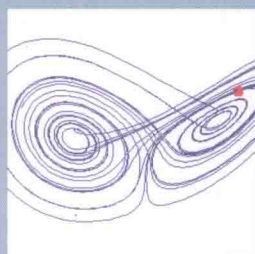
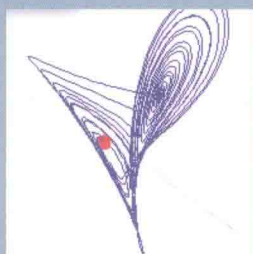


Chaos



于万波 著

混沌的计算分析与探索

清华大学出版社



混沌的计算分析与探索

于万波 著

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书对混沌的概念、混沌产生的条件、动力系统迭代轨迹等进行了深入的分析与探索,并给出了一些可理解、可操作、可思考的实例。第1、2章通过一个分段函数的奇特分岔现象以及三体运动等对混沌概念进行分析,利用函数复合、极值点、导数等给出等价的混沌判定方法;第3、4章研究正弦函数与随机多项式函数构成动力系统的混沌特性,利用正弦函数与图像函数进行迭代生成混沌吸引子,并利用该吸引子进行人脸识别;第5章研究离散余弦变换基函数矩阵的分岔及周期变化。

本书适合作为相关专业研究生教材,也可供相关的人员参考。

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

混沌的计算分析与探索/于万波著.--北京:清华大学出版社,2016

ISBN 978-7-302-43203-6

I. ①混… II. ①于… III. ①混沌理论 IV. ①O415.5

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第037576号

责任编辑:梁颖 薛阳

封面设计:常雪影

责任校对:焦丽丽

责任印制:宋林

出版发行:清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址:北京清华大学学研大厦A座 邮 编:100084

社总机:010-62770175 邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质量反馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

课件下载: <http://www.tup.com.cn>, 010-62795954

印装者:北京嘉实印刷有限公司

经 销:全国新华书店

开 本:155mm×235mm 印 张:16.5 字 数:235千字

版 次:2016年7月第1版 印 次:2016年7月第1次印刷

定 价:59.00元

产品编号:067717-01

前言

近几十年来,研究人员对混沌相关问题进行了深入的探索,在理论与实验分析等方面取得了诸多优秀成果,并已逐渐应用到一些实际工作领域。混沌科学的存在与发展不只是因为新与奇特,更因为自然界的本质可能是混沌的,或者说有可能用混沌理论与方法来更准确地描述自然,包括气体液体运动、天体运行、原子电子与光子运动,也可能包括生物遗传、视听觉机制、记忆思维本质等。一旦在这些领域中的某一个小的方面取得一点进展,都是对人类、对科学、对社会极大的贡献。尽管可能一旦发现,就是整体的、巨大的,但我们还是要一点一点去研究,艰难地踱步徘徊,有时甚至迂回后退。

混沌的概念还没有统一,混沌现象异常庞杂,有待于慢慢梳理,认真分析,也需要一些大胆的、合理的猜测与精确求实的验证。我们面前的现象扑朔迷离,但是必将有一天会柳暗花明。这本书是作者近十年的一些简陋的、粗糙的工作,呈献给读者,希望对一些读者,特别是研究生读者,有一点点帮助。书中难免存在疏漏与不足之处,真诚希望得到指正与批评,这样可以使作者得到提高,从中受益。作者的 E-mail: yu_wb@126.com, yu_wb@sohu.com。

本书主要由于万波编写,其中,于硕完成了部分程序设计与调试工作,黄昱完成了部分编写工作,王大庆、周洋、杨灵芝、赵斌、孔祥昆等同学参加了部分章节的研究工作。

作 者

2016 年 5 月

第 1 章 混沌产生的条件分析	1
1.1 混沌的探索	1
1.1.1 混沌的定义	1
1.1.2 一个分段函数的奇特分岔现象	6
1.1.3 探索天体运动是否混沌	15
1.2 导数与混沌	21
1.2.1 函数的复合	21
1.2.2 导数的作用	30
1.2.3 关于极值点	40
1.3 基于曲线长度与曲面面积的混沌程度度量方法	43
1.3.1 基于曲线几何特征的 3 周期判定方法	43
1.3.2 有关 Li-Yorke 混沌的讨论	48
1.3.3 一种新的混沌程度描述方法	52
思考与实验	57
第 2 章 曲线曲面迭代	60
2.1 圆锥曲线的混沌特性	60
2.1.1 单位区域上圆锥曲线的 Li-Yorke 混沌	60
2.1.2 单位区域上圆锥曲线的 Devaney 混沌	63
2.1.3 Lyapunov 指数与分岔图	66
2.1.4 一族混沌的贝塞尔曲线	68
2.2 有理贝塞尔曲面	71

2.2.1	动力系统构造与吸引子图形绘制	71
2.2.2	混沌特性分析	78
2.2.3	混沌序列用于图像加密	90
	思考与实验	100
第3章	正弦函数构成动力系统的混沌特性	104
3.1	正弦函数曲面与随机有理贝塞尔曲面迭代	106
3.1.1	混沌吸引子绘制	106
3.1.2	分岔图	109
3.1.3	参数变化时吸引子的变化	112
3.2	正弦函数曲面与随机多项式曲面迭代	117
3.2.1	迭代表达式构造与吸引子图形绘制	117
3.2.2	Lyapunov 指数图	120
3.2.3	曲面迭代出现混沌的条件研究	123
3.3	一个正弦函数与两个随机函数构成的动力系统	133
3.3.1	三维正弦函数截面图	134
3.3.2	分岔图和 Lyapunov 指数图	142
3.4	正弦函数构成的非线性迭代系统	145
3.4.1	二维正弦函数与没有 xy 项的随机二次函数 构成动力系统	146
3.4.2	多个动力系统构成非线性函数迭代系统	150
3.5	三维小波函数与改进的 Logistics 函数	153
3.5.1	三维小波函数与两个随机多项式函数	153
3.5.2	改进的 Logistic 函数与两个随机多项式函数	156
	思考与实验	160
第4章	图像的混沌吸引子	162
4.1	图像函数与正弦函数构成动力系统	162

4.1.1	图像曲面与正弦函数曲面	163
4.1.2	迭代方法及其近似吸引子	168
4.1.3	分岔图与 Lyapunov 指数图	170
4.2	图像吸引子可作为图像特征	175
4.2.1	人脸图像吸引子	175
4.2.2	曲面或图像的变化对吸引子的影响	183
4.2.3	用于人脸识别	186
4.3	两个图像的同步实验	191
4.3.1	线性耦合同步实验探索	191
4.3.2	图像整体反馈	201
4.3.3	两个图像构成动力系统	205
	思考与实验	206
第5章	DCT 基函数与图像矩阵的混沌特性分析	210
5.1	离散余弦变换基函数	210
5.1.1	定义与图形显示	211
5.1.2	迭代系统的构造	215
5.1.3	离散余弦变换基函数的混沌特性	219
5.2	图像矩阵的混沌特性	228
5.2.1	分岔现象与序列的复杂性	229
5.2.2	图像的微小变化导致周期巨变	232
5.3	吸引子是一种图像特征	238
5.3.1	DCT 基函数作用下的图像矩阵吸引子	238
5.3.2	基于图像吸引子的人脸识别	239
5.3.3	手写汉字的特征提取	245
	思考与实验	247
	参考文献	251

第 1 章 混沌产生的条件分析

混沌是一种复杂的自然现象,或者说许多自然现象中都蕴含着一种混沌的本质。那究竟什么是混沌?在研究过程中,一般把满足一定条件的函数称为混沌的。目前有很多混沌的定义,常用的混沌数学定义都是基于极限与空间的,各种定义虽有交集,但并不相同。离散动力系统的迭代是研究混沌序列的一个简单有效的工具,本章主要是基于离散动力系统进行研究。研究人员经常使用一些特性指标来辅助判断是否出现混沌,不过这些特性,例如分岔现象、Lyapunov 指数与分形维数等混沌指标还有待于更新与改进。

1.1 混沌的探索

下面从混沌的定义开始研究。

1.1.1 混沌的定义

Li-Yorke 混沌定义^[1]是从极限角度给出的。假设在区间 I 上存在一个

连续的自映射 $f(x)$, 如果满足以下的条件, 便说该映射是混沌的。

(1) f 有任意阶周期点;

(2) 闭区间 I 上存在不可数子集 S , S 中不包含周期点, 同时满足以下的条件:

$$\textcircled{1} \quad \forall x, y \in S, x \neq y, \limsup_{n \rightarrow \infty} |f^n(x) - f^n(y)| > 0;$$

$$\textcircled{2} \quad \forall x, y \in S, \liminf_{n \rightarrow \infty} |f^n(x) - f^n(y)| = 0;$$

$$\textcircled{3} \quad \forall x \in S \text{ 和 } f \text{ 的任意周期点 } y, \limsup_{n \rightarrow \infty} |f^n(x) - f^n(y)| > 0.$$

Li 和 Yorke 证明了: 如果存在 3 周期点, 上述系统就存在任何周期, 也满足(2)中的条件。他们称这样的系统是混沌的。这就是著名的“周期 3 意味着混沌”。

周期是这样定义的, 如果对某个 $x_0 \in I$, 有 $f^n(x_0) = x_0$, 但对于小于 n 的自然数 f , 有 $f^k(x_0) \neq x_0$, 则称 x_0 是 f 的一个 n 周期点。

Li-Yorke 还给出了一个简单有效的判定定理:

$F: J \rightarrow J$ 是区间 J 上的连续映射, 如果有一点 $a \in J$ 使得 $b = f(a)$, $c = f^2(a)$ 与 $d = f^3(a)$ ($d = f^3(a)$ 表示 $d = f(f(f(a)))$), 并且满足 $d \leq a < b < c$ (或 $d \geq a > b > c$), 那么 F 就是 Li-Yorke 混沌的。

还有一种使用比较广泛的混沌定义——Devaney 混沌定义。

在拓扑意义下, Devaney 混沌是这样定义的^[2]:

称一有界闭域 (X, d) 上的映射 $f: X \rightarrow X$ 是混沌的, 如果它满足下列条件:

(1) 它是初值敏感的, 即存在 $\delta > 0$, 使得对于任何 $x \in X$ 与 x 的任何一个邻域 B , 存在 $y \in B$ 和自然数 k , 满足

$$\|f^k(x) - f^k(y)\| > \delta$$

(2) 它是拓扑传递的, 即对于任何的两个开集 $U, V \subseteq X$, 存在自然数 k , 使得

$$f^k(U) \cap V \neq \emptyset$$

(3) 它在 X 中有稠密的周期轨道, 即 f 的周期点集在 X 中是稠密的。

Banks 等证明了条件(1)和(2)一起可以推出条件(3)^[3]。此外,在特定意义下可以验证 Devaney 混沌强于 Li-Yorke 混沌。

事实上, S. Wiggins 试图去掉 Devaney 混沌定义中的第三条,只保留遍历性(拓扑传递)与初始条件敏感性^[4]。

关于 Devaney 混沌,可以编写程序验证其拓扑传递性,见程序 1-1。

【程序 1-1】 验证 Logistic 映射的拓扑传递性。

```
clc; clear all;
u1 = input('请输入区间 U 的左端点:');
u2 = input('请输入区间 U 的右端点:');
v1 = input('请输入区间 V 的左端点:');
v2 = input('请输入区间 V 的右端点:');
y = 0; j = 1;
for x = u1:0.001:u2
    u = x; k = 1;
    for i = 1:1000
        z1 = 4 * u * (1 - u);
        u = z1;
        if(v1 < u && u < v2)
            y(j) = u; k = 0; break;
        end
    end
    j = j + 1;
end
y
```

程序运行后,如果输入两个区间 $[0.3, 0.4]$ 与 $[0.5, 0.6]$,那么得到结果发现区间 $[0.3, 0.4]$ 内的 100 个初始值在 1000 次之内都已经穿过区间 $[0.5, 0.6]$ 。输入另外两个区间进行实验,也会得到这样的结果。

该程序只是一个验证程序,尽管大量的实验还没有发现反例,但是这并不能代替数学证明。

混沌的定义还有很多,例如, Melnikov 混沌定义指出,若存在不稳定的和稳定的两种流形,而且这两种流形横截相交,则一定会出现混沌。Melnikov 给出了稳定流形和不稳定流形横截相交的判定方法,这是从几何的角度给出的混沌定义。另外, L. Wang, G. Huang, S. Huan 给出了一个

分布性混沌定义^[5,6]等。

混沌虽然还没有一个确定的定义,但是混沌运动有着自己独有的特征,这些特征主要体现在以下几个方面。

(1) 对初始条件的敏感性。对于混沌系统的演化序列,如果输入的初始值有微小的变化,那么两条序列轨道经过一段时间后,就会使轨道变得截然不同。正如一句谚语所说的“失之毫厘,差之千里”。这就是混沌运动的一个非常重要的特征,即对初始条件的敏感性。

(2) 长期不可预测性。由于混沌系统本身对初始条件非常敏感,初始条件的微小变化就会使以后的运动轨迹发生巨大的变化,获得的混沌信号也完全不同,所以,目前看,对于一个混沌系统来说,长期预测某一时刻的混沌运动状态将是不可能的。

(3) 分数维特性。混沌系统与一般确定性运动不同,它的相轨迹在一个有限区域内会经过无限次折叠,运动状态会出现多叶多层结构,所以在相空间中,混沌系统的运动轨道维数不是整数,而是分数,称为分维。分数维数有时也表明了混沌运动的无限层次的自相似结构。这是混沌运动轨迹在相空间的行为特征。

(4) 有界性和遍历性。有界性是指混沌系统的运动轨迹始终会在一个称为混沌吸引域的确定的区域。从整体来说,混沌系统是稳定的,因为混沌系统局部出现的不稳定不会引起系统的运动轨迹跳出混沌吸引域的范围。遍历性是指混沌轨道会在有限时间内经过混沌吸引域内的任何一个状态点附近,而又不在该处停留。

(5) 内在随机性。混沌运动是非线性动态系统中出现的一种“类随机”的行为,是确定性系统内部自发产生的随机性,与外部因素无关。

(6) 正的 Lyapunov 指数。系统的 Lyapunov 指数可以描述动力系统轨道局部稳定性。如果 Lyapunov 指数为正值,通常可以断定系统存在混沌现象。系统的 Lyapunov 指数通常指最大的 Lyapunov 指数,对系统的性质起着决定性的作用。

Lyapunov 指数是与相空间的轨道或扩张相关联的,在 Lyapunov 指数

小于零的方向上轨道间的距离按指数规律消失,轨道收缩,运动不处于混沌状态;而在 Lyapunov 指数为正的方向上,初值有微小差异的轨道以指数规律发散,轨道分离,系统运动不稳定,处于混沌状态;当 Lyapunov 指数等于零时,各轨道间距离不发生变化,迭代产生的点位于周期加倍的位置。任意一个混沌系统,至少有一个正的 Lyapunov 指数。所以,对于一个混沌系统,只要计算出一个正的 Lyapunov 指数,就可以初步判断该系统是混沌的。超混沌行为一般是指系统存在两个或两个以上正的 Lyapunov 指数。

(7) 功率谱密度特性。功率谱是一种表征复杂时间序列特征的统计量,是研究混沌的一种方法。根据美国科学家 Fourier 给出的分析结果:任何周期运动,其傅里叶级数的系数与相应的频率之间的关系表现为离散谱;而非周期运动即混沌运动的频率是连续谱。对于任何一个随机信号的样本函数,它的 $x(t)$ 的功率谱密度函数可以定义为式(1.1):

$$S_x(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (1.1)$$

其中,式(1.1)中的 $R_x(\tau)$ 是 $x(\tau)$ 的自相关函数,采样间隔为 τ ,即

$$R_x(\tau) = E\{x(t), E(t+\tau)\} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t x^*(t) x^*(t+\tau) dt$$

$$x^*(t) = x(t) - \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t x(t) dt$$

混沌运动是非周期的,它的功率谱是连续谱,它的特点是含有与周期运动对应的尖峰,会出现宽峰和噪声背景。根据这些特点,可以初步判断系统是否是混沌的。

(8) 庞加莱截面。分析多变量自治系统的运动可以用庞加莱截面法,这是由法国数学家庞加莱^[8]提出的。庞加莱截面是指在多维空间中选取某一适当截面,系统的运动特征及是否发生混沌可以通过观察动力系统运动轨迹与这个截面的截点来判断。庞加莱截面上是一封闭曲线时,可以判定运动是准周期的;庞加莱截面上只有有限个离散点时,可以判定运动是周期的;庞加莱截面上具有层次结构,并且分布有成片的密集点,则判定该系统的运动是处于混沌状态的。

(9) 分岔特性。一般的混沌系统都存在复杂的分岔现象,当系统的某个参数变化时,系统原有的周期会随之改变,出现了分岔现象。一旦分岔变得没有规则,就认为出现了混沌。

(10) 混沌吸引子特性。对于不同的初始值,一般混沌系统相空间轨道的最终形态大致相同,其极限状态称为吸引子,意思是把不同初始值的轨道吸引到那种极限状态。例如,1963年 Lorenz 研究大气运动规律时发现的著名的 Lorenz 吸引子。

本书中使用并研究较多的是 Li-Yorke 混沌定义、Devaney 混沌定义, Lyapunov 指数、分岔特性、混沌吸引子等。

1.1.2 一个分段函数的奇特分岔现象

一个系统的参数变化导致系统的运动轨迹也发生变化,会出现分岔现象。普通分岔图的横坐标是参数值,对应每个横坐标的纵坐标是系统的输出值,分岔图中的每个横坐标一般会有多个系统输出值,都绘制出来。一般把一个系统从平衡态到混沌状态看作是多次分岔所致。在 Devaney 混沌定义中,混沌满足的三个条件(初始值敏感、拓扑传递、周期轨道稠密)都与分岔有关。

目前,分岔现象的研究仍然是混沌研究领域的一个焦点,包括分岔现象的发现、构造、理论分析以及实际应用等。王学梅等^[9]根据一般迭代映射的倍周期分岔定理,从数学上论证了电压型不连续导电模式(DCM) Boost 和 Buck 变换器中倍周期分岔现象产生条件,由此揭示了 DC-DC 变换器中倍周期分岔现象发生的机理,完善了该类变换器倍周期分岔分析的理论和方法。张广军,徐健学^[10]研究在分岔点附近吸引子的跳跃变化情况。王作雷^[11]讨论了一类简化 Lang-Kobayashi 方程的 Hopf 分岔的性质,根据分岔理论,给出了系统产生 Hopf 分岔的临界时滞条件,然后利用中心流形定理和规范型理论得到了确定 Hopf 分岔方向和分岔周期解的稳定性计算公式,最后,用数值模拟方法对理论结果进行了验证。

文献[12]研究了一个小波函数 $y=k(1-x^2)e^{-0.5(x+u)^2}$ 关于参数 u 的混

沌分岔现象,随着小波函数中参数 u 的增大,它的分岔图出现了倍周期分岔,然后出现混沌,经过一段混沌区域后又出现 2 的幂周期,最后以 1 周期结束。在整个过程中,正分岔与逆分岔完整地结合在一起,如图 1-1 所示。

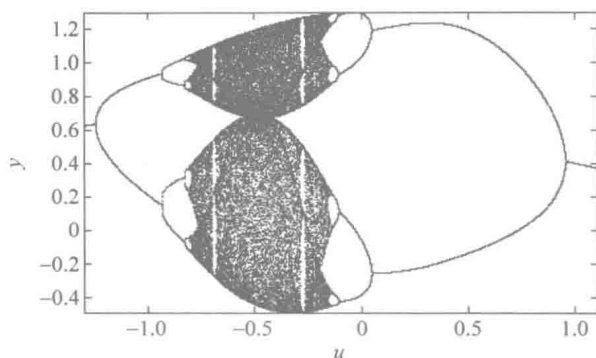


图 1-1 一个小波函数分岔图

绘制图 1-1 使用的是程序 1-2。

【程序 1-2】 绘制一个小波函数的分岔图。

```
clear all; clc;
k=1.3; x = 0.1;
for u = -1.3:0.0002:1.1
    for i = 1:20
        y = k * (1 - x * x) * exp(-(x + u) ^ 2 * 0.5);
        x = y;
        if i > 10
            plot(u, y);
            hold on;
        end
    end
end
axis tight
```

另外,可以将小波函数展开成近似的泰勒多项式函数,以便更好地分析分岔图的演变过程、分析迭代函数的几何形状与分岔图之间的对应关系。图 1-2 是多项式函数 $y=k(1-x^2)(1-0.5(x+\mu)^2)$ 的分岔图。从图 1-1 和图 1-2 可以初步观察出两个分岔图的相同与不同之处。

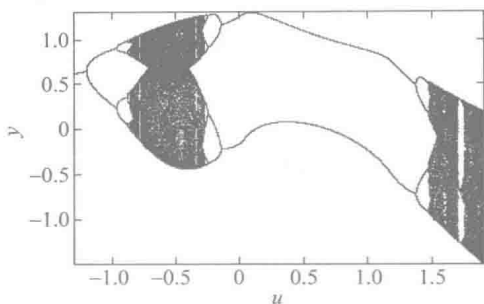


图 1-2 近似小波函数分岔图

改变小波函数的其他系数,再改变参数 u 绘制分岔图,还会出现一些明显的奇数周期,如 3 周期、5 周期等。

图 1-3 是几个函数曲线的对比图,一元函数曲线的形状不同,对其是否产生混沌以及混沌状态有直接影响。

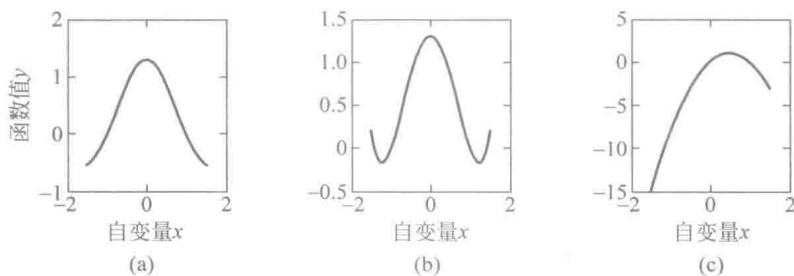


图 1-3 几个迭代函数曲线形状对比

(a) 小波函数; (b) 近似小波函数; (c) Logistic 映射函数

一般给定初始值后,对其迭代输出序列进行研究,如果该映射是混沌的,其迭代映射轨迹图一般呈现出杂乱无章的状态,如图 1-4 所示。这里的迭代轨迹是指每次迭代得到的函数值到直线 $y=x$ 水平(垂直)连线得到的图形,绘制迭代轨迹图的程序可参考文献[35]。

一个映射是否是混沌的,与该映射的迭代函数曲线(或曲面)的弯曲形状及弯曲程度有直接关系,如果在映射函数曲线弯曲的关键部位改变其函数值,就会改变该映射的混沌状态。基于这个想法,把文献[12]的迭代曲线的一部分用另外一个正弦函数替换,构造了一个分段函数,结果得到了一种

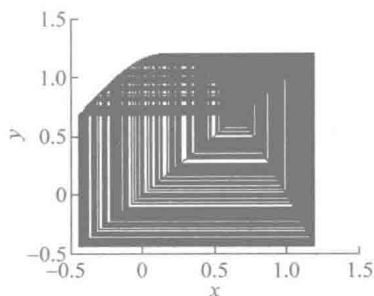


图 1-4 一个混沌迭代轨迹映射图

奇特的分岔现象。

1. 分段函数的分岔图

把文献[12]中的小波函数 $y = k(1 - x^2)e^{-0.5(x+u)^2}$, $u = 1.3$, 改造为如下分段函数

$$\begin{cases} y = \sin(x + u) & 0.6 < x < 1.5 \\ y = k(1 - x^2)e^{-0.5(x+u)^2} & x \leq 0.6, \quad x \geq 1.5 \end{cases} \quad (1.2)$$

给定初始值为 $x = 0.1$, u 值从 -2 到 1 , 利用程序 1-3, 绘制出的分岔图如图 1-5 所示。

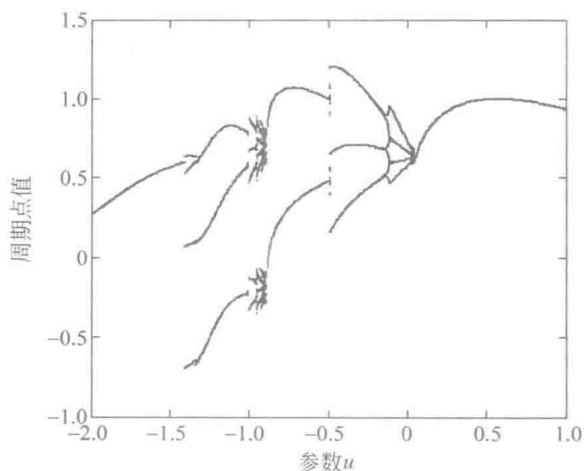


图 1-5 一个分段函数映射的分岔图

【程序 1-3】 绘制分段函数的分岔图。

```
clear all; clc;
k=1.3; x = 0.1;
for u = -2:0.01:1
    for i = 1:30
        if(x>0.6&x<1.5)
            y = sin(x+u);
            x = y;
        else
            y = k * (1 - x * x) * exp(-(x+u)^2*0.5);
            % y=arcs(x);
            x = y;
        end
        if i > 20
            plot(u, y);
            hold on;
        end
    end
end
end
```

从该映射的 Lyapunov 指数(图 1-6)看,该映射有很小的混沌区域或者没有混沌区域。不过这种类型的分岔图还没有在其他文献中见过,应该进一步研究。

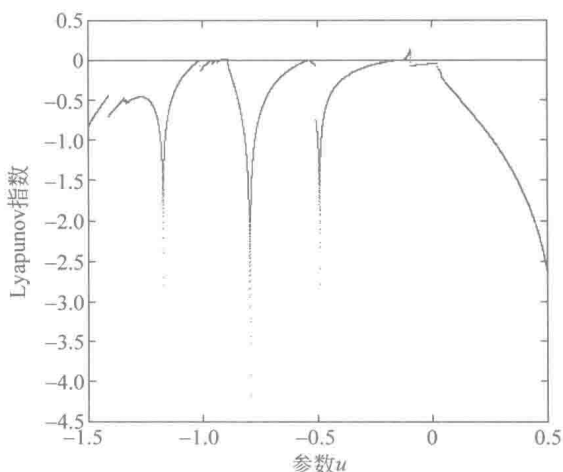


图 1-6 分段函数映射的 Lyapunov 指数