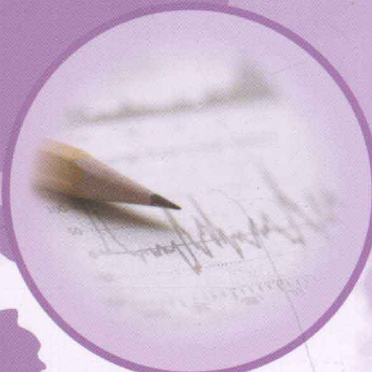
示范性职业技术学院建设项目系列教材



测量数据处理

辛星　主编

科学出版社

示范性职业技术学院建设项目系列教材

测量数据处理

辛　星　主编

崔有祯　穆清海　副主编

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书为示范性职业技术学院建设项目系列教材，主要内容包括误差来源与衡量精度的指标，图根高程控制测量平差计算，导线及导线网平差，Mathematica软件及其应用，专业平差软件及其应用等。本教材编写的原则是以学生的专业技能培养为核心，突出专业技能培养的主线，专业知识和理论以够用为度。

本教材适用于高职高专工程测量技术专业，也可以作为其他形式的职业教育的教学参考书。

图书在版编目（CIP）数据

测量数据处理/辛星主编．—北京：科学出版社，2011
示范性职业技术学院建设项目系列教材
ISBN 978-7-03-032387-3

Ⅰ.①测… Ⅱ.①辛… Ⅲ.①测量-数据处理-高等职业教育-教材
Ⅳ.①P207

中国版本图书馆CIP数据核字（2011）第191809号

责任编辑：张雪梅 / 责任校对：耿 耘
责任印制：吕春珉 / 封面设计：东方人华平面设计部

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
骏 杰 印 刷 厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2011年9月第 一 版 开本：787×1092 1/16
2011年9月第一次印刷 印张：12 3/4
印数：1—2000 字数：261 000

定价：22.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈骏杰〉）
销售部电话 010-62134988 编辑部电话 010-62132124（HA08）

前　　言

为满足工程测量技术专业教育教学改革发展的需要，满足目前工学结合的技能型人才培养模式的需要，加速技能型人才的培养，提高人才培养的质量，促进工程测量技术尤其是高新技术在工程建设中的应用和技术进步，我们编写了本教材。

本书主要内容包括：误差来源与衡量精度的指标，图根高程控制测量平差计算，图根平面控制网平差计算，Mathematica 软件及其应用，TOPADJ 平差软件的使用等。本教材编写的原则是以学生的专业技能培养为核心，以突出专业技能培养为主线，专业知识和理论知识以够用为度。本教材适用于高职高专工程测量技术专业，也可以作为其他形式的职业教育的教学参考书。

本书由北京工业职业技术学院辛星完成全部书稿的统稿工作。

在本书编写过程中，北京工业职业技术学院工程测量技术专业学科带头人李长青副教授给予了大量的指导和帮助，提出了许多建设性的意见和建议，再此深表谢意；参考并借鉴了大量的文献资料和相关教材，在此谨向有关作者表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，书中难免存在不足之处，恳请读者批评指正。

目　　录

单元1　误差来源与衡量精度的指标

>>>　单元载体　北京工业职业技术学院图根控制网测量——误差来源与精度分析

教学设计 >>>

项目分析：在完成测区图根控制网测量的基础上对测量误差的来源与误差精度进行分析。根据北京工业职业技术学院国家级示范院校建设工作的要求，已经测绘该院地形图；根据实际工作的需要，测绘地形图的比例尺为1∶500。

北京工业职业技术学院位于北京市石景山区五里坨地区，占地面积400余亩（约266 680 m^2），建筑面积约20万m^2，大部分地区的自然地貌已经被建筑物和绿化带所覆盖，植被、建筑物相对比较密集，测区内的图根控制点大多数完好可以利用。

地形图的图式采用国家测绘局统一编制的《1∶500、1∶1 000、1∶2 000大比例尺地形图图式》。

在地形图测绘过程中，获得了大量的外业观测数据，由于测量观测成果中测量误差的存在，测量数据之间存在着不符值，为了消除这些不符值，获得最终的测量成果，并评定其精度，就必须按照要求进行测量数据的分析与处理。

任务分解：根据实际工作的需要，测量数据分析与处理工作任务可以分解为：评定精度的指标，计算观测值函数的协方差，计算观测值函数协因数。

各环节功能：评定精度的指标是进行测量数据分析与处理时进行精度评定的重要环节，是衡量测量成果精度高低的指标和手段；计算观测值函数的协方差，即协方差传播定律是分析测量内业计算成果的误差分析的重要手段和基本技能；测量数据分析与处理是测量内业工作的核心内容，是测量工作者的重要专业技能之一。

作业方案：根据实际工作的需要，确定衡量精度的指标，运用协方差传播定律分析解决测量工作中的数据分析问题；运用误差理论对测量过程中获得的高程测量数据、平面控制测量数据进行综合分析与处理，获得观测值的最可靠结果并进行精度评定。

教学组织：本单元的教学为16学时，可以作业组为单位，以各作业组的外业观测成果数据分析与处理工作任务为载体，开展教学活动。首先通过查阅资料和讨论分析等过程，制定出衡量精度的指标；然后运用协方差传播定律对测量资料进行基础分析，最后利用误差理论对各作业组的所有测量资料进行全面的分析、处理和精度评定；要求尽量在规定学时内完成作业任务，个别作业组在规定学时内没有完成的，可以利用课余时间继续完成任务。在整个作业过程中教师除进行教学指导外，还要实时进行考评并做好记录，作为成绩评定的重要依据。

检查：教学过程中，加强各个环节的考核工作，以考核促学习。

1.1 产生误差的原因与衡量精度的指标

"测量数据处理"是工程测量技术专业的专业基础课，能否学好该课程，不仅影响到其他专业课程的学习质量，而且有可能在很大程度上影响到学习者以后的职业发展。要学好本课程，首先应明确测量数据处理的目的和任务。

测量数据处理的研究对象是观测数据，研究目的是为各类观测数据的处理提供原则和方法。而观测数据来源于外业观测（或称为信息采集），由于观测数据的获得不可避免地会受到测量仪器、观测者和外界条件等诸多因素的影响，其与实际值存在差异，即存在观测误差。因此，要想学好测量数据处理，应先了解观测误差。

测量数据处理的基本任务是处理一系列带有偶然误差的观测值，求出未知量的最可靠值（也称为平差值、最或是值、最或然值等），并评定测量成果的精度。解决这两个问题的基础，是要研究观测误差的理论，简称误差理论。本节主要介绍偶然误差的规律性、衡量精度的指标等内容。

1.1.1 观测条件与观测误差

观测值是通过观测得到的测量信息。观测是指用一定的仪器、工具、传感器或其他手段获取反映地球及其他实体与空间分布有关信息的过程。不论观测条件如何，测量误差总是不可避免的。任何观测值，客观上总存在一个能反映其真正大小的数值，这个数值称为观测量的真值。然而，一个量的真值一般是得不到的，因为观测中不可避免地存在误差，这只需对某一量进行多次重复观测或对某一几何图形进行观测就可以得到证实。例如，对某一段高差或某一距离或某一角度重复观测若干次，会发现各量重复观测值间均存在差异。再如，对某平面三角形的三内角进行观测，会发现三个观测角之和与其理论值 180° 存在差异。这些差异说明了观测误差的存在，因为如果不存在观测误差，同一量的若干次观测值应相等，都等于其真值，三角形三内角的观测值之和当然应等于内角和的理论值。

观测误差产生的原因很多，概括起来主要有以下三个方面。

1. 测量仪器

测量工作通常是利用测量仪器进行的。由于每一种仪器都具有一定限度的精密度，因而使观测值的精密度受到了一定的限制。例如，丈量长度的各种各样的尺子，它们的格值都会含有误差，所标记的长度并不是真长，因此用这些尺子量得的长度就不是真长。又如，水准仪的视准轴不平行于水准管轴时，在水准尺上读数将会产生误差，而且这个误差将随着水准仪距水准尺的距离增大而增大。同样，经纬仪、GPS、全站仪等测量仪器的误差也使测量结果产生误差。

2. 观测者

由于观测者的感觉器官的鉴别能力有一定的局限性，在仪器的安置、照准、读数

等方面都会产生误差。同时，观测者的工作态度和技术水平也对观测成果质量有直接影响。

3. 外界条件

观测时所处的外界条件，如温度、湿度、风力、大气折光等因素都会对观测结果直接产生影响；同时，因温度的高低、湿度的大小、风力的强弱以及大气折光的不同，它们对观测结果的影响也不同。因此，在这样的客观环境下进行观测，就必然使观测的结果产生误差。

上述测量仪器、观测者、外界条件三个方面的因素是误差的主要来源，我们把这三方面的因素综合起来称为观测条件。不难想象，观测条件的好坏与观测成果的质量有着密切的联系，观测条件较好则观测成果的质量较高，观测条件较差则观测成果的质量较低，观测条件相同则观测成果的质量也相同。所以说，观测成果的质量高低也就客观地反映了观测条件的优劣。

但是不管观测条件如何，在整个观测过程中，由于受上述种种因素的影响，观测的结果总会产生这样或那样的误差。当然，在客观条件允许的范围内，测量工作者必须确保观测成果具有较高的质量。

1.1.2 观测误差的分类

根据观测误差对观测结果的影响性质，可将观测误差分为系统误差和偶然误差两种。

1. 系统误差

在相同的观测条件下作一系列的观测，如果误差在大小、符号上表现出系统性，或者在观测过程中按一定的规律变化，或者为某一常数，那么，这种误差称为系统误差。简言之，符合函数规律的误差称为系统误差。

例如，测距仪的乘常数误差所引起的距离误差与所测距离的长度成正比增加，距离愈长，误差也愈大；测距仪的加常数误差所引起的距离误差为一常数，与距离的长度无关。这是由于仪器不完善或工作前未经检验校正而产生的系统误差。又如，用钢尺量距时的温度与检定尺长时的温度不一致而使所测的距离产生误差，测角时因大气折光的影响而产生的角度误差等，这些都是由外界条件所引起的系统误差。

2. 偶然误差

在相同的观测条件下作一系列的观测，如果误差在大小和符号上都表现出偶然性，即从单个误差看，该列误差的大小和符号没有规律性，但就大量误差的总体而言，具有一定的统计规律，这种误差称为偶然误差。简言之，符合统计规律的误差称为偶然误差。

设对某一量观测结果的偶然误差为Δ，影响因子为x_1，x_2，x_3，…，x_n，偶然误差可表示为$\Delta=f_\Delta$（x_1，x_2，x_3，…，x_n）。

例如，经纬仪测角误差是由照准误差、读数误差、外界条件变化所引起的误差和仪器本身不完善而引起的误差等综合的结果，而其中每一项误差又是由许多偶然因素所引起的小误差。如照准误差可能是由于照准部旋转不正确、脚架或觇标的晃动与扭转、风力风向的变化、目标的背影、大气折光等偶然因素影响而产生的小误差。因此，测角误差实际上是由许多微小误差项构成，而每项微小误差又随着偶然因素的影响不断变化，其数值的大小和符号的正负具有随机性，这样，由它们所构成的误差，就其个体而言，无论是数值的大小或符号的正负都是不能事先预知的。因此，把这种性质的误差称为偶然误差。偶然误差就其总体而言，具有一定的统计规律，有时又把偶然误差称为随机误差。

在测量工作的整个过程中，除了系统误差和偶然误差外，还可能发生错误。例如，照准目标瞄准错误、读数错误、记录错误等。错误的发生，大多是由于工作中的粗心大意造成的。错误的存在不仅大大影响测量成果的可靠性，而且往往造成返工浪费，给工作带来难以估量的损失，必须采取适当的方法和措施，保证观测结果中不存在错误。一般来说，错误不算作观测误差。

系统误差与偶然误差在观测过程中总是同时发生的。当观测值中有显著的系统误差时，偶然误差就居于次要地位，观测误差就呈现出系统的性质；反之，则呈现出偶然的性质。

系统误差对于观测结果的影响一般有累积的作用，它对观测成果的质量影响也特别显著。在实际工作中，应该采用各种方法来消除或减弱系统误差对观测成果的影响，达到实际上可以忽略不计的程度。例如，在测量之前对测量仪器进行认真的检验与校正，在测量过程中采用合适的测量方法，对观测成果进行必要的改正等。

当观测序列中已经排除了系统误差的影响，或者说系统误差与偶然误差相比已处于次要地位，即该观测序列中主要存在着偶然误差，对于这样的观测序列，就称为带有偶然误差的观测序列。这样的观测结果和偶然误差便都是一些随机变量，如何处理这些随机变量，是测量平差这一学科所要研究的内容。

由于观测结果不可避免地存在着偶然误差的影响，在实际工作中为了提高成果的质量防止错误发生，通常要使观测值的个数多于未知量的个数，也就是要进行多余观测。例如，对一条导线边，丈量一次就可得其长度，但实际上总要丈量两次或两次以上；一个平面三角形，只需观测其中两个内角，即可决定它的形状，但通常是观测三个内角。由于偶然误差的存在，通过多余观测必然会发现在观测结果之间不相一致、或不符合应有关系而产生的不符值。因此，必须对这些带有偶然误差的观测值进行处理，使得消除不符值后的结果可以认为是观测量的最可靠的结果。由于这些带有偶然误差的观测值是一些随机变量，可以根据概率统计的方法来求出观测量最可靠结果，这是“测量数据处理”课程的一个主要任务。

本课程的另一项任务是评定观测值及其函数的最可靠结果的精度，也就是考核测量结果的质量。人们把这一数据处理的整个过程叫做测量平差。概括起来讲，测量平

差有两大任务：一是通过数据处理求待定量的最佳估值；二是评估观测成果的质量。

系统误差和偶然误差在观测过程中总是同时产生的。当观测值中有显著的系统误差时，偶然误差就居于次要地位，观测误差呈现出系统的性质；反之，则呈现出偶然的性质。

1.1.3 偶然误差的规律性

任何一个被观测量客观上总是存在着一个能代表其真正大小的数值，这一数值就称为该观测量的真值。通常在表示观测值的字母上方加波浪线表示其真值。

设进行了 n 次观测，各观测值为 L_1、L_2、…、L_n，观测量的真值为 $\widetilde{L}_1$、$\widetilde{L}_2$、…、$\widetilde{L}_n$。由于各观测值都带有一定的误差，每一个观测值的真值 $\widetilde{L}_i$ ［或 $E(L_i)$］与观测值 L_i 之间必存在一个差数，设为

$$\Delta_i = \widetilde{L}_i - L_i \tag{1.1}$$

称 Δ_i 为真误差（在此仅包含偶然误差），有时简称为误差。若记

$$\underset{n,1}{L} = [L_1 \quad L_2 \quad \cdots \quad L_n]^{\mathrm{T}},\quad \underset{n,1}{\widetilde{L}} = [\widetilde{L}_1 \quad \widetilde{L}_2 \quad \cdots \quad \widetilde{L}_n]^{\mathrm{T}},\quad \underset{n,1}{\Delta} = [\Delta_1 \quad \Delta_2 \quad \cdots \quad \Delta_n]^{\mathrm{T}}$$

则有

$$\Delta = \widetilde{L} - L \tag{1.2}$$

如果以被观测值的数学期望表示该观测值的真值，即

$$E(L) = [E(L_1) \quad E(L_2) \quad \cdots \quad E(L_n)]^{\mathrm{T}} = [\widetilde{L}_1 \quad \widetilde{L}_2 \quad \cdots \quad \widetilde{L}_n]^{\mathrm{T}} = \widetilde{L}$$

则有

$$\Delta = E(L) - L \tag{1.3}$$

在此，我们用观测值的真值与观测值之差定义真误差，有些教材和文献上用观测值与观测值的真值之差定义真误差。这两种定义方式仅仅是使真误差符号相反，对于后续各种计算公式的推导没有影响。

前面已经指出，就单个偶然误差而言，其大小或符号没有规律性，即呈现出一种偶然性（或随机性），但就其总体而言，却呈现出一定的统计规律性，并且它是服从正态分布的随机变量。人们从无数的测量实践中发现，在相同的观测条件下，大量偶然误差的分布也确实表现出了一定的统计规律性。下面用一个实例来说明。

在相同的条件下，独立地观测了 358 个三角形的全部内角，由于观测值带有偶然误差，三内角观测值之和不等于其真值 180°，各个三角形内角和的真误差

$$\Delta_i = 180° - (L_1 + L_2 + L_3)_i \qquad (i = 1,2,\cdots,358)$$

式中，$(L_1 + L_2 + L_3)_i$ 表示各三角形内角和的观测值。现取误差区间的间隔 $\mathrm{d}\Delta$ 为 0.20″，将这一组误差按其正负号与误差值的大小排列，统计误差出现在各区间内的个数 v_i 以及“误差出现在某个区间内”这一事件的频率 v_i/n（n=358）列于表 1.1 中。

表 1.1 某测区三角形内角和的误差分布

误差的区间 / (″)	Δ 为负值			Δ 为正值			备注
	个数 v_i	频率 v_i/n	$\frac{v_i/n}{d\Delta}$	个数 v_i	频率 v_i/n	$\frac{v_i/n}{d\Delta}$	
0.00～0.20	45	0.126	0.063	46	0.128	0.064	
0.20～0.40	40	0.112	0.560	41	0.115	0.575	
0.40～0.60	33	0.092	0.460	33	0.092	0.460	
0.60～0.80	23	0.064	0.320	21	0.059	0.295	①dΔ=0.02″
0.80～1.00	17	0.047	0.235	16	0.045	0.225	②等于区间左端值的误差算入该区间内
1.00～1.20	13	0.036	0.180	13	0.036	0.180	
1.20～1.40	6	0.017	0.085	5	0.014	0.070	
1.40～1.60	4	0.011	0.055	2	0.006	0.030	
1.60 以上	0	0.000	0.000	0	0.000	0.000	
和	181	0.505		177	0.495		

从表 1.1 中可以看出，误差的分布情况具有以下性质：

1）误差的绝对值有一定的限值。

2）绝对值较小的误差比绝对值较大的误差多。

3）绝对值相等的正负误差的个数相近。

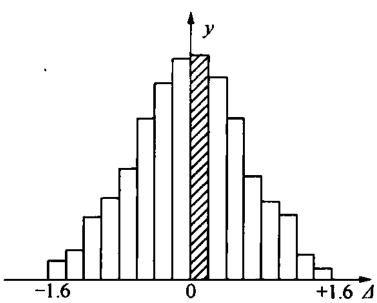


图 1.1

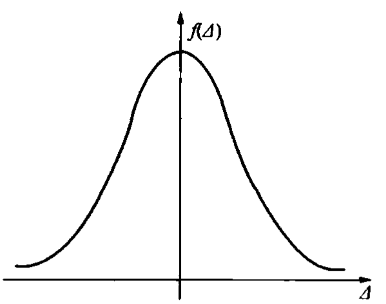


图 1.2

偶然误差分布的情况，除了采用上述误差分布表的形式表达外，还可以利用图形来表达。例如，以横坐标表示误差的大小，纵坐标代表各区间内误差出现的频率除以区间的间隔值，即$\frac{v_i/n}{d\Delta}$（此处间隔值均取为 dΔ=0.02″），根据表 1.1 中的数据绘制出图 1.1。在图 1.1 中每一误差区间上的长条面积就代表误差出现在该区间内的频率。例如，图中画有斜线的长条面积就是代表误差出现在（0.00″，+0.20″）区间内的频率 0.128。这种图形通常称为直方图，它形象地表示了误差的分布情况。

由此可知，在相同观测条件下所得到的一组独立观测的误差，只要误差的总个数 n 足够多，那么误差出现在各区间内的频率就总是稳定在某一常数（理论频率）附近，而且当观测个数愈多时，稳定的程度也就愈高。例如，就表 1.1 的一组误差而言，在

观测条件不变的情况下，如果再继续观测更多的三角形，则可以预测，随着观测值个数的愈来愈多，当 $n \to \infty$时，各频率也就趋于一个完全确定的数值，这就是误差出现在各区间内的频率。这就是说，在一定的观测条件下，对应着一种确定的误差分布。

在 $n \to \infty$的情况下，由于误差出现的频率已趋于完全稳定，如果此时把误差区间间隔无限缩小，图 1.1 中各长方条顶边所形成的折线将变成如图 1.2 所示的光滑的曲线，这种曲线就是误差的概率分布曲线，或称为误差分布曲线。由此可见，偶然误差的频率分布，随着 n 的逐渐增大，都是以正态分布为其极限的。通常也称偶然误差的频率分布为其经验分布，而将正态分布称为它们的理论分布。在以后的理论研究中，都是以正态分布作为描述偶然误差分布的数学模型，这不仅可以带来工作上的便利，而且基本上也是符合实际情况的。我们用概率的术语来概括偶然误差的几个特性：

1）在一定的观测条件下，误差的绝对值有一定的限值，或者说，超出一定限值的误差，其出现的概率为零。

2）绝对值较小的误差比绝对值较大的误差出现的概率大。

3）绝对值相等的正负误差出现的概率相同。

4）偶然误差的数学期望为零，即 $E(\Delta)=E(E(L)-L)=E(L)-E(L)=0$。

换句话说，偶然误差的理论平均值为零。

对于一系列的观测而言，不论其观测条件是好是差，也不论是对同一个量还是对不同的量进行观测，只要这些观测是在相同的条件下独立进行的，则所产生的一组偶然误差必然都具有上述四个特性。

图 1.1 中的各长条的纵坐标为$\frac{v_i/n}{\mathrm{d}\Delta}$，其面积即为误差出现在该区间内的概率。如果将这个问题提到理论上来讨论，则以理论分布取代经验分布（图 1.2），此时，图 1.1 中各长条的纵坐标就是 Δ 的密度函数 $f(\Delta)$，而长方条的面积为 $f(\Delta)\mathrm{d}\Delta$，即代表误差出现在该区间内的概率，$P(\Delta)=f(\Delta)\mathrm{d}\Delta$。概率密度表达式为

$$f(\Delta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}} \tag{1.4}$$

式中，σ 为中误差。当上式中的参数 σ 确定后，即可画出它所对应的误差分布曲线。由于 $E(\Delta)=0$，该曲线是以横坐标为 0 处的纵轴为对称轴。当 σ 不同时，曲线的位置不变，但分布曲线的形状将发生变化。偶然误差 Δ 是服从 N（0，σ^2）分布的随机变量。

1.1.4 精度和衡量精度的指标

评定测量成果的精度是测量平差的主要任务之一。精度就是指误差分布的密集或离散的程度。例如两组观测成果的误差分布相同，便是两组观测成果的精度相同；反之，若误差分布不同，则精度也就不同。

从直方图来看，精度高，则误差分布较为密集，图形在纵轴附近的顶峰则较高，且由长方形所构成的阶梯比较陡峭；精度低，则误差分布较为分散，在纵轴附近顶峰则较低，且其阶梯较为平缓。这个性质同样反映在误差分布曲线的形态上，即有误差

分布曲线较高而陡峭和误差分布曲线较低而平缓两种情形。

在一定的观测条件下进行的一组观测，它对应着一种确定的误差分布。如果分布较为密集，即离散度较小时，则表示该组观测质量较好，也就是说，这一组观测精度较高；反之，如果分布较为离散，即离散度较大时，则表示该组观测质量较差，也就是说，这一组观测精度较低。在相同的观测条件下所进行的一组观测，由于它们对应着同一种误差分布，对于这一组中的每一个观测值，都称为是同精度观测值。

为了衡量观测值的精度高低，可以按上节的方法，把在一组相同条件下得到的误差，用组成误差分布表、绘制直方图或画出误差分布曲线的方法来比较。实际使用时，用一些数字特征来说明误差分布的密集或离散的程度，称它们为衡量精度的指标。衡量精度的指标有很多种，下面介绍几种常用的精度指标。

1. *方差和中误差*

用 σ^2 表示误差分布的方差，误差 Δ 的概率密度函数为

$$f(\Delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}}$$

由方差的定义有

$$\sigma^2 = D(\Delta) = E(\Delta^2) - [E(\Delta)]^2$$

在此 Δ 主要包括偶然误差部分，E（Δ）$=0$，所以有

$$\sigma^2 = D(\Delta) = E(\Delta^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta^2 f(\Delta) \mathrm{d}\Delta \tag{1.5}$$

σ 就是中误差，即

$$\sigma = \sqrt{E(\Delta^2)} \tag{1.6}$$

不同的 σ 将对应着不同形状的分布曲线，σ 愈小，曲线愈为陡峭；σ 愈大，则曲线愈为平缓。σ 的大小可以反映精度的高低，所以常用中误差 σ 作为衡量精度的指标。

正态分布曲线具有两个拐点，它们在横轴上的坐标为 $X_{拐} = \mu_x \pm \sigma$，μ_x 为随机变量 X 的数学期望。对于偶然误差，由于其数学期望 $E(\Delta)=0$，拐点在横轴上的坐标为

$$\Delta_{拐} = \pm\sigma \tag{1.7}$$

如果在相同的条件下得到了一组独立的观测误差，可由式（1.5），并根据定积分的定义可得

$$\sigma^2 = D(\Delta) = E(\Delta^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta^2 f(\Delta) \mathrm{d}\Delta \tag{1.8}$$

对于离散型有

$$\left.\begin{aligned} \sigma^2 &= D(\Delta) = E(\Delta^2) = \lim_{n\to\infty} \frac{[\Delta\Delta]}{n} \\ \sigma &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}} \end{aligned}\right. \tag{1.9}$$

［表达式］是测量平差教材和文献中的一个惯用符号，与数学中的 $\sum$ 读音和意义相同，表示方括号中表达式的所有项求和。例如，$[\Delta\Delta] = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \cdots + \Delta_n^2$。

方差是真误差平方（Δ^2）的数学期望，也就是 Δ^2 的理论平均值。在分布律为已知的情况下，E（Δ^2）是一个确定的常数。或者说，方差 σ^2 是 $\frac{[\Delta\Delta]}{n}$ 的极限值，它们都是理论上的数值。实际上观测个数 n 总是有限的，由有限个观测值的真误差只能得到方差和中误差的估值，方差 σ^2 和中误差 σ 的估值分别用符号 $\hat{\sigma}^2$ 和 $\hat{\sigma}$ 表示，即

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}^2 &= \frac{[\Delta\Delta]}{n}\\ \hat{\sigma} &= \pm\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}}\end{aligned} \tag{1.10}$$

这就是根据一组等精度独立真误差计算方差和中误差估值的基本公式。本书中，在不需要特别强调“估值”意义的情况下，也将中误差的估值简称为中误差。

例如，设对某个三角形用两种不同的精度分别对它进行了10次观测，求得每次观测所得的三角形内角和的真误差如下：

第一组：$+3''$，$-2''$，$-4''$，$+2''$，$0''$，$-4''$，$+3''$，$+2''$，$-3''$，$-1''$。

第二组：$0''$，$-1''$，$-7''$，$+2''$，$+1''$，$+1''$，$-8''$，$0''$，$+3''$，$-1''$。

这两组观测值中误差（由三角形内角和的真误差而得的中误差，也称为三角形内角和的中误差）为

$$m_1 = \sqrt{\frac{3^2+(-2)^2+(-4)^2+2^2+0^2+(-4)^2+3^2+2^2+(-3)^2+(-1)^2}{10}} = \pm 2.7''$$

$$m_2 = \sqrt{\frac{0^2+(-1)^2+(-7)^2+2^2+1^2+1^2+(-8)^2+0^2+3^2+(-1)^2}{10}} = \pm 3.6''$$

比较 m_1 和 m_2 的值可知，第一组的观测精度较第二组高。

2. 平均误差

在一定的观测条件下，一组独立的偶然误差绝对值的数学期望称为平均误差。

设以 θ 表示平均误差，则有

$$\theta = E(|\Delta|) = \int_{-\infty}^{+\infty} |\Delta| f(\Delta)\mathrm{d}\Delta$$

如果在相同条件下得到了一组独立的观测误差，平均误差为

$$\theta = \lim_{n\to\infty}\frac{[|\Delta|]}{n} \tag{1.11}$$

即平均误差是一组独立的偶然误差绝对值的算术平均值之极限值。因为

$$\theta = \int_{-\infty}^{+\infty}|\Delta| f(\Delta)\mathrm{d}\Delta = 2\int_0^{\infty}\Delta\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}\Delta = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}(-\sigma \mathrm{d}\mathrm{e}^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}}) = \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\left[-\mathrm{e}^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}}\right]_0^{\infty}$$

所以有

$$\begin{aligned}\theta &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma \approx 0.7979\sigma \approx \frac{4}{5}\sigma\\ \sigma &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\theta \approx 1.253\theta \approx \frac{5}{4}\theta\end{aligned} \tag{1.12}$$

上式是平均误差 θ 与中误差 σ 的理论关系式。由此可见，不同大小的 θ 对应着不同的

σ，也就对应着不同的误差分布曲线。因此，也可以用平均误差 θ 作为衡量精度的指标。

由于观测值的个数 n 总是一个有限值，在实用上也只能用 θ 的估值来衡量精度，并用 $\hat{\theta}$ 表示 θ 的估值，但仍然简称为平均误差，则

$$\hat{\theta} = \pm \frac{[|\Delta|]}{n} \tag{1.13}$$

3. 或然误差

随机变量 X 落入区间（a，b）内的概率为 $P(a<X<b)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，对于偶然误差 Δ 来说，误差 Δ 落入区间（a，b）的概率为

$$P(a<\Delta<b)=\int_a^b f(\Delta)\mathrm{d}\Delta$$

或然误差 ρ 的定义是：误差出现在（$-\rho$，$+\rho$）之间的概率等于 1/2，即

$$\int_{-\rho}^{+\rho} f(\Delta)\mathrm{d}\Delta = \frac{1}{2}$$

将 Δ 的概率密度代入上式，并作变量代换，令

$$\frac{\Delta}{\sigma}=t,\quad \Delta=\sigma t,\quad \mathrm{d}\Delta=\sigma\mathrm{d}t$$

则得

$$\int_{-\rho}^{+\rho} f(\Delta)\mathrm{d}\Delta = 2\int_0^{\frac{\rho}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$$

由概率积分表查得，当概率为 1/2 时，积分限为 0.6745，即得

$$\left.\begin{aligned} \rho &\approx 0.6745\sigma \approx \frac{2}{3}\sigma \\ \sigma &\approx 1.4826\rho \approx \frac{3}{2}\rho \end{aligned}\right\} \tag{1.14}$$

上式是或然误差 ρ 与中误差 σ 的理论关系。不同的 ρ 也对应着不同的误差分布曲线，因此或然误差 ρ 也可以作为衡量精度的指标。

实用上，因为观测值个数 n 是有限值，也只能得到 ρ 的估值 $\hat{\rho}$，但仍简称为或然误差。它是这样求得的：将相同观测条件下得到的一组误差按绝对值的大小排列，当 n 为奇数时，取位于中间的一个误差值作为 $\hat{\rho}$；当 n 为偶数时，则取中间两个误差值的平均值作为 $\hat{\rho}$。通常是先求出中误差的估值，然后按式（1.14）求出或然误差 $\hat{\rho}$。

由于当 n 不大时，中误差比平均误差更能灵敏地反映大的真误差的影响，同时在计算或然误差时往往是先算出中误差，世界各国通常都是采用中误差作为精度指标，我国也统一采用中误差作为衡量精度的指标。

4. 极限误差

中误差不代表个别误差的大小，而代表误差分布的离散度的大小。由中误差的定义可知，它是代表一组同精度观测误差平方的平均值的平方根极限值，中误差愈小，即表示在该组观测中绝对值较小的误差愈多。按正态分布表查得，在大量同精度观测的一组

误差中，误差落在（$-\sigma$，$+\sigma$）、（-2σ，$+2\sigma$）和（-3σ，$+3\sigma$）的概率分别为

$$\left.\begin{aligned}P(-\sigma<\Delta<+\sigma)&\approx 68.3\%\\P(-2\sigma<\Delta<+2\sigma)&\approx 95.5\%\\P(-3\sigma<\Delta<+3\sigma)&\approx 99.7\%\end{aligned}\right\} \tag{1.15}$$

上式反映了中误差与真误差间的概率关系。绝对值大于中误差的偶然误差，其出现的概率为31.7%；而绝对值大于二倍中误差的偶然误差出现的概率为4.5%；绝对值大于三倍中误差的偶然误差出现的概率仅有0.3%，这已经是概率接近于零的小概率事件，或者说这是实际上的不可能事件。一般以三倍中误差作为偶然误差的极限值$\Delta_{限}$，并称为极限误差，即

$$\Delta_{限}=3\sigma \tag{1.16}$$

实际中，也常采用2σ作为极限误差的。例如测量规范中的限差通常是以2σ作为极限误差的。实用上以中误差的估值$\hat{\sigma}$代替σ。在测量工作中，如果某误差超过了极限误差，那就可以认为它是错误的，相应地应进行重测、补测，或观测值舍去不用。

5. 相对误差

对于某些长度元素的观测结果，有时单靠中误差还不能完全表达观测结果的好坏。例如，分别丈量了1000m及500m的两段距离，它们的中误差均为±2cm，虽然两者的中误差相同，但就单位长度而言，两者精度并不相同。显然，前者的相对精度比后者要高。此时，须采用另一种办法来衡量精度，通常采用相对中误差，它是中误差与观测值之比。如上述两段距离，前者的相对中误差为1/50 000，而后者则为1/25 000。

相对中误差是个无名数，在测量中一般将分子化为1，即用$\frac{1}{N}$表示。

对于真误差与极限误差，有时也用相对误差来表示。例如，经纬仪导线测量时，规范中所规定的相对闭合差不能超过1/2000，它就是相对极限误差，而在实测中所产生的相对闭合差则是相对真误差。与相对误差相对应，真误差、中误差、极限误差等均称为绝对误差。

【例1.1】 观测了两段距离，分别为1000m±2cm和500m±2cm，问：这两段距离的真误差是否相等？中误差是否相等？它们的相对精度是否相同？

解 这两段距离的真误差不相等。这两段距离中误差相等，均为±2cm。它们的相对精度不相同，前一段距离的相对精度为1/50 000，后一段距离的相对精度为1/25 000。

相对精度是对长度元素而言的，如果不特别说明，相对精度是指相对中误差。角度元素没有相对精度。

1.2 协方差传播律

协方差传播律研究函数与自变量之间的协方差运算规律。在实际工作中，某些量的大小往往是由观测值通过一定的函数关系间接计算出来的。例如，图1.3中A和B为已