



有限元方法与应用

Finite Element Method and Its Application

张昭 蔡志勤 编著



大连理工大学出版社

有限元方法与应用

Finite Element Method and Its Application

张昭 蔡志勤 编著

理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

有限元方法与应用 / 张昭, 蔡志勤编著. — 大连 :
大连理工大学出版社, 2011. 8

ISBN 978-7-5611-6396-2

I. ①有… II. ①张… ②蔡… III. ①有限元法
IV. ①O241.82

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 159613 号

大连理工大学出版社出版

地址:大连市软件园路 80 号 邮政编码:116023

发行:0411-84708842 邮购:0411-84703636 传真:0411-84701466

E-mail:dutp@dutp.cn URL:http://www.dutp.cn

大连美跃彩色印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:180mm×255mm 印张:11.5 字数:256 千字
2011 年 8 月第 1 版 2011 年 8 月第 1 次印刷

责任编辑:汪会武

责任校对:杨柏林

封面设计:波朗

ISBN 978-7-5611-6396-2

定 价:20.00 元

前 言

有限元方法目前是工业领域应用非常广泛的科学计算手段,起源于20世纪40年代,在20世纪60年代开始形成CAE软件系统,并迅速在工业领域得到了重视和大量应用,如NASTRAN、ABAQUS、ANSYS、SIPESC等,成为目前飞行器、船舶、车辆、水坝、桥梁、工程机械、建筑结构等工程设计所必需的计算手段。

我国有限元软件的研究工作起源于20世纪60年代,几乎与国外同步,也形成了一些著名的有限元软件系统,以大连理工大学力学系开发的JIGFEX为例,该软件开始于20世纪70年代,并在其后数十年时间的应用中不断发展,并相继发展了一批分支软件,如微机通用有限元分析软件系统DDJ-W、海洋石油平台设计分析软件DASOS-J、高层建筑结构设计分析软件DASTAB、屈曲稳定分析软件DDJTJQ、建筑结构计算机辅助设计软件FCAD、结构优化设计软件DDDU、计算机辅助结构优化设计软件MCADS、JIGFEX的微机版本JIGFEX-W以及结构与多孔介质相互作用动力学与渗流分析软件DIASS等,并最终形成了商业化程序系统JIFEX。近年来,大连理工大学运载工程与力学学部/工业装备结构分析国家重点实验室发展了新一代计算软件平台SIPESC,目的是构建适用于计算力学的科学研究和工程应用的公共服务软件平台。软件平台将以共享/开源的形式向研究单位及人员提供技术支持。

本书编写的目的在于为工程技术人员和研究生提供基础的有限元分析理论和方法,并结合部分有限元软件阐述软件的开发和软件的应用。

本书包括9章内容,第1章绪论,介绍有限元方法和有限元软件的发展以及有限元分析中需要注意的一些基本问题;第2章有限元基础理论,介绍有限元方法的基础理论,包括弹性力学基础、变分原理基础和解线性方程组;第3章杆梁结构有限元;第4章平面问题有限元,主要是介绍三角形单元和矩形单元;第5章三维问题有限元,包括四面体和六面体单元;第6章动力学问题有限元,是动力学问题求解,包括模态分析和时程响应分析;第7章非线性问题有限元,介绍非线性问题,包括几何非线性、材料非线性和接触非线性;第8章温度场问题有限元,包括瞬态和稳态温度场问题;第9章工程应用专题,主要是介绍有限元软件的工程案例,包括焊接变形、石油射孔枪、冲击过程中脑组织安全以及重载货运机车的设计,都是作者研究的相关问题的例子,对于工程设计人员和研究生进一步了解有限元方法和有限元软件应用具有帮助作用。

在本书的编著过程中,张正伟、金玮玮、刘亚丽、别俊、谷思生、吴敬凯、方杰、江山等在算例整理方面都有一定的贡献,对他们的工作表示感谢。另外,在本书的编撰中,参考了目前有限元方法和 CAE 软件领域已有的一些资料,本书尽量将所涉及的资料列在参考文献中,但是由于小部分资料来源于网络,虽然经过了作者的校核和修改,但是在参考文献中可能会有所遗漏,在此表示歉意。

本书的出版得到了国家自然科学基金(10802017)、国家重点基础研究发展计划(973 计划, 2010CB832704)、辽宁省教育厅重点实验室项目(LS2010033)以及大连理工大学研究生院教改基金的支持,对此表示感谢。

作 者

大连理工大学

2011. 7. 20

目 录

第 1 章 绪 论	1
1.1 有限元及有限元软件发展历史	1
1.2 有限元软件的特点	4
1.3 有限元计算中需要注意的问题	8
第 2 章 有限元基础理论	18
2.1 弹性力学基础.....	18
2.1.1 平衡微分方程.....	19
2.1.2 边界条件.....	21
2.1.3 几何方程.....	21
2.1.4 应变协调方程.....	22
2.1.5 平面应力和平面应变问题.....	25
2.1.6 轴对称问题.....	27
2.2 变分原理基础.....	28
2.2.1 等效积分弱形式.....	28
2.2.2 弹性体的虚位移原理.....	30
2.3 解线性方程组.....	31
2.3.1 线性方程组的直接解法.....	31
2.3.2 解线性方程组的迭代法.....	33
2.3.3 Cholesky 分解	34
第 3 章 杆梁结构有限元	35
3.1 杆系结构有限元.....	35
3.2 梁结构有限元.....	45
第 4 章 平面问题有限元	57
4.1 有限单元法求解的基本步骤.....	57
4.2 三角形单元.....	59
4.2 矩形单元.....	89
4.3 数值积分方法.....	91
4.3.1 Newton-Cotes 积分	92
4.3.2 Gauss 积分	92

第 5 章 三维问题有限元	94
5.1 四面体单元	94
5.2 六面体单元	96
第 6 章 动力学问题有限元	100
6.1 模态分析	100
6.1.1 子空间迭代法	101
6.1.2 Ritz 向量直接叠加法	102
6.1.3 Lanczos 法	104
6.1.4 Guyan 减缩法	105
6.2 时程响应分析	112
6.2.1 振型叠加法	112
6.2.2 中心差分法	113
6.2.3 Newmark 方法	115
第 7 章 非线性问题有限元	119
7.1 材料非线性	119
7.1.1 Newton-Raphson 迭代	119
7.1.2 材料弹塑性本构	120
7.1.3 塑性变形的物理学本质	123
7.1.4 率相关本构模型	125
7.1.5 图形返回算法	126
7.2 几何非线性	130
7.3 接触非线性	136
第 8 章 温度场问题有限元	147
8.1 稳态热传导问题	147
8.2 瞬态热传导问题	149
8.3 热应力的计算	150
8.4 热力耦合问题的动力学显式求解	151
第 9 章 工程应用专题	159
9.1 焊接温度场	159
9.2 石油射孔枪	166
9.3 冲击中的脑组织安全评估	170
9.4 重载机车设计	172
参考文献	176

第 1 章

绪 论

1.1 有限元及有限元软件发展历史

有限元的基本思想可以追溯到古代利用多边形逼近圆来求解圆的周长,而现代有限元的萌芽产生在 18 世纪末,欧拉在求解轴力杆平衡问题时用到了与现代有限元类似的方法,但是当时计算机并未出现,因此,有限元计算量大的特点决定了其在当时没有优势。1943 年纽约大学 Richard Courant 首次尝试使用定义三角形域上的分片连续函数和最小势能原理相结合求解 S. Venant 扭转问题(Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibration),奠定了现代有限元的雏形。1956 年, M. J. Turner (波音公司工程师), R. W. Clough (土木工程教授), H. C. Martin (航空工程教授) 及 L. J. Topp (波音公司工程师) 四位研究者共同在航空科技期刊上发表一篇采用有限元技术计算飞机机翼强度的论文,名为《Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures》,文中把这种解法称为刚性法(Stiffness method),一般认为这是工程学界有限元法的开端。1960 年,美国加州大学 Berkeley 分校的 Ray W. Clough 教授在美国土木工程学会(ASCE)计算机会议上,发表另一篇名为《The Finite Element in Plane Stress Analysis》的论文,将应用范围扩展到飞机以外的土木工程领域,同时有限元法(Finite Element Method)的名称也第一次被正式提出。

有限元方法理论和程序的早期主要贡献来自美国加州大学 Berkeley 分校的 Ed Wilson (Clough 的博士生), J. R. Hughes, Robert Taylor, J. Simo, 其第 2 代程序称为 SAP (Structural Analysis Programme), 第 1 代程序则没有具体的名字。

20 世纪 70 年代初当时任教于 Brown 大学的 Pedro Marcal 创建了 MARC 公司,并推出了第一个商业非线性有限元程序 MARC。虽然 MARC 在 1999 年被 MSC 公司收购,但其对有限元软件的发展起到了决定性的推动作用,更值得一提的是 Pedro Marcal 早年也是毕业于 Berkeley 大学。

在早期的商用软件舞台上,还有两位主要人物, David Hibbitt 和 Klaus J. Bathe。David Hibbitt 是 Pedro Marcal 在 Brown 大学的博士生, David Hibbitt 与 Pedro Marcal 合

作到1972年,随后 Hibbitt 与 Bengt Karlsson 和 Paul Sorenson 于1978年共同建立 HKS 公司,推出了 ABAQUS 软件,使 ABAQUS 商业软件进入市场。因为该程序是能够引导研究人员增加用户单元和材料模型的早期有限元程序之一,所以它对软件行业带来了实质性的冲击。2002年 HKS 公司改名为 ABAQUS,并于2005年被达索公司收购。

另外一位对有限元方法做出重大贡献的是 Klaus J. Bathe 博士。20世纪60年代末 Klaus J. Bathe 在 Berkeley 大学 Clough 和 Ed Wilson 博士的指导下攻读博士学位,从事结构动力学求解算法和计算系统的研究。“子空间迭代”(Subspace Iteration)就是 Bathe 在读博士期间的一个成果。由于对结构计算以及 SAP 软件所做的贡献,Bathe 博士毕业后被 MIT 聘请到机械与力学学院任教。

1975年在 MIT 任教的 Bathe 博士在 NONSAP 的基础上发表了著名的非线性求解器 ADINA(Automatic Dynamic Incremental Nonlinear Analysis),而在1986年 ADINA R&D Inc. 成立以前,ADINA 软件的源代码是公开的,即著名的 ADINA81 版本和 ADINA84 版本的 fortran 源程序,后期很多有限元软件都是根据这个源程序编写的。1977年 Mechanical Dynamics Inc. (MDI)公司成立,致力于发展机械系统仿真软件,其软件 ADAMS 应用于机械系统运动学、动力学仿真分析。后被 MSC 公司收购,成为 MSC 分析体系中一个重要的组成部分。

美国 Lawrence Livermore 国家实验室的 John Hallquist 编写了一款知名的显式有限元程序 DYNA。在20世纪80年代,DYNA 程序首先被法国 ESI 公司商业化,命名为 PAM-CRASH,现已成为 ESI 的明星产品。除此之外,ESI 公司还有多个为人熟知的软件,如铸造软件 ProCAST,钣金软件 PAM-STAMP,焊接软件 SYSWELD,振动噪声软件 VA One,空气动力学软件 CFD-FASTRAN,材料物理学仿真软件 CFD-ACE+ 等等。1988年,John Hallquist 自己创建 LSTC(Livermore Software Technology Corporation)公司,发行和扩展 DYNA 程序商业化版本 LS-DYNA。1988年,MSC 在 DYNA3D 的框架下开发了 MSC. Dyna,并于1990年发布第一个版本,随后于1993年发布了著名的 MSC. Dytran。ANSYS 收购了 Century Dynamics 公司,把该公司以 DYNA 程序开发的高速瞬态动力分析软件 AUTODYN 纳入到 ANSYS 的分析体系中。并且于1996年,ANSYS 与 LSTC 公司合作推出了 ANSYS/LS-DYNA。

进入21世纪后,早期的三大软件商 MSC、ANSYS、SDRC 的命运各不相同,ANSYS 公司通过一连串的并购与自身壮大后,把其产品扩展为 ANSYS Mechanical 系列、ANSYS CFD(FLUENT/CFX)系列、ANSYS ANSOFT 系列以及 ANSYS Workbench 和 EKM 等。由此 ANSYS 塑造了一个体系规模庞大、产品线极为丰富的仿真平台,在结构分析、电磁场分析、流体动力学分析、多物理场、协同技术等方面都提供完善的解决方案。

国内有限元软件起步时间和西方国家非常接近,1975年由大连理工大学力学系钟万勰院士带领的团队开发了基于多重多级子结构的有限元程序 JIGFEX,之后大连理工大学力学系又发展了多个求解模块,包括 DDDU、FEEPCA、DDJ 等,1995年形成了商业化

程序版本 JIGFEX95,后整合相关模块,形成了 JIFEX(v1.0~v5.0),其集成环境窗口如图 1-1 所示。

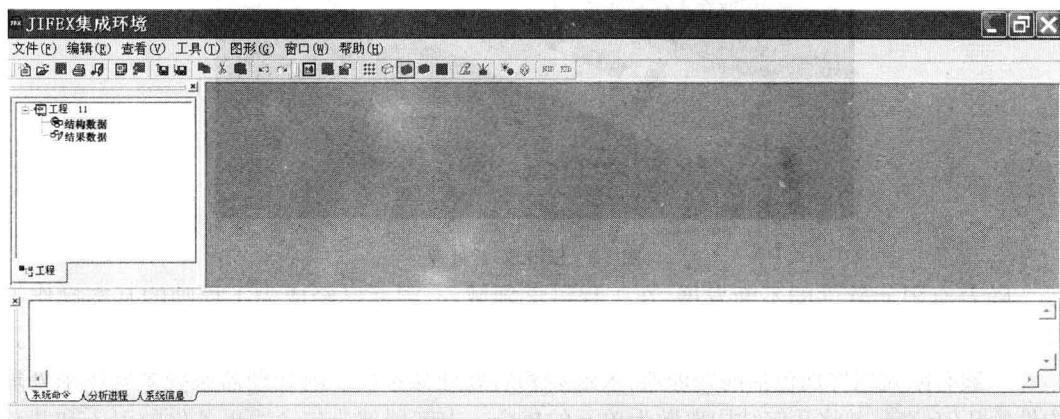


图 1-1 JIFEX 集成环境

目前,基于相关的基础工作,大连理工大学力学系成立了计算机软件研究所,发展了新一代计算平台 SIPESC (Software Integration Platform for Engineering and Scientific Computation, <http://www.sipesc.org>),其流程图功能如图 1-2 所示。

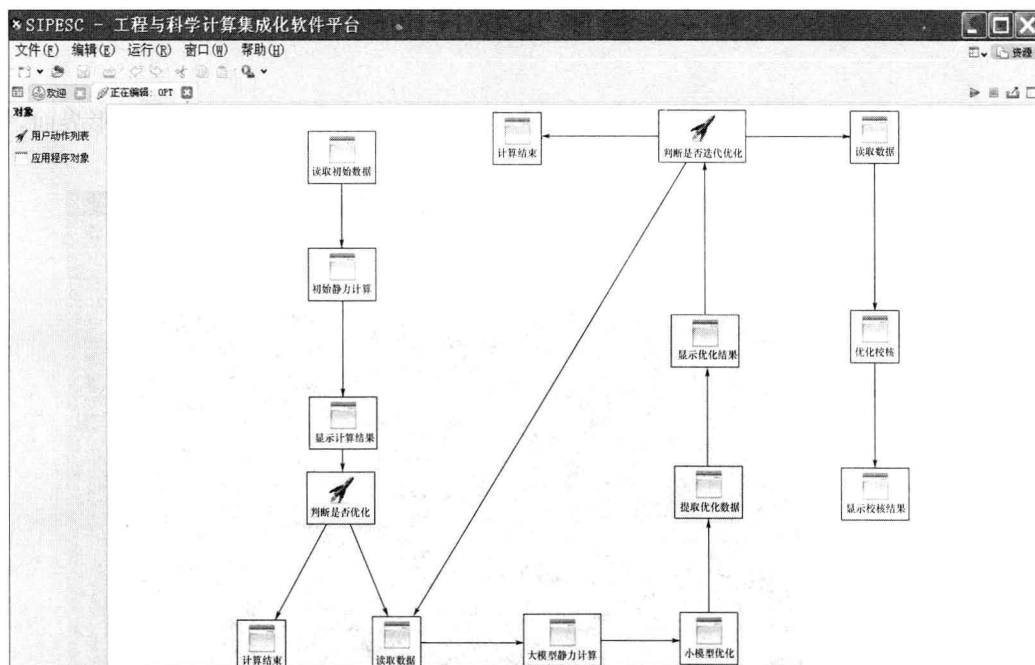


图 1-2 SIPESC 流程图功能

SIPESC 后处理显示结果如图 1-3 所示。

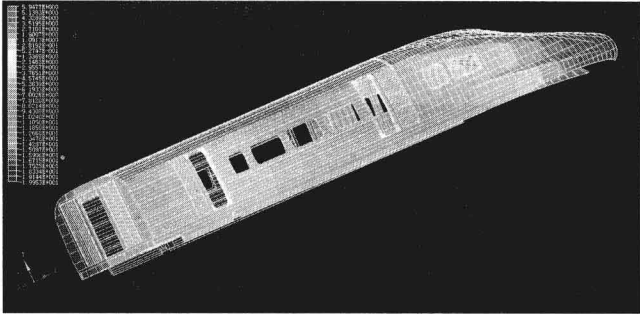


图 1-3 SIPESC 后处理

随着有限元软件不断发展,在工程科学领域,有限元已经成为工程师的基本操作工具,大量应用于结构工程、岩土工程、机械制造、航空航天、核工业、水利工程等相关领域。

一般有限元软件均包括前处理器、求解器和后处理器系统。前处理器系统主要用来处理构件的几何信息,并将几何结构离散为单元的集合。求解器部分包含边界条件的引入和载荷的形成,对施加边界条件后的结构选择适当的求解器进行求解。最后,对求得的计算结果进行图形化显示和处理,这就构成了后处理器系统。一个完整的有限元软件应该包含这些相关功能。

1.2 有限元软件的特点

以 ANSYS 为例。ANSYS 的用户界面包含实用菜单、工具栏、主菜单和图形界面,如图 1-4 所示。

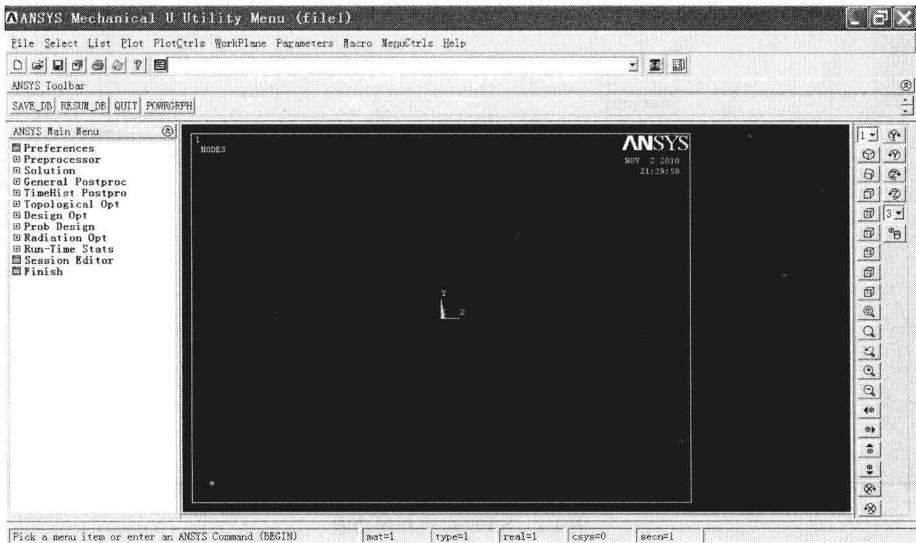


图 1-4 ANSYS 用户界面

实用菜单包括 File、Select、List、Plot、PlotCtrls、WorkPlane、Parameters、Macro、MenuCtrls 和 Help 菜单。通过这些菜单,可以实现文件存储、选择组件以及定义参数、控制和选择工作平面等功能,具体功能如图 1-5 所示。



图 1-5 ANSYS 实用菜单

工具栏包括四个选项:DB 文件存储、DB 文件恢复、退出和图形显示方式,如图 1-6 所示。PowerGraphics 对应的命令是/GRAPHICS,有两个选项,KEY=POWER 或者 KEY

=FULL,两者的区别在于显示内容的不同,KEY=FULL 选项将会展示所有的计算结果,KEY=POWER 则激活 PowerGraphics 功能。在展示单元应力的时候,是否激活 PowerGraphics 功能对结果显示没有影响,但是对节点应力结果的显示有影响。采用 PowerGraphics 功能,此时平均计算仅仅考虑表面,而采用 FULL 功能,则会考虑整个模型的计算结果,因此,在节点结果展示上,两者存在区别。

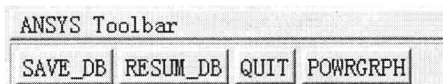


图 1-6 ANSYS 工具栏

主菜单包括前处理器、求解器和后处理器等功能,如图 1-7 所示,通过该菜单可以完成模型建立、网格划分、求解器设定和对计算结果的后处理。

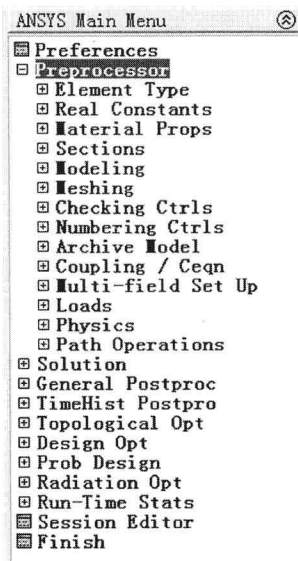


图 1-7 ANSYS 主菜单

另外,ANSYS 还包含一个命令窗口,如图 1-8 所示。



图 1-8 ANSYS 命令窗口

通过命令窗口可以输入命令来实现某些操作,如输入 PRRSOL 命令来输出结构反力,如图 1-9 所示。



图 1-9 PRRSOL 命令输入

ANSYS 中一个有用的功能是提取单元和整体刚度矩阵,单元刚度矩阵的提取方式实例如下所示:

```
finish
/clear
PI=3.1415926
w1=3
w2=10
w3=6
w4=1.2
r=.8
t=0.08
/PREP7
! *
ET,1,SHELL63
R,1,t
ET,2,MASS21
R,2,500,500,500,2000,2000,2000,
! *
UIMP,1,EX,,2e11
UIMP,1,NUXY,,0.3,
UIMP,1,DAMP,,0.2,
UIMP,1,DENS,,7800,
BLC4,0,0,w2,w1
ESIZE,1.5,0,
AMESH,all
NSEL,S,LOC,X,0.0
D,all,,,,,ALL,,,,,
allsel,all
SFA,all,1,PRES,12
FINISH
/OUTPUT,cp,out,,! 将输出信息送到 cp.out 文件
/debug,-1,,1! 指定输出单元矩阵
/SOLU
SOLVE
finish
/OUTPUT,TERM! 将输出信息送到 output windows 中
```

用编辑器打开 cp.out 文件,可以看到相关信息。

整体刚度矩阵的提取包括超单元法和 HBMAT 命令法,超单元法的使用如下:

```

/solu
antype,7 ! substructuring 分析类型
seopt,matname,1 ! 设置文件名称和刚度矩阵类型(刚度、质量、阻尼等)
nset,all ! 选择所有节点
m,all,all ! 定义所有节点自由度为主自由度
solve ! 求解
selist,matname,3 ! 列出整体刚度矩阵

```

也可以采用 HBMAT 命令输出刚度矩阵,

```
命令: HBMAT, fname, ext, -, form, matrix, rhs
```

其中 Fname 为输出矩阵的路径和文件名,缺省为当前工作路径和当前工作文件名, ext 为输出矩阵文件的扩展名,缺省为. matrix, form 为定义输出矩阵文件的格式,其值可取 ASCII 和 BIN。Matrix 为定义输出矩阵的类型,其值可取 STIFF、MASS 和 DAMP。Rhs 为右边项输出控制(右边项指用矩阵所表示方程的等号右端矢量,可为节点荷载向量),如 rhs=YES 则输出,如 rhs=NO 则不输出。

用 HBMAT 命令可输出结构刚度矩阵、质量矩阵和阻尼矩阵,其文件记录格式为大型稀疏矩阵的标准交换格式,采用索引存储方法仅记录矩阵的非零元素。文件基本格式是前面有 4 或 5 行描述数据,其后为单列矩阵元素值。

当生成 FULL 文件后,可采用命令/AUX2MYMFILE, file1, fullMYMHBMAT, mystiff, txt, ASCII, STIFF, YESMYMFINISH 直接将二进制 file1. full 文件输出为 ASCII 码文件 mystiff. txt,并输出右边项。

通过上面的介绍可以看到,一个完整的有限元软件应该包含前处理器、求解器和后处理器,其中求解器的功能是否强大决定了软件的最终性能,但是其他附加的功能,如图形界面功能、命令行窗口等多项功能则决定了软件的实用性和易操作性,也在很大程度上决定了软件的受欢迎程度。

1.3 有限元计算中需要注意的问题

对于不同的结构,需要划分不同的单元来满足计算的需要。单元的划分成功与否对于计算的结果有很大的影响,对于曲面边界,一般采用三角形或者四面体单元来划分,如图 1-10 中所示的某型鼓风机叶轮即采用四面体单元划分。对于一般的壳体结构,通常采用较为规则的四边形单元来划分该壳体结构,如图 1-10 中的某型变压器,是完全采用四边形壳单元进行划分的。而对于较为复杂的结构,如图 1-10 所示的某型机车结构,大部分结构采用四边形单元进行划分,只有在几何结构变化的一些部位,采用三角形单元进行过渡。从这三个例子的对比可以看到,不同的具体问题需要采用不同的单元和网格划分方案。

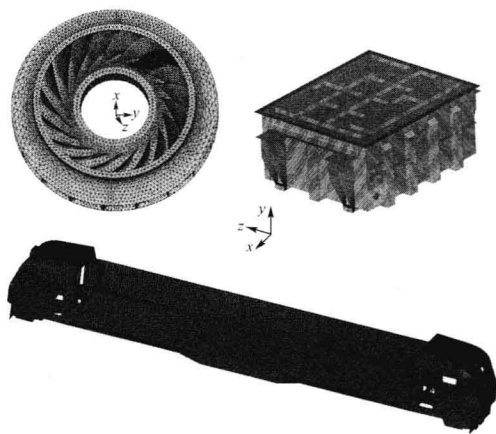


图 1-10 有限元模型

为了更好地进行有限元计算,下面给出一些有关有限元网格划分中需要注意的问题。

1. 单元划分的数量

有限单元划分越密集,求解得到的位移结果越接近真实情况,但是,单元和节点数量的增多会导致求解规模的增加,因此,需要具体问题具体分析。图 1-11 所示为一个平板在水平拉伸力作用下两种网格方案的计算结果,对于这个问题,两种网格方案得到了几乎完全一致的位移结果,对于本问题,采用更为密集的单元对于计算的结果意义不明显。

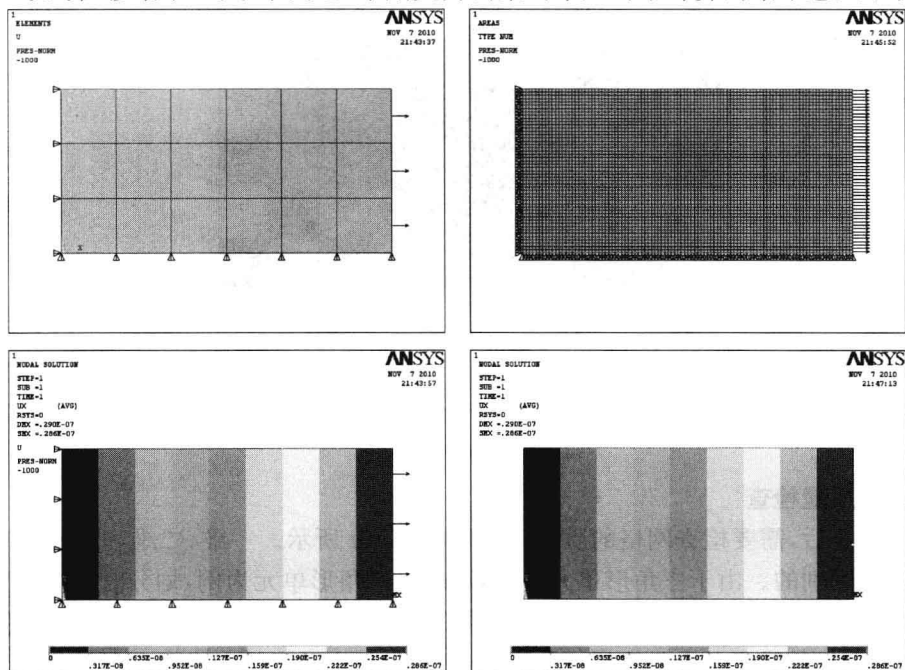


图 1-11 单元数量对计算的影响

2. 节点的布置

在载荷作用点、载荷突变点、材料属性变化或者几何结构变化的区域,应该分布节点,如图 1-12 所示。

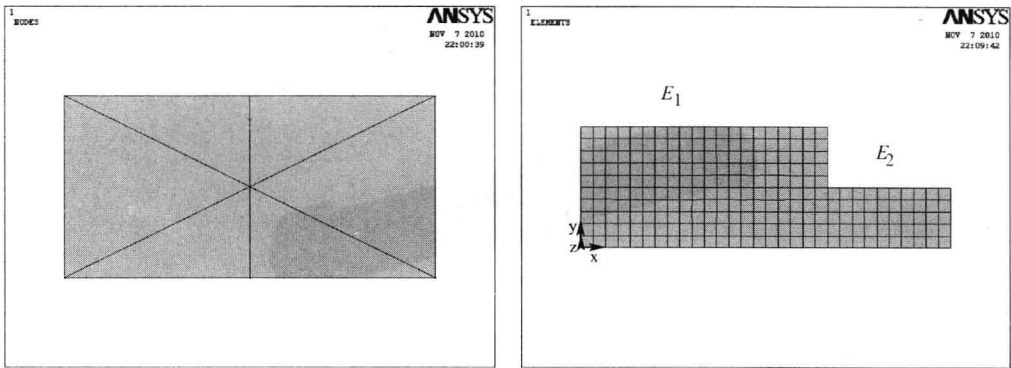


图 1-12 节点的布置方式

3. 单元节点编号

划分单元后,要进行统一的单元和节点编号,须使同一单元三个节点编号尽可能接近,并尽可能使单元和节点编号走向相同,如图 1-13 所示。

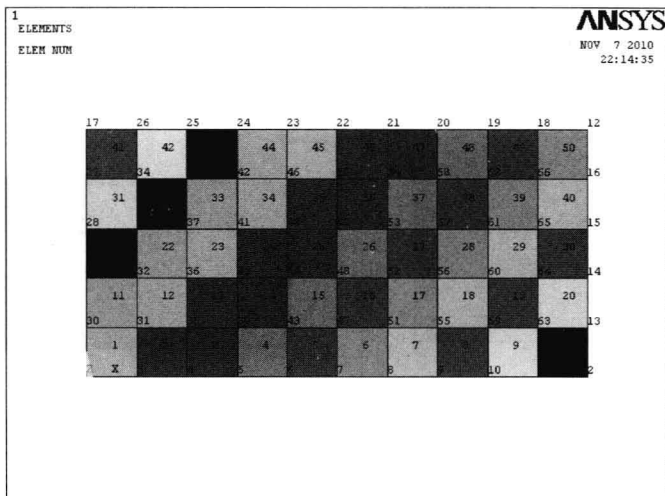


图 1-13 单元节点编号

4. 单元质量检查

单元划分后,需要检查网格的质量,具体如图 1-14 所示。一维、二维和三维的单元检查内容是有区别的。由于三角形单元使用较多,以三角形单元为例,划分时需注意三个边长不能相差悬殊,根据误差分析,应力和位移的误差都和单元的最小内角的正弦值成反比,采用等边三角形或者直角等腰三角形误差较小,每个单元的三个角度尽量相等。