国家精品资源共享课参考教材

保险学系列教材

LIXI LILUN YU YINGYONG

利息理论与应用（第三版）

张运刚 编著

西南财经大学出版社
中国·成都

国家精品资源共享课参考教材

保险学系列教材

LIXI LILUN YU YINGYONG

利息理论与应用（第三版）

张运刚　编著

西南财经大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

利息理论与应用/张运刚编著．—3版．—成都：西南财经大学出版社，2016.4
ISBN 978-7-5504-2374-9

Ⅰ.①利…　Ⅱ.①张…　Ⅲ.①利息—理论研究　Ⅳ.①F032.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第067094号

利息理论与应用(第三版)

张运刚　编著

责任编辑	王　利
封面设计	墨创文化　张姗姗
责任印制	封俊川
出版发行	西南财经大学出版社(四川省成都市光华村街55号)
网　　址	http://www.bookcj.com
电子邮件	bookcj@foxmail.com
邮政编码	610074
电　　话	028-87353785　87352368
印　　刷	四川森林印务有限责任公司
成品尺寸	185mm×260mm
印　　张	18.25
字　　数	380千字
版　　次	2016年4月第3版
印　　次	2016年4月第1次印刷
印　　数	1—2000册
书　　号	ISBN 978-7-5504-2374-9
定　　价	35.00元

第三版前言

自《利息理论与应用》(第二版)出版以来,客观环境发生了一些变化,在教学过程中发现了一些新的问题,读者在使用过程中也反馈了一些宝贵意见,因此,有必要再做一些修订,使本书使用起来更方便一些、内容更实用一些、学习更轻松一些、体系更完备一些。

为此,笔者做了如下一些修订工作:

(1)改正了一些错误,纠正了一些不规范的提法,让表述更加简明与清楚。

(2)增加了每期递增多次的变额确定年金,以便将其他类型的递增或递减型年金的现值、终值公式统一起来。

(4)增加或更换了一些例题或习题。

(5)增加了一些"请读者思考"的问题,以使讲授内容更加深入或更具有挑战性。

(6)重新核对了习题及其答案,并进行了修正。

本教材是国家精品资源共享课"寿险精算"重要的辅助教材(课程网址:http://www.icourses.cn/coursestatic/course_5769.html),是学习各类精算师考试课程"金融数学"的参考教材或参加相关考试的重要工具,是学习"寿险精算"等课程的先行教材。

本书的修订与出版得到了国家精品资源共享课"寿险精算"建设资金的支持,特此致谢。

本书在修订过程中,自始至终得到了西南财经大学出版社的热心帮助与大力支持,从而确保了按时按质完成修订工作,在此表示衷心的感谢。

本书修订过程中还得到了研究生钟楚龙、钟美玲、张杰茹、蒋耀文、舒双梅、唐绮瑶、段蕾等的大力支持,帮笔者做了不少工作,并提出了很多有益的建议,特此致谢。

在本书修订过程中,尽管笔者投入了大量精力与时间,但错误或遗漏仍将难免。希望读者不断地提出宝贵意见,以便将来进一步修订与完善。欢迎广大读者致信笔者,邮箱 zhangyg678@126.com。

张运刚

2016 年 4 月

第二版前言

自《利息理论与应用》出版以来，承蒙广大读者厚爱，产生了积极的反响，收到了大量宝贵意见；同时，笔者长期在第一线教学，经常讲授利息理论相关课程，发现原教材中有不少错误，感到有必要进行修订。为此，笔者做了如下一些修订工作：

(1)删去了一些意义不大的内容，如APR的近似计算。

(2)更正了一些错误，纠正了一些不规范的提法。

(3)以附录形式增添了Excel的应用，如线性插值法、分期偿还法、牛顿迭代法、财务函数法等内容，以便将读者从烦琐的计算中解放出来，以增强学习的实用性。当然，这里仅仅起一个抛砖引玉的作用。

(4)增添了一些重要内容与例题，如即期利率与远期利率、通货膨胀债券等。

(5)增添了100道复习思考题及其答案，给有兴趣的读者提供更多的练习机会。

(6)按正文进度对每章习题进行了重新编号，以便读者能尽可能地依次完成各习题的解答。

本次修订力求使教材更正确、更科学、更简明，减轻读者学习负担，增强教材实用性与趣味性，从而提高读者分析问题、解决问题的能力。

本次修订是在西南财经大学“十一五”“211”工程资助下完成的。而且，本人是卓志教授主持的国家级精品课程“寿险精算”的主讲教师，本教材也是该课程重要学习资料与精品课程建设重要成果之一。在此向有关资助者致以诚挚的谢意。本书在修订过程中，自始至终得到了西南财经大学出版社工作人员的认真帮助，他们一丝不苟、任劳任怨的工作热情，确保了本书得以高质量地修订，在此表示衷心的感谢。

在本书修订过程中，尽管笔者投入了不少精力与时间，但错误仍将难免。恳请读者不断地提出宝贵意见，以便将来进一步修订。欢迎广大读者致信zhangyg678@126.com，本人将不胜感激。

张运刚

2011年6月

第一版前言

利息理论与应用是金融学、保险学专业的核心课程之一，也是精算师资格考试的必考内容。众所周知，精算是保险经营的基石与保证，精算师是评估未来财务风险的专家，是保险公司等机构的核心决策人物，享有崇高的声誉与地位。要成为一名精算师，绝非易事。除了要具备坚实的数学功底之外，还必须对金融、保险、经济、投资、财务、人口、统计等学科的知识和原理有深刻的理解；同时，还需要通过一系列的资格考试，一般需要五至七年时间。然而，我国的精算教育与资格考试起步比较晚，精算师的实际工作经验还需进一步积累。保险被认为是朝阳产业，未来我国精算师的缺口较大，因而选择精算师职业道路艰辛但前景广阔，且极富挑战性。

本人从事利息理论与应用等保险精算课程的教学多年，也参加过日本精算师资格考试，其中酸甜苦辣略知一二。结合在日本精算师资格考试中心学习与参加中国精算师资格考试的经历，本人编写了这本教材，希望能为参加精算师考试的考生提供方便。虽然利息理论与应用是保险精算师资格考试的基础课程，但它应用十分广泛。因为利率是重要的经济杠杆，利息问题无所不在。本书试图采用深入浅出的语言，注重知识的系统性与完整性，并加强规律与特点的归纳，为读者学习与研究提供方便。全书共分七章，第一章主要介绍利息的三种度量方式，构成全书基础。第二章主要介绍各种年金现值与终值的计算。这两章构成全书理论部分，其余章节是这些理论的具体应用。第三章主要研究投资收益率。第四章主要研究债务偿还问题。第五章主要探讨债券与股票的定价问题。第六章则研究诚实信贷、抵押贷款、资产折旧、投资期限、资产与负债匹配等问题。第七章将利率作为随机变量来研究有关现值与终值的计算等问题。每章小结对全章内容进行简明概括，并列出了全章最重要的公式，同时还配有大量习题供读者练习。最后，本书给出了全书习题参考答案。

本书可作为保险学、精算学、金融学、投资学等专业或方向的本科生、研究生教材，也适合于立志从事精算职业的读者自学与参考。

本书得到了西南财经大学“十五”“211 工程”保险精算项目的资助，特此致谢。同时，感谢西南财经大学保险学院和西南财经大学出版社提供的支持与帮助，尤其是责任编辑李霞湘等同志不厌其烦的工作，确保了本书能高质量地奉献给读者。

由于本人才疏学浅，加之时间仓促，本书错误在所难免，恳请批评指正。

西南财经大学保险学院　**张运刚**

2005 年 10 月

目　录

第一章　利息的度量及其基本计算

第二章　确定年金

第三章　投资收益分析

第四章 债务偿还方法

第五章 证券的价值分析

第六章 利息理论的进一步应用

第七章 利息的随机处理

复习思考题

习题参考答案

附录

附表

参考文献

第一章 利息的度量及其基本计算

本章主要研究与利息有关的概念、利息的三种度量方式，以及现值、终值、投资期限、利率等的基本计算。

第一节 利息的度量

一、利息

（一）利息

利息是资金的价格，是借款者支付给贷款者使用其资金的代价。换言之，利息是指在一定时期内，资金的所有人将使用资金的自由权转让给借款人之后所得到的报酬。通常利息按存款或贷款的本金、利息率与期限的乘积计算而得，而在利息理论、保险精算中，利息的多少还与利息的度量方式有关。利息是在信用的基础上产生的一个经济范畴。

（二）利息的来源与意义

由借款人支付利息给贷款人在当代经济生活中相当普遍，很难想象没有利息经济该怎样运行。然而历史上并不总是这样认为的：哲学家亚里士多德曾经谴责取得利息是一种非生产性和不道德的行为；在中世纪，所有的高利贷被天主教禁止。今天，只有"过多"的利息才被禁止。

西方经济学对利息来源的解释很多。如"节欲论"认为是资本所有者不将资本用于当前生活消费而得到的报酬，或者等待将来消费而得到的报酬。

"时差利息论"认为，利息产生于人们对现有财货的评价大于对未来财货的评价，现在的一元比未来的一元更值钱，利息是价值时差的贴水。大多数企业和个人都更愿意今天有钱，而不是明天拥有同样多的货币，利息不过是一种补偿。

"流动偏好论"认为,利息是放弃流动偏好所得到的报酬。

马克思的劳动价值论认为一切价值都是劳动创造的,节欲、等待、对财货时间价值的主观评价以及资本本身,都不会使价值增大。贷款人之所以愿意支付利息,是因为他能将借来的货币投入到生产中,能取得一定的利润,利息只不过是利润的一部分。利息是剩余产品的价值形态,因而利息来源于剩余产品。

不同社会制度下的利息体现着不同的生产关系。在前资本主义社会,高利贷者以利息的形式,不仅榨取生产者的剩余劳动,而且也榨取一部分必要劳动。

在资本主义社会,利息是职能资本家为取得借贷资本家或银行资本家的货币资本而付给借贷资本家或银行资本家的一部分利润,利润只不过是剩余价值的转化形式。因此,从本质上讲,资本主义利息是工人在生产过程中创造的一部分剩余价值,它体现着资产阶级剥削无产阶级的生产关系,也体现着借贷资本家、银行资本家同职能资本家共同瓜分剩余价值的关系。

在社会主义社会,利息仍然产生于生产过程,是劳动者创造的价值,各种利息最终都来源于企业的纯收入。我国企业创造的纯收入,一部分作为税收上缴财政,一部分形成生产者的积累,一部分以利息的形式付给借贷资金的所有者。借出的资金量越多,在纯收入分配中所占的份额也就越大,因此社会主义的利息体现的是一种按资分配纯收入的关系,但这并不意味着完全不存在剥削关系。

利息,特别是利率,还是合理配置资源、提高资源利用效率、调节国民经济活动的重要杠杆。

从理论上讲,资本和利息可以是货币,也可以不是货币,但本书所说的资本和利息均限于货币。

二、现值函数与终值函数

(一) 本金、利息与积累值的关系

任何一项普通的金融业务都可被视为投资一定数量的资金以产生一定的利息。我们把每项业务开始时投资的金额即初始投资的金额称为本金(或俗称母金),而把经过一段时期后连本带利收回的总金额称为在该时刻的积累值。积累值与本金的差额就是这一段时期产生的利息,也就是投资期间所得到的利息报酬。显然,本金 + 利息 = 积累值。

在整个投资期间的任何时刻收回的金额都是积累值,特别地,在整个投资期结束时的积累值称为终值。同时,积累值也可以看成是终值,只需把所考察的期间当成整个投资期来处理。因此,为了叙述方便起见,本书不区分积累值与终值。

决定终值大小的因素有三个:① 本金;② 投资期限(即投资所经历的时间长度);③ 利息的度量方式。在本金、利息的度量方式都确定的条件下,终值则是所经历的时间的函数。这里的时间长度的度量单位,可以是一年、一个季度、一个月、一天,也可以是任何一个时间长度,如5.33年,究竟选择多长时间取决于研究的目的。为了方便起见,我们将这样的时间长度单位称为"时期"或"期"。同时,利息度量方式中包括了利

率的大小及其表达方式。

（二）终值函数与总量函数

1. 终值函数 $a(t)$

1 单位本金从投资之时起，经过 t 期后的积累值或终值，记为 $a(t)$。在利息度量方式一定的条件下，$a(t)$ 是所经历的时期 t 的函数，称为终值函数或积累值函数。它具有如下性质：

(1) $a(0)=1$。

(2) 一般地，$a(t)$ 为 t 的增函数（未必是严格的）。$a(t)$ 也可能在某个时期递减，但正常情形下应该是随着投资期间的延长，利息逐渐积累，因而收回的金额应越来越多，故有此性质。

(3) 当利息连续产生时，$a(t)$ 为 t 的连续函数。但若认为利息仅在付息日产生，$a(t)$ 就为 t 的非连续函数，不过这种假设是不合理的。

2. 总量函数 $A(t)$

$K(K>0)$ 个单位本金，经历 t 期后的积累值或终值，记为 $A(t)$。在利息度量方式一定的条件下，它同样是所经历的时期 t 的函数，称为总量函数。在现实生活中，本金不为 1 的情形是客观存在的，因此研究 $A(t)$ 更具有普遍的现实意义。不过也可以将 K 个单位本金视为 1 个单位本金，此时就成为上面所述的积累值或终值函数的情形了。

$A(t)$ 具有与 $a(t)$ 类似的性质：

(1) $A(0)=K$。

(2) 一般地，$A(t)$ 为 t 的增函数。

(3) 当利息连续产生时，$A(t)$ 为 t 的连续函数。

3. 总量函数与终值函数的关系

$$A(t)=Ka(t) \quad 或 \quad A(t)=A(0)a(t) \tag{1.1.1}$$

即 $K\xrightarrow{\times a(t)}Ka(t)$，因此称 $a(t)$ 为积累因子，称该过程为积累过程。

（三）现值函数

现值函数是指为了获得未来一定数量的货币而在现在必须投入的金额，这个金额称为未来一定数量的货币在现在时刻的现值。简言之，将未来一定数量的货币按一定方式折算为现在的价值，称为现值。

为了获得 t 期后的 1 个单位货币，现在必须投入的金额，即现值，记为 $a^{-1}(t)$。显然，$a^{-1}(t)$ 经过 t 期的积累可以达到终值 1，即 $a^{-1}(t)\cdot a(t)=1$，从而 $a^{-1}(t)=\dfrac{1}{a(t)}$。这里可以看出，记号 $a^{-1}(t)$ 中的 -1 实际上就是幂指数。在利息度量方式一定的条件下，$a^{-1}(t)$ 是 t 的函数；因为 t 期后的 1 个单位货币的现值为 $a^{-1}(t)$，所以 t 期后 B 个单位货币的现值为 $Ba^{-1}(t)$，即 $Ba^{-1}(t)\xleftarrow{\times a^{-1}(t)}B$，因此称 $a^{-1}(t)$ 为折现因子，称该过程为折现过程。

从上面的分析不难看出,积累与折现是两个互逆的过程。注意:这里的箭头方向是由右方指向左方,寓意将未来值折算为现值。

综上所述,积累值与过去有关,现值与未来相联系,既与过去又与现在相联系的值称为当前值。实际上,这些概念都是一些相对概念,即相对于我们考察问题的时点而言的概念。在利息理论、保险精算等理论与实务中,由于货币在不同时点具有不同的价值,不同时点发生的金额不能直接比较,也不能直接相加减,因此,我们首先必须明确站在哪个时点来考虑问题。为简便起见,以后把这样的时点称为观察时点,简称为观察点。虽然有些书将其称为可比日或可比点,但笔者更愿意形象地称之为观察点。于是,不同时点发生的金额,要么通过积累,要么通过折现,换算为在观察点的值,这样就可以比较和运算了。

今后,凡涉及资金的运动,可以按资金的流入与流出、借款与偿还或投资与收回来分清运动方向,并用"收支平衡原则"进行分析。因此,笔者将"观察点""时期""收支平衡原则"称为利息理论的"三大法宝",当然它也是寿险精算的"三大法宝"。掌握了这"三大法宝",解决利息理论等课程中的有关问题将变得轻松自如。

三、利息的度量

利息可以用三种方式来度量:一是用利息率来直接度量利息;二是用贴现率来间接度量利息;三是用利息力来度量瞬间利息。

(一) 利息率

利息率简称利率,它是一定时期内产生的利息与投入或贷出的本金之比。它反映了单位本金在单位时期内产生利息的多少。通常有年利率、月利率和日利率三种具体形式。年利率用本金的百分之几表示,月利率用本金的千分之几表示,日利率用本金的万分之几表示。在利息理论、寿险精算中,将利息率区分为实际利率与名义利率,从而可使许多公式(如年金的现值与终值公式)表现形式简明且统一。

1. 实际利率

所谓实际利率就是一个时期内实际产生的利息与期初投入的本金之比,它反映了单位本金在单位时期内产生利息的水平高低。通常把一年结算一次的年利率称为年实际利率。注意在实际利率所涉及的时期内中途不结转利息,而是到期满时刻才结算该期利息。

假设某投资在第 t 期末的积累值为 $A(t)$ 或 $a(t)$,第 t 期的实际利率为 i_t,则

$$i_t = \frac{A(t) - A(t-1)}{A(t-1)} = \frac{a(t) - a(t-1)}{a(t-1)}, t \in N \tag{1.1.2}$$

显然,下列关系式成立:

$$A(t) = A(0)(1+i_1)(1+i_2)\cdots(1+i_t) \tag{1.1.3}$$

$$a(t) = (1+i_1)(1+i_2)\cdots(1+i_t) \tag{1.1.4}$$

例 1.1.1 今有某项 1 500 元的投资,若在第 1 年年末收回,则可以收回 1 700 元;若在第 2 年年末收回,则可以收回 2 000 元;若在第 3 年年末收回,则可以收回 2 500

元。求各年的实际利率。

解:由题意知,$A(0)=1\,500$;$A(1)=1\,700$;$A(2)=2\,000$;$A(3)=2\,500$;因此

$$i_1=\frac{A(1)-A(0)}{A(0)}=\frac{1\,700-1\,500}{1\,500}\approx 13.33\%$$

$$i_2=\frac{A(2)-A(1)}{A(1)}=\frac{2\,000-1\,700}{1\,700}\approx 17.65\%$$

$$i_3=\frac{A(3)-A(2)}{A(2)}=\frac{2\,500-2\,000}{2\,000}=25\%$$

所以,第1年、第2年、第3年的年实际利率分别为13.33%、17.65%和25%。

当投资期间包含了若干个时期或若干年(不一定为整数)时,在实务中如何来度量利息就涉及单利和复利问题。

(1)单利

单利即按本金计算出的利息不再加入到本金之中,不在下一期产生新的利息,即利上无利。其计算公式为:利息 = 本金 × 利率 × 时间。

假设每期利率为 i,在时刻 t(即刚刚经历 t 期后的那一时刻,今后不再特别声明)按单利计算的终值 $a(t)$ 为

$$a(t)=1+it\ (t\geqslant 0) \tag{1.1.5}$$

显然,(1.1.5)式对整数 t 成立,下面只需说明该等式对非整数的正实数 t 也成立。

事实上,根据单利的定义可知

$$i(t+s)=it+is \tag{1.1.6}$$

即1单位本金在 $t+s$ 期上产生的利息等于在 t 期上产生的利息与在 s 期上产生的利息之和;从数学上看,只不过是乘法分配律的应用。由于1单位本金在 t 期内产生的利息可以表示为 $a(t)-1$,因而(1.1.6)式也可以表示为

$$a(t+s)-1=[a(t)-1]+[a(s)-1]$$

即

$$a(t+s)=a(t)+a(s)-1 \tag{1.1.7}$$

(1.1.7)式对非负整数 t 和 s 显然是成立的,我们可以合理地认为它对一切非负实数 t 和 s 也成立。

假设 $a(t)$ 可导,由导数的定义有

$$a'(t)=\lim_{s\to 0}\frac{a(t+s)-a(t)}{s}=\lim_{s\to 0}\frac{[a(t)+a(s)-1]-a(t)}{s}$$

$$=\lim_{s\to 0}\frac{a(s)-a(0)}{s}=a'(0)$$

这是一个与 t 无关的常数。

显然

$$\int_0^t a'(r)\,\mathrm{d}r=\int_0^t a'(0)\,\mathrm{d}r$$

$$a(t)-a(0)=a'(0)t$$

即

$$a(t)=1+a'(0)t$$

令 $t=1$,由于 $a(1)=1+i$,因此,$a'(0)=i$。从而,$a(t)=1+it$,这里 t 为非负实数,即(1.1.5)式得证。

(2)复利

复利即按本金计算出的利息加入到本金之中以在下一期产生新的利息,即利上加利,俗称"利滚利"。

假设每期利率为 i,在时刻 t 按复利计算的终值 $a(t)$ 为

$$a(t)=(1+i)^t \quad (t\geqslant 0) \tag{1.1.8}$$

不难看出(1.1.8)式对整数 t 是成立的,下面只需说明等式对非整数的正实数 t 也成立。

容易知道

$$(1+i)^{t+s}=(1+i)^t\cdot(1+i)^s$$

即

$$a(t+s)=a(t)\cdot a(s) \tag{1.1.9}$$

(1.1.9)式对非负整数 t 和 s 显然是成立的,且是有意义的,它反映了现在投资1个单位的货币,经历 $t+s$ 期的积累而获得的积累值等于这1个单位的货币先经历 t 期的积累再经历 s 期的积累而获得的积累值。自然我们可以合理地认为它对一切非负实数 t 和 s 也成立。

现在我们将从(1.1.9)式出发,证明(1.1.8)式对一切非负实数也成立。

事实上,假设 $a(t)$ 可导,由导数的定义有

$$a'(t)=\lim_{s\to 0}\frac{a(t+s)-a(t)}{s}=\lim_{s\to 0}\frac{a(t)a(s)-a(t)}{s}$$

$$=a(t)\cdot\lim_{s\to 0}\frac{a(s)-a(0)}{s}=a(t)\cdot a'(0)$$

$$\frac{a'(t)}{a(t)}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln a(t)=a'(0)$$

$$\therefore\ \int_0^t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\ln a(r)\,\mathrm{d}r=\int_0^t a'(0)\,\mathrm{d}r$$

即

$$\ln a(t)-\ln a(0)=t\cdot a'(0)$$

令 $t=1$,并由 $a(1)=1+i$,可得 $a'(0)=\ln(1+i)$,从而有 $a(t)=(1+i)^t$,即(1.1.8)式对一切非负实数 t 都成立。

(3)单利、复利条件下的现值

单利条件下的现值为:

$$a^{-1}(t)=\frac{1}{1+it} \tag{1.1.10}$$

复利条件下的现值为:

$$a^{-1}(t)=\frac{1}{(1+i)^t} \tag{1.1.11}$$

例 1.1.2 已知每期利率为 i,分别求在单利、复利条件下第 n 期的实际利率。

解:在单利条件下

$\because a(t) = 1 + it$

$$\therefore i_n = \frac{a(n) - a(n-1)}{a(n-1)} = \frac{(1+ni) - [1+(n-1)i]}{1+(n-1)i} = \frac{i}{1+(n-1)i}$$

显然,i_n 是 n 的减函数,即常数的单利意味着递减的实际利率。

在复利条件下

$\because a(t) = (1+i)^t$

$$\therefore i_n = \frac{a(n) - a(n-1)}{a(n-1)} = \frac{(1+i)^n - (1+i)^{n-1}}{(1+i)^{n-1}} = i$$

显然,常数的复利意味着常数的实际利率。

例 1.1.3 证明:

$$(1)(1+i)^n > 1 + ni \quad (n > 1, -1 < i \neq 0) \tag{1.1.12}$$

$$(2)(1+i)^n = 1 + ni \quad (n = 1, -1 \leqslant i) \tag{1.1.13}$$

$$(3)(1+i)^n < 1 + ni \quad (0 < n < 1, -1 < i \neq 0) \tag{1.1.14}$$

证明:

(1) 考虑函数 $f(i) = (1+i)^n - (1+ni)$

$f'(i) = n[(1+i)^{n-1} - 1]$

$\because f'(i) < 0 \quad (-1 < i < 0)$ 且 $f'(i) > 0 \quad (i > 0)$

$\therefore f(i)$ 在 $i = 0$ 时取得最小值,即 $f(i) > f(0)(-1 < i \neq 0)$,从而(1.1.12)式得证。

(2) 容易验证(1.1.13)式成立。

(3) 考虑函数 $f(i) = (1+i)^n - (1+ni)$

$f'(i) = n[(1+i)^{n-1} - 1]$

$\because f'(i) > 0(-1 < i < 0)$ 且 $f'(i) < 0(i > 0)$

$\therefore f(i)$ 在 $i = 0$ 时取得最大值,即 $f(i) < f(0)(-1 < i \neq 0)$,从而(1.1.14)式得证。

说明:

(1) 现在可断言,命题"在本金、利率、期限均一定的条件下,按复利计算的终值一定大于按单利计算的终值"为假命题。

(2) 不少书籍将 i 的取值范围限定在 $0 < i < 1$。笔者认为,这有一定的缺陷。事实上,i 可以为负数,甚至可以为 -1,只不过意味着有一部分甚至全部本金都收不回来,因而不能否认 $i < 0$ 这种情形的客观存在性。从数学上看,$f(i)$ 的定义域为 $(-1, +\infty)$,从理论上讲,i 是可以大于或等于 -1 的,只不过 $0 < i < 1$ 似乎更合理些罢了。

(3) 当积累期限超过1期时,复利终值大于单利终值;当积累期限短于1期时,复利终值小于单利终值;当积累期限等于1期时,复利终值等于单利终值。

(4) 读者可以用实例去验证。如年利率为6%,在单利和复利的条件下,分别比较20 000元本金在8个月后、3年后的终值大小。

例 1.1.4 某银行以单利计息,年利率为6%。某人存入银行5 000元,5年后积累

值是多少?如果以复利计息,在其他条件不变时,结果又如何?

解:

对于单利情形

$$A(5) = 5\,000a(5) = 5\,000(1 + 5 \times 6\%) = 6\,500(\text{元})$$

对于复利情形

$$\tilde{A}(5) = 5\,000\tilde{a}(5) = 5\,000(1 + 6\%)^5 = 6\,691.13(\text{元})$$

注意:$\tilde{A}(5)$ 与 $A(5)$、$\tilde{a}(5)$ 与 $a(5)$ 没有本质区别,含义均一样,都表示第 5 年年末的积累值。在其头上加上波浪线,仅仅是为了区分单利与复利情形。今后,在同一例题解答中,出现类似情形而又没有特别指出其含义时,均是出于区分的目的。

例 1.1.5　已知年实际利率为 8%,求 4 年后支付的 10 000 元的现值。

解:设所求现值为 x 元,则

$$xa(4) = 10\,000$$

即

$$x(1 + 8\%)^4 = 10\,000$$

$$\therefore x = 7\,350.30(\text{元})$$

或

$$10\,000a^{-1}(4) = 10\,000(1 + 8\%)^{-4} = 7\,350.30(\text{元})$$

2. 名义利率

假设年利率为6%,每1 年结转利息4 次,那么每一季的利率为$\frac{6\%}{4} = 1.5\%$。若现在投入本金 1,则在 1 年后的终值为$(1 + 1.5\%)^4 \approx 1.061\,4 = 1 + 6.14\%$。即年初的单位 1 按照 1 年结息 4 次的方式,在年末增值6.14%,这6.14%就称为年实际利率,而计算所采用的初始年利率 6% 则称为年计息 4 次的年名义利率,1.5%称为季实际利率。显然,年名义利率是季实际利率的 4 倍。

一般地,如果一期结息 m 次,那么称$\frac{1}{m}$期的实际利率的 m 倍为该期的名义利率,记为 $i^{(m)}$。由此可得,$\frac{1}{m}$期的实际利率为$\frac{i^{(m)}}{m}$。

设一期计算 m 次利息的名义利率为 $i^{(m)}$,该期的实际利率为 i,下面将推导出二者的关系。假设期初投入的本金为单位 1,按名义利率方式积累到期末的过程如表 1-1-1 所示。该表反映了在按每期计算利息 m 次的名义利率方式下期初的本金 1 在期末的终值为$\left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m$,将其写成 $1 + i$ 的形式;它表明按每期计算利息 1 次,每期实际利率为 i,那么期初的本金 1 在期末的终值为 $1 + i$,因此,

$$\left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m = 1 + i \tag{1.1.15}$$

我们称满足(1.1.15)式的 $i^{(m)}$ 与 i 具有等价关系,即相同的本金经历相同的时间可以得到相同的终值。换言之,获得的效果一样,而并非二者大小相等。