

全国高等教育自学考试指定教材配套辅导丛书(续 I)

自考过关教练

高等数学(一)

自学考试题解

主编 许雪芬 崔谟珍 吕胜关 张立龙



经济管理类

教材同步
应试必备

中华工商联合出版社

自考过关教练

高等数学（一）

自学考试题解

主编 许雪芬 崔谟珍
吕胜关 张立龙

中华工商联合出版社

责任编辑 魏鹤冬 王国瑞

封面设计 朱 懋

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(一)自学考试题解/许雪芬主编. —北京:中华工商联合出版社, 2001. 3

(高等教育自学考试指定教材配套辅导丛书; 续 I: 经济管理类)

ISBN 7-80100-403-5

I. 高… II. 许… III. 高等数学-高等教育-自学考试-解题
IV. 013-44

中华工商联合出版社 出版、发行

北京市东城区东直门外新中街 11 号

邮编: 100027 电话: 64153909

郑州文华印刷厂印刷

新华书店总经销

850×1168 毫米 1/32 印张 14.625 250 千字

2001 年 3 月第 3 版 2001 年 3 月第 1 次印刷

印数 1—11000 套

ISBN7-80100-403-5/F·127

本册定价: 15.00 元

全套定价: 295.00 元

出版介绍

对自考生来说,有本教材,还需要一本好辅导!

那么,您打开的这本辅导书怎么样呢?

编写依据 本书严格按照国家自考委颁布的自考大纲和组编教材的内容及章节顺序编写。对照章节,同步教材,使用方便。

内容特点 凡参加过自考的读者都有这样的经验——要取得好成绩,除认真领会教材外,还必须根据教材内容,依照试卷的不同题型,进行有针对性的训练。本书的大量篇幅全部集中于此。

第一部分——自学考试门径 从宏观上对本课程在整个专业体系中的地位、自学方法、考试要求、试卷结构以及应考技巧作一概要性的介绍,使考生对参加该门课考试有个总体上的了解。

第二部分——综合复习题解 按教材章节顺序,首先进行考核点提示,然后把课本中的重点及题眼用单选、多选、填空、判断、简答、计算、证明等不同的题型反映出来,供考生练习,以增强记忆,强化复习效果。并附有参考答案,供读者对照。

第三部分——考前模拟试题 为了使考生对该门课程的考试要求、考试题型、题量及分布有所了解,提高考场实战能力,本书根据历年考试的标准试卷提供了一套模拟试题,供考生进行考前自我测试和适应性训练。附有评分标准和答案。

作者组成 本书的作者是多年从事本课程的教学和科研工作的大学教师,他们对自学考试教材吃得很透,且具有长期辅导自学考试的经验,积累了大量的资料,掌握较多的信息,对考生参加考试将会起到好的指导作用。

故而,这是您很需要的一本辅导书!

买回一本好辅导,助您考得好成绩!

前 言

为了帮助广大参加自学考试的同学更好地学习高等数学(一),我们特编写了这本自学考试题解。

本书严格按照国家自考委最新颁布的自考大纲和组编教材的内容及章节编写,题解与教材同步,紧扣重点,易于学习,便于掌握。

本书按章讲述各部分的基本内容和重要概念、定理及公式。围绕各个主题精选例题,总结运算技巧,使读者能较快地掌握所学内容,提高计算能力和分析问题、解决问题的水平。

本书的内容与深度,也适合于本科电大生和函授生阅读及参考。

鉴于我们的水平有限,难免有不少欠妥之处,恳请专家和读者批评指正。

编 者

1998 年 1 月

目 录

出版介语	(1)
前言	(1)
第一部分 高等数学(一)自学考试门径	(1)
第二部分 高等数学(一)综合复习题解	(5)
第一章 函数及其图形	(5)
1.1 集合	(6)
1.2 映射	(7)
1.3 函数	(8)
1.4 经济学中的常用函数	(22)
1.5 总练习题一	(24)
第二章 极限与连续	(35)
2.1 数列的极限	(35)
2.2 函数的极限	(41)
2.3 极限的运算法则	(45)
2.4 极限存在的两个准则, 两个重要极限	(46)
2.5 函数的连续性	(51)
2.6 无穷大量和无穷小量	(62)
2.7 总练习题二	(67)
第三章 导数与微分	(85)
3.1 导数概念	(86)
3.2 求导法则和基本求导公式	(96)
3.3 高阶导数	(115)
3.4 微分	(120)

3.5	导数在经济分析中的应用	(125)
3.6	总练习题三	(132)
第四章	中值定理与导数的应用	(159)
4.1	中值定理	(160)
4.2	导数的应用	(170)
4.3	凸性、拐点和渐近线	(197)
4.4	函数极值在经济管理中的应用举例	(210)
4.5	总练习题四	(216)
第五章	积分	(249)
5.1	不定积分	(249)
5.2	定积分	(267)
5.3	广义积分	(275)
5.4	定积分的应用	(279)
5.5	总练习题五	(287)
第六章	无穷级数	(312)
6.1	常数项级数	(312)
6.2	数项级数的收敛性判别法	(316)
6.3	幂级数	(321)
6.4	泰勒公式与泰勒级数	(324)
6.5	总练习题六	(327)
第七章	多元函数微积分	(343)
7.1	多元函数	(343)
7.2	偏导数	(348)
7.3	全微分	(353)
7.4	多元复合函数求导法则和隐函数求导公式	(356)
7.5	多元函数偏导数的应用	(364)
7.6	二重积分	(369)
7.7	总练习题七	(381)

第八章 微分方程初步	(406)
8.1 微分方程的一般概念	(406)
8.2 一阶微分方程	(409)
8.3 可降阶的高阶微分方程	(416)
8.4 常系数二阶线性微分方程	(424)
8.5 常微分方程在经济分析中的应用举例	(432)
8.6 总练习题八	(434)
第三部分 高等数学(一)考前模拟试题	(441)
模拟试题	(441)
答案	(448)

第一部分

高等数学(一)自学考试门径

高等数学是一门工具课程,它是学习许多其他课程如会计学、财务管理学、统计学等的基础。许多参加自学考试的同志,如参加工业经济管理专业、会计专业、计算机专业等自学考试的同志,往往因为掌握不好高等数学的工具而影响其他课程的学习,有的甚至半途而废,从而与毕业文凭无缘。

科学发展到今天,我们已可毫不含糊地说,一切自然科学及社会科学都离不开数学。因此,学好了高等数学,就掌握了又一把打开科学大门的金钥匙。

那么,如何学好高等数学这门课程呢?学习方法很重要。许多人带着学习初等数学的习惯,以为多解一些题就行了。其实不然,题能解得完吗?而且随着生产的发展,各种题型不断出现,各种解题方法也在不断创新,光解题是掌握不了数学的精髓从而无法在实践中应用它的。要学好高等数学,最重要的是掌握好概念,是深入地、从各个角度透彻地去理解概念,而不是死记硬背概念。例如,对于函数极限的概念,有部分同志死背了这段话,甚至把“ ϵ - δ ”语言都背熟了,但究竟什么是极限,他们并不理解。理解好概念,掌握住概念的本质,将大大加速学习的进程。其次,一些重要的公式,例如求导公式、积分公式等,和一些重要的定理,例如中值定理等,必须牢牢记住,倒背如流。我们在教学过程中经常发现一些同志把求导公式、积分公

式当作可查资料,用时再翻附表。那是绝对行不通的。对重要的公式、法则,必须背得滚瓜烂熟,丝毫不差。最后,多做些习题也很重要。通过解题,更好地理解概念,更熟练地掌握公式。通过解题,也能积累一些技能技巧,从而增长解决实际问题的本领。

自学考试与在校生的考试是有很大差异的。同样强调掌握基本概念和基本技能技巧,但自学考试对自考生的要求更多些。因此,考试面广,几乎每章每节都考,题量大,类型多。如果你对所学的几个重要概念,例如极限、连续、导数、不定积分和定积分,掌握牢固了,心中很清楚了,对几套公式也熟练掌握了,那就符合了考试的基本要求,就能顺利地考试过关。

一份考卷中,难、中、易的试题量大致按 1:3:2 的比例分布。因此,一份试卷中有一半以上的试题是较容易的或中等难易程度的。这些题主要考基本概念、基本公式和基本计算。学习不是为了考试,但考试方向确定了你应努力掌握知识的方向。这是你真正应该学到的东西,也是今后实际工作中应用最多的东西。

在本课程中,集合、函数、极限与连续等知识是基础部分,微分与积分部分是主体部分,也是核心部分。无穷级数与主体部分有密切的联系,但也有其独特的内容。微分方程是有很实际的背景的,必须掌握其解题方法。因此,考试题量的分布便一目了然了。我们曾作过几年的考试题量分布统计,基础部分一般占 15%~20%,主体部分占 55%~65%,级数和微分方程各占 8%~10%。

试卷的考查形式有单选题、多选题、判别题、填空题、计算题、应用题、证明题等。前四项占 40 分,计算题占 40 分,应用题占 16 分,证明题占 4 分。当然,各次考试的形式会略有变化,占分也会稍有差异,但经过十多年考试而形成的模式不会有太大的变化。这是因为数学是一门基础的自然科学,具体的考试题可以千变万化,但考查的基本内容、方式、分布等是基本不变的。

有的同学以为单选题就是从四个答案中猜一个正确的答案,这

显然是非常错误的。科学的东西,尤其是数学,是一点也猜不得的。正确的方法是按照你所掌握的概念或公式,或者经过简单的计算,把对的答案写出来。多项选择题更是如此。例如一个概念,它有几个等价的叙述,它们都是正确的。那几个不正确的答案,就是平时大家容易模糊的地方,是因为概念掌握不准而容易导致错误的地方。又如,不少计算题可以有各种不同的表达形式,或者由于计算途径不同而导致结果的形式不同,它们都是正确的答案。具体的例子以后将会举到。但是,尽管各种答案的形式不同,其实质却是完全一样的。这不是初等数学中的一加二等于三,而是由高等数学研究主体函数的特性所产生的结果。填空题主要考基本公式及简单计算。计算题,按大纲要求,主要是求极限,求导数,求微分,求不定积分,求定积分,求二重积分,判定级数敛散性,求幂级数收敛域,解微分方程,等等,这些都是必须考的内容,大家必须会计算。应用题应该掌握两大类题的解法,一是求平面图形的面积和旋转体的体积,一是导数与积分在经济分析中的应用问题。当然,作图题也可以算是应用题,通过函数图像来分析变量之间的关系及其变化规律,要讨论函数的定义域、奇偶性、增减性与极值、凹凸性与拐点、渐近线,等等。因此,作图题既是应用题,又是综合性的计算、分析题。证明题也可分为两大类,一类是计算型证明题,从左边起一直计算推导到右边;另一类是利用重要定理,如介值性定理、中值定理等进行证明。

上面我们对试题类型的解释,就是为了让读者在学习前先做到心中有数,增强信心,消除惧怕心理。学习高等数学其实并不难,重视概念,掌握正确的学习方法,多做一些习题,便一定能学好。

学习完全部课程后,再回过头来系统地总结一下,这很重要。复习并不是重复再学一遍,复习是总结、提高。有不少问题在当时是无法解决的,当你学了后面的知识后,就可以用后面的方法去解决了。学习犹如爬山。在你一步一步往山顶爬时,你并不一定能看到自己所走的是一条捷径还是一条弯路。爬到山顶时再回头看看自己所走

过的路,心里便会豁然开朗了。学知识也是这样,经常是曲中有直,直中有曲。走弯路并不一定是坏事,关键在于你能不能走出弯路。走出弯路便是找到了真理。

考试其实是一种很好的检查自己书本知识掌握程度高低的方法,我们不应该惧怕它。不少同志就是因为存在畏惧心理,一上考场就晕了,平时会做的题也解答不出来了,发挥不出应有的水平。所以,参加考试,心理准备很重要。

当然,应试技巧也很重要。我们认为,“先抱西瓜再拣芝麻”这一战术运用得好,可以大大提高考试成绩。也就是说,先做计算题,再做应用题、证明题,最后再做选择题、填空题。把计算题、应用题大部分都做完了,心理负担便减轻了一半,脑子也冷静多了。再一分一分地做小题,即拣芝麻。对于单选题,可以用计算法,选择与自己计算结果一致的答案作为正确答案;也可以用验证法,四个答案一个一个地检验,确定其中一个为正确答案;有时也可用观察法、比较法、排除法等来确定正确答案。对于不同类型、不同内容的试题,其实都有其不同的应试技巧,我们将在各章例题中讲述。

上面我们对本课程的重要性、学习方法、考试要求、试卷结构及应试注意事项等进行了一般性的讨论,目的在于使读者在学习本课程之前有一个总体认识,有一个大概的轮廓。大家在学习过程中可以深入体会。在学完本课程后再重读这一段内容,或许会有更多的心得和体会。

第二部分

高等数学(一)综合复习题解

第一章 函数及其图形

现实世界中的一切事物,所有的量,都是在不断地变化着的,都是变量。各种变化着的量之间都存在着相互依赖、相互作用的关系,只是这种依赖和作用关系在程度上大小不同而已。函数就是研究变量与变量之间的相互依存关系。高等数学研究的对象就是函数,它是这门学科最重要的概念之一。

本章的基本要求为:

- (1) 了解集合的概念及其表示方法,元素与集合之间的关系,集合与集合之间的关系,集合的并、交、差、补的运算法则;
- (2) 掌握函数的概念,会求函数的定义域、值域,理解函数关系的意义,复合函数的意义及其复合过程,反函数的意义及求法;
- (3) 掌握函数的简单性质及其几何意义;
- (4) 理解分段函数的意义,掌握其表示法及几何意义;
- (5) 熟练掌握五种基本初等函数(幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数)的定义、几何意义、性质及其图像;

(6) 了解经济学上一些常见函数的解析式及其图形,对常见的经济问题,会建立函数关系式。

本章的重点为:函数的概念,函数关系的建立,函数的定义域,函数的性质,函数的图像,复合函数及分段函数的概念。

1.1 集 合

例 1.1 给定集合 A, B 及元素 a , 下列关系中正确的是()。

- (A) $A \in B$ (B) $a \subset A$
(C) $A \subset B$ (D) $A \subset B$ 或 $B \subset A$ 或 $A \cap B = \emptyset$

解 集合与集合之间的关系只能是包含、相交、不相交等,没有“属于”之类的关系。同样,元素与集合之间也只有属于或不属于的关系。对于任意给定的两个集合,只能说它们之间有无包含关系,是相交还是不相交。正确答案为(D)。

例 1.2 下列集合中为空集的是()。

- (A) $\{\emptyset\}$ (B) $\{0\}$
(C) $\{x \mid x^2 + 1 < 0, x \in R\}$ (D) 0

解 $\{\emptyset\}$ 是由空集组成的集合,怎么能是空集呢? 0 是一个元素,谈不上是空集或非空集;由 0 组成的集合是非空的。因此,只有(C)是正确答案。

例 1.3 设 $A = \{x \mid -3 \leq x \leq 5\}$, $B = \{x \mid 0 < x < 8\}$, 则 $A \cap B = ()$ 。

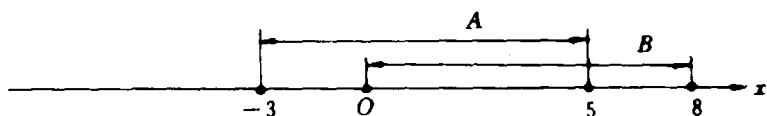
- (A) $\{x \mid -3 \leq x < 8\}$ (B) $\{x \mid 0 \leq x < 5\}$
(C) $\{x \mid 0 < x < 5\}$ (D) $\{x \mid 0 < x \leq 5\}$

解 如果用数轴来描述集合 A 和 B , 那么它们的交便一目了然了。(D) 是正确答案。

例 1.4 $[-8, 2] \cap (-1, 7) \cup (0, 12) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解 用数轴上的区间来表示, 区间两端的开或闭用空点或实点

区别开。答案应是 $(-1, 12)$ 。



例 1.3 图



例 1.4 图

例 1.5 设集合 $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, 则 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A \cap B = \underline{\{3\}}$, $A - B = \underline{\{1, 5\}}$, $B - A = \underline{\{2, 4\}}$ 。

1.2 映 射

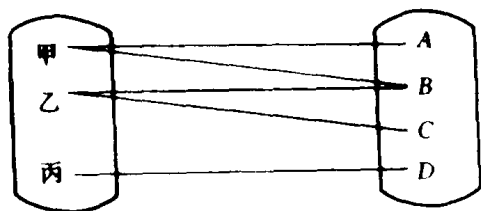
例 1.6 圆心在某一定点的全体同心圆能否与实数集构成映射?

解 设同心圆集为 X , 其中任一圆都由其半径唯一确定。半径长度为一确定的正实数, 即 X 中任一元素 x 有实数集 R 中唯一元素与之对应, 故这是从 X 到 R 的映射。

例 1.7 甲、乙、丙三座矿山供应 A, B, C, D 四家工厂原料, 甲矿供 A 和 B 两厂, 乙矿供 B 和 C 两厂, 丙矿供 D 厂, 矿山集与工厂集之间能否构成映射?

解 设 $X = \{\text{甲}, \text{乙}, \text{丙}\}$, $Y = \{A, B, C, D\}$, 其间关系如下页图所示。对于 X 中元素甲, 在 Y 中有元素 A 和 B 与之对应, 因此构不成 $X \rightarrow Y$ 的映射。同样, 对于 Y 中元素 B , 在 X 中有元素甲和乙与之

对应,从而也无法构成 $Y \rightarrow X$ 的映射。所以,这两个集合之间,两个方向的映射都无法构成。



例 1.7 图

1.3 函 数

例 1.8 函数 $y = \frac{x}{x-1}$ 的定义域为()。

- (A) $x \neq 1$ 的任何实数 (B) $\{x \mid x \neq -1\}$
(C) $(-\infty, +\infty)$ (D) $(1, +\infty)$

解 求函数的定义域,需要考虑四个问题:(1) 分母不能为零;
(2) 被开方数必须大于等于零;(3) 对数的真数部分必须为正;(4)
反正弦(或反余弦)函数的主体部分必须在区间 $[-1, 1]$ 内。因此,
(A) 是正确答案。

例 1.9 函数 $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - x - 2}} + \ln(2x - 7)$ 的定义域为
()。

- (A) $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$ (B) $(2, +\infty)$
(C) $(\frac{7}{2}, +\infty)$ (D) $[\frac{7}{2}, +\infty)$

解 应该考虑被开方数、分母及真数三个方面,即解不等式组

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x^2 - x - 2 \geq 0, \\ x^2 - x - 2 \neq 0, \\ 2x - 7 > 0 \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} x^2 - x - 2 > 0, \\ x > \frac{7}{2} \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} \begin{cases} x - 2 > 0, \\ x + 1 > 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x - 2 < 0, \\ x + 1 < 0, \end{cases} \\ x > \frac{7}{2}, \end{cases} \end{aligned}$$

得到

$$\begin{cases} x > 2 \text{ 或 } x < -1, \\ x > \frac{7}{2}. \end{cases}$$

写成区间形式应是

$$\begin{cases} (-\infty, -1) \cup (2, +\infty), \\ (\frac{7}{2}, +\infty), \end{cases}$$

其交 $(\frac{7}{2}, +\infty)$ 即为定义域。所以, (C) 是正确答案。

例 1.10 函数 $y = \arcsin \frac{x-3}{2} + \frac{3x}{x^2-x-6}$ 的定义域为 ()。

(A) $\{x \mid 1 \leq x \leq 5\}$

(B) $[1, 3) \cup (3, 5]$

(C) $[1, 3)$

(D) $(3, 5]$

解 应解不等式组

$$\begin{cases} -1 \leq \frac{x-3}{2} \leq 1, \\ x^2 - x - 6 \neq 0 \end{cases}$$