,且在控制域 U 内取值的每一个控制函数 $\mathbf{u}(t)$ 均称为容许控制,并记为 $\mathbf{u}(t) \in U$ 。

通常假定容许控制 $\mathbf{u}(t) \in U$ 是一有界连续函数或者是分段连续函数。

需要指出,控制域为开集或闭集其处理方法有很大差别。后者的处理较难,结果也很复杂。例1-5中的控制量 β, F 本来是受约束的,但为了处理方便及结果简单起见,问题没有通过规定控制域来考虑对控制的限制,而是把它们取做性能指标的一部分,通过最小化性能指标对控制量的取值加以限制。

4. 性能指标

从给定初态 $\mathbf{x}(t_0)$ 到目标集 M 的转移可通过不同的控制律 $\mathbf{u}(t)$ 来实现,为了在各种可行的控制律中找出一种效果最好的控制,这就需要首先建立一种评价控制效果好坏或控制品质优劣的性能指标函数。比如,例1-2中只把节省燃料这个经济指标作为性能指标;例1-4中则把快速拦截和节省燃料这两个要求加以折中考虑。可以预期,这样设计出来的控制系统既使控制过程足够快,又比较节省燃料。其侧重程度可通过调整系数 C_1 来改变;例1-5的性能指

标体现脱靶量与控制能量消耗间的折中。对各量的重视程度由各加权系数决定。

选择性能指标主要取决于问题所要解决的主要矛盾,并对设计者所关心的控制质量应有切实的估计。但是,由于设计者的着眼点不同,即使是同一个问题其性能指标也可能不同。因此,性能指标的选择是很灵活的。为了使性能指标定得合适,理论知识固不可少,但经验和技巧的积累尤为重要。

尽管不能为各种各样的最优控制问题规定一个性能指标的统一格式,但是,通常情况下,如下形式的性能指标函数可以概括一般:

$$J[\mathbf{u}(\cdot)] = S[\mathbf{x}(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} L[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] dt \quad (1-2-8)$$

式中, $\mathbf{x}(t)$ 是动态系统式(1-2-1)起始于 $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, 对应于 $\mathbf{u}(t)$ 的状态轨线; $\mathbf{x}(t_f)$ 是此轨线在终端时刻的值。

性能指标式(1-2-8)的第一项 $S[\mathbf{x}(t_f), t_f]$ 是接近目标集程度,即末态控制精度的度量,常称末值型性能指标。性能指标的积分部分能反映控制过程偏差在某种意义上的平均或控制过程的快速性,同时反映燃料或能量的消耗,这一部分常称积分型性能指标。同时包含末值型指标和积分型指标的性能指标称为复合型性能指标。如例1-5则取一复合型性能指标:

$$J = \mathbf{x}^T(t_f) \mathbf{S} \mathbf{x}(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t) dt$$

式中,第一项是脱靶量的度量;第二项表示过程中所消耗的能量。在最优控制中,这是一种常见的二次型性能指标。

注意,给定一个容许控制函数 $\mathbf{u}(t) \in U, t \in [t_0, t_f]$, 通常状态方程式(1-2-1)可定出对应的轨线 $\mathbf{x}(t)$ 和相应的末态 $\mathbf{x}(t_f)$, 从而也就决定了 J 的一个值。不同的容许控制函数 $\mathbf{u}(t)$ 则对应不同的 J 值。可见性能指标的值依赖于控制过程所施加的整个控制函数,而不是只依赖于某个时刻的控制 $\mathbf{u}(t)$ 。因此,性能指标式(1-2-8)实际是一泛函。为强调 J 是依赖于整个控制函数的泛函,常将性能指标式(1-2-8)中的 J 写成 $J[\mathbf{u}(\cdot)]$ 。

性能指标函数又称性能指标泛函、目标函数、代价函数、评价函数等。

5. 最优控制的提法

最优控制的提法可叙述如下:

已知受控系统的状态方程及给定的初态

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] \quad (1-2-9)$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (1-2-10)$$

规定的目标集为

$$M = \{\mathbf{x}(t_f) | \mathbf{x}(t_f) \in \mathbf{R}^n, \quad g_1[\mathbf{x}(t_f), t_f] = 0, \quad g_2[\mathbf{x}(t_f), t_f] \leq 0\} \quad (1-2-11)$$

求一容许控制 $\mathbf{u}(t) \in U, t \in [t_0, t_f]$, 使系统式(1-2-9)由给定初态式(1-2-10)出发, 在 $t_f > t_0$ 时刻转移到目标集式(1-2-11), 并使性能指标

$$J[\mathbf{u}(\cdot)] = S[\mathbf{x}(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} L[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] dt \quad (1-2-12)$$

为最小。

这就是最优控制问题。如果问题有解,记为 $\mathbf{u}^*(t), t \in [t_0, t_f], \mathbf{u}^*(t)$ 叫做最优控制或称极值控制。相应的轨线 $\mathbf{x}^*(t)$ 叫做最优轨线,或称极值轨线。而性能指标 $J^* = J[\mathbf{u}^*(\cdot)]$ 则称为最优性能指标。

1.3 最优控制理论发展概况

最优控制理论是现代控制理论的一个重要组成部分,它的发展与现代控制理论的发展是分不开的。迄今为止,控制理论的发展经历了古典控制理论和现代控制理论的两个重要发展阶段,并进入了大系统理论和智能控制理论的第三个阶段。

第二次世界大战期间及以后的一段时间内发展起来的自动控制理论(古典或经典控制理论),对于设计和分析单输入-单输出的线性时不变系统是非常有效的。但是随着近代航空及空间技术的发展对控制精度提出了很高的要求,并且被控对象是多输入-多输出系统,用传递函数方法、频率特性方法处理这一类问题变得很复杂,以致难以应用。面对实际工程应用中提出的种种问题,人们从问题的原始提法出发,更深入地了解控制系统的内在规律性,充分挖掘时域分析方法的优点,建立了以状态空间法为基础的现代控制理论。

现代控制理论所能处理的问题范围很广。原则上,它可以用来处理时变系统、非线性系统、多输入-多输出系统以及分布参数系统的问题。用它来处理随机系统问题和离散系统问题同样是很方便的。

早在 20 世纪 50 年代初期,就有从工程角度研究最短时间控制问题的论文发表,虽然最优性的证明借助于几何图形,带有启发性质,但它为现代控制理论的发展提供了第一批实际模型。随后,最优控制问题的深入研究以及空间技术的迫切需要吸引了一大批数学家的密切注意。通过研究,人们发现,最优控制问题的本质是一变分问题。

经典变分理论只能解决无约束或开集性约束一类简单的最优控制问题,而实际上,工程应用中往往是容许控制,属于闭集的一类最优控制问题,经典变分理论对此无能为力,这就需要人们去探索求解最优控制问题的新途径。

在种种新方法中,有两种方法最富有成效。一种是苏联学者庞特里亚金的“极小值原理”;另一种是美国学者贝尔曼(R. E. Bellman)的“动态规划”。受力学中哈密尔顿原理的启发,庞特里亚金等人把“极小值原理”作为一种推测首先提出来,随后不久又提供了一种严格的证明,并于 1958 年在爱丁堡召开的国际数学会议上首次宣读。“极小值原理”发展了经典变分原理,成为处理闭集性约束变分问题的强有力工具。“动态规划”是贝尔曼在 1953 年至 1957 年间逐步创立的。他依据最优性原理,发展了变分学中的哈密尔顿-雅可比理论,构成了“动态规划”,它是一种适用于计算机计算、处理问题范围更广泛的方法。在现代控制理论的形成与发展中,极小值原理、动态规划和卡尔曼的最优估计理论起了重要的推动作用。

最优控制理论的发展很大程度上得益于数字计算机的不断发展,数字计算机运算速度的提高、存储容量的增大、体积的缩小以及软件的广泛应用,使数字计算机不仅是控制系统分析与设计的强有力的工具,而且逐渐成为自动控制系统的主要部件之一。计算机“在线”参与控制,使得许多不要求把控制器归结为简单的校正网络,也不一定要求有封闭形式的解析解的复杂控制方法在实际工程应用中有了可能。这又反过来提出许多新的理论和问题,导致诸如最优控制的直接和间接计算的大批研究成果的出现,进一步推动了现代控制理论的发展。

近 20 年来,在现代控制理论和现代控制工程应用中,吸收了现代数学的许多成果,又得到了很大发展,并渗透到生产、生活、国防、城市规划、交通、管理等许多领域,发挥了越来越大的

作用。最优控制的发展成果主要包括分布式参数的最优控制、随机最优控制、自适应控制、大系统最优控制、微分对策等,最优控制理论形成了比较完善的理论体系,为现代控制工程做了比较充分的理论准备。特别要指出的是,随着高性能嵌入式系统的应用和发展,最优控制理论研究将是一个十分活跃的研究领域,最优控制理论在实际工程中的应用将越来越广泛。

第2章 变分法

在动态最优控制中,由于目标函数是一个泛函数,因此求解动态最优化问题可归结为求泛函极值的问题。在离散时间系统的控制问题中,变量的数目是有限的,因此适合在有限维空间中进行讨论。但是,当离散时间间隔 $\Delta t \rightarrow 0$ 时,离散系统蜕变成了连续系统,变量也成了无限多个,亦即变量成了 t 的函数,因此必须在无限维空间中进行研究。从求有限个变量的函数极值变为求无限个变量的函数极值,也牵涉泛函极值的问题。

变分法是研究泛函极值的一种经典方法,从 17 世纪末开始逐渐发展成一门独立的数学分支,并早在力学、光学、电磁学等领域,以及在控制理论方面都有着广泛的应用。本章在简要地介绍变分学的基本原理的基础上,着重讨论最优控制与经典变分法在一定条件下相互转化的问题,从而在一定范围内能应用经典变分法的结果来解决最优控制问题。同时,本章还将研究经典变分法在解决最优控制问题中的基本思想及一些基本结果。

2.1 变分法的基本概念

2.1.1 泛函的概念

1. 泛函的定义

依赖于某一函数中的一个函数或几个函数的函数,称为泛函。通俗地说,泛函就是“函数的函数”,即泛函的值是由函数的选取而定的,而函数的值是由自变量的选取而定的。

例如,函数的定积分

$$J = \int_0^1 x(t) dt \quad (2-1-1)$$

是一个泛函。这是因为 J 值是由函数 $x(t)$ 的选取而定的。显然

$$\text{当 } x(t) = t \text{ 时, } J = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}$$

$$\text{当 } x(t) = \cos t \text{ 时, } J = \int_0^1 \cos t dt = \sin 1$$

即在 $x(t)$ 选定后,泛函 J 相当于一个确定的数值。

又例如,在平面上给定点 $A[x_1, y(x_1)]$ 和点 $B[x_2, y(x_2)]$, 连接 A, B 两点的弧长 J 是一个泛函。

由图 2-1 可见,在曲线方程 $y=f(x)$ 给定后,点 A 和点 B 之间的弧长为

$$\widehat{AB} = J = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad (2-1-2)$$

显然, J 值是由函数 $y=f(x)$ 的取值而定的,即 J 值与 $y=f(x)$

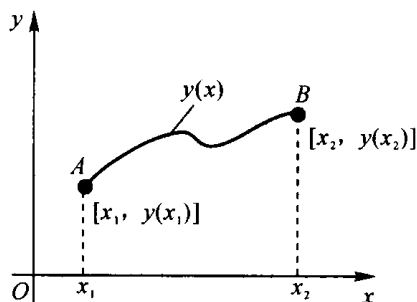


图 2-1 求弧长的变分问题

$f(x)$ 的取值完全对应,故 J 是一个泛函。

注意,函数的不定积分

$$y = \int x(t) dt \quad (2-1-3)$$

不是泛函。这是因为在 $x(t)$ 给定后, y 并不等于某个确定的值,而仍是一个 t 的函数。在这种情况下, y 只算是一个积分算子。

泛函的上述概念可推广到含有几个函数的情况。例如,最优控制问题中常用的性能指标

$$J = \int_{t_0}^{t_f} L[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] dt \quad (2-1-4)$$

是一个泛函。显然, J 是 t 的函数 $\mathbf{x}(t)$ 和 $\mathbf{u}(t)$ 的函数,在 $\mathbf{x}(t)$ 和 $\mathbf{u}(t)$ 一旦给定后, J 值也就被确定了。

式(2-1-4)中的泛函 J 可表示为 $J[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)]$,一般表达式为 $J[y(x)]$,即泛函 J 是 x 的函数 $y(x)$ 的函数。

在泛函 $J[y(x)]$ 中, $y(x)$ 称为泛函的宗量(泛函的变量)。泛函宗量 $y(x)$ 的变分 $\delta y(x)$ 定义为两个函数之差,即

$$\delta y(x) = y(x) - y_0(x) \quad (2-1-5)$$

式中, $\delta y(x)$ 是独立自变量 x 的函数; $y(x)$ 和 $y_0(x)$ 是属于同一函数类中的两个不同的函数。

2. 泛函的连续与线性泛函

对任意给定的正数 ϵ , 总存在另一个正数 δ , 当 $|y(x) - y_0(x)| < \delta$, $|\dot{y}(x) - \dot{y}_0(x)| < \delta, \dots$ 时, $|J[y(x)] - J[y_0(x)]| < \epsilon$, 则称泛函 $J[y(x)]$ 在点 $y_0(x)$ 处是连续的。即就是说, 若对于函数 $y(x)$ 的微小变化, 泛函 $J[y(x)]$ 的变化也很微小, 那么就说泛函 $J[y(x)]$ 是连续的。

这里, 必须清楚所谓“微小变化”或者“变化微小”的含义。用几何术语来说, 曲线 $y(x)$ 和 $y_0(x)$ 怎样才算相差微小或者相近呢? 或什么叫两个函数接近呢?

(1) 当泛函 $y(x)$ 与 $y_0(x)$ 之差的绝对值, 对于定义域中的一切 x 都很小时, 即

$$|y(x) - y_0(x)| \leq \epsilon \quad (2-1-6)$$

则称函数 $y(x)$ 与 $y_0(x)$ 相接近, 如图 2-2 所示。

(2) 当函数 $y(x)$ 与 $y_0(x)$ 之差的绝对值和它们的导数之差的绝对值同时很小时, 即

$$\left. \begin{aligned} |y(x) - y_0(x)| &\leq \epsilon \\ |\dot{y}(x) - \dot{y}_0(x)| &\leq \epsilon \end{aligned} \right\} \quad (2-1-7)$$

则称函数 $y(x)$ 与 $y_0(x)$ 相差微小或接近, 如图 2-3 所示。

为了区别上述两种的接近情况, 这里引入了“接近度”的概念。满足式(2-1-6)的两个函数叫做具有零阶接近度, 而满足式(2-1-7)的两个函数叫做具有一阶接近度。显然, 具有一阶接近度的两个函数必然具有零阶接近度, 但反之不成立。

这种函数相近的概念容易继续推广, 直至两个函数具有任意阶的接近度。例如, 当

$$|y(x) - y_0(x)|, |\dot{y}(x) - \dot{y}_0(x)|, \dots, |y^{(k)}(x) - y_0^{(k)}(x)| \quad (2-1-8)$$

都很小时, 则称函数 $y(x)$ 和 $y_0(x)$ 具有 k 阶的接近度。

连续泛函 $J[y(x)]$ 如果满足下列两个条件:

$$1) \quad J[y_1(x) + y_2(x)] = J[y_1(x)] + J[y_2(x)] \quad (2-1-9)$$