

考研

数学三

提高与冲刺

陈启浩 编著



 机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS



考 研 数 学 三 提 高 与 冲 刺

陈启浩 编著



机 械 工 业 出 版 社

本书帮助考研的同学利用好最后三个多月的复习时间,有效掌握一些数学方法和技巧,提高解题速度和正确率。

全书分为两篇,第一篇为近三年真题的解题方法示范;第二篇为快捷解题方法,包含了有关高等数学、线性代数和概率论与数理统计的99种解题方法技巧。

本书适合参加硕士生入学考试数学三的同学阅读,需要至少经过一轮基础知识复习。

图书在版编目(CIP)数据

考研数学(三)提高与冲刺/陈启浩编著. —北京:机械工业出版社,2011.10

ISBN 978-7-111-36169-5

I. ①考… II. ①陈… III. ①高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 IV. ①013

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第213684号

机械工业出版社(北京市百万庄大街22号 邮政编码100037)

策划编辑:韩效杰 责任编辑:韩效杰 责任校对:张媛

封面设计:路恩中 责任印制:乔宇

北京机工印刷厂印刷(三河市南杨庄国丰装订厂装订)

2012年1月第1版第1次印刷

184mm×260mm·26印张·643千字

标准书号:ISBN 978-7-111-36169-5

定价:46.00元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

电话服务

网络服务

社服务中心:(010) 88361066

门户网:<http://www.cmpbook.com>

销售一部:(010) 68326294

教材网:<http://www.cmpedu.com>

销售二部:(010) 88379649

读者购书热线:(010) 88379203

封面无防伪标均为盗版

前 言

本书帮助考研的同学利用好最后三个多月的复习时间，有效掌握一些数学方法和技巧，提高解题速度和正确率。

本书分为两篇，第一篇是 2009、2010 和 2011 三年真题的解答，重在解法。同学们通过这一篇的阅读，再次把握考研数学考题的程度，通过对比作者给出的解法和自己的解法，体会方法和技巧对解题的重要性，并检测自己对知识的融会领悟的程度，依此酌情安排第二篇内容的阅读。第二篇是 99 种快捷解题方法。每天安排学习三种方法，可在一个月左右学完本书。每种方法后都配有例题和练习，只要认真理解，很容易学会这些方法和技巧。

作者仔细梳理过近十五年的考研题目，发现每年近一半的题目是基本题目，一般考生都能拿到分数。另外一半有一定难度的题目，往往有教科书上的一般解题思路和方法，但比较麻烦、绕远，原因便是教科书是为初学者所写，前后融会往往不足。教科书方法之外，有很多更省时更清晰的解题方法，只是需要前后联系，利用好已经学过还没有意识到能如此应用的定理和性质。有的难题需要平时总结一些常见的情况和对策，解法就会变得明朗。

作者汇集在多年教学中揣摩和总结的解题方法，针对在考研复习培训中发现的同学们普遍需要解决的问题，编成此书，希望对考研的同学有所帮助。

本书适合考数学三的同学阅读，需要读者至少经过一轮基础知识复习。

祝同学们取得好的成绩！

北京邮电大学 陈启浩

目 录

前言

第一篇 考研真题（数学三）与解答

A. 2009 年真题与解答	1
B. 2010 年真题与解答	12
C. 2011 年真题与解答	24

第二篇 快捷解题方法

A. 高等数学	35
第一章 一元函数微分学	35
01 数列单调性的快捷判别法	35
02 由数列极限定义的函数表达式的快捷算法	39
03 等价无穷小的快捷寻找法	42
04 $\frac{0}{0}$ 型未定式极限的快捷算法	47
05 $x \rightarrow \infty$ 时, $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式极限的快捷算法	52
06 $x \rightarrow \infty$ 时, $\infty - \infty$ 型未定式极限的快捷算法	53
07 $0 \cdot \infty$ 型未定式极限的快捷算法	56
08 曲线的非铅直渐近线的快捷算法	60
09 分段函数导数的快捷算法	62
10 形如 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(u(x)) - f(u(x_0))}{g(v(x)) - g(v(x_0))}$ 的 $\frac{0}{0}$ 型未定式极限的快捷算法	68
11 函数 $g(x) f(x) $ 不可导点的快捷算法	70
12 反函数不可导点的快捷算法	72
13 初等函数导数的快捷算法	73
14 初等函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的高阶导数 $f^{(n)}(x_0)$ 的快捷算法	75
15 初等函数高阶导数的快捷算法	80
16 平面曲线切线的快捷算法	83
17 存在 ξ , 使得 $f(\xi) = 0$ 的有关命题的快捷证明法	86
18 存在 ξ , 使得 $f'(\xi) = 0$ 的有关命题的快捷证明法	88
19 存在 ξ , 使得 $G(\xi, f(\xi), f'(\xi)) = 0$ 的有关命题的快捷证明法 (I)	90
20 存在 ξ , 使得 $G(\xi, f(\xi), f'(\xi)) = 0$ 的有关命题的快捷证明法 (II)	93
21 存在 ξ , 使得 $G(\xi, f(\xi), f'(\xi), f''(\xi)) = 0$ 的有关命题的快捷证明法	96
22 存在 ξ , 使得 $f''(\xi) \leq k$ (常数) 的有关命题的快捷证明法	99
23 恒等式的快捷证明法	102
24 分段函数极值的快捷算法	103
25 函数最值的快捷算法	106
26 由函数图形确定导函数图形或由导函数图形确定函数性态的快捷方法	109

27 函数不等式的快捷证明法	112
28 方程 $f(x) = 0$ 实根个数的快捷判定法	117
第二章 一元函数积分学	122
29 计算不定积分时, 变量代换的快捷选定法	122
30 利用分部积分法快捷计算不定积分的方法	127
31 真分式不定积分的快捷算法	131
32 通过配置 $\int g(x) dx$, 快捷计算不定积分 $\int f(x) dx$ 的方法	136
33 巧用换元积分法与分部积分法计算定积分的快捷方法	139
34 利用被积函数奇偶性和周期性快捷计算定积分方法	142
35 定积分值所在范围的快捷估计法	146
36 积分上限函数导数的快捷算法	150
37 被积函数为分段函数的积分上限函数表达式的快捷算法	153
38 卷积型积分的快捷算法	159
39 利用定积分快捷计算和式极限方法	164
40 在包含 $f(x)$ 的定积分的条件下, 存在 ξ , 使得 $G(\xi, f(\xi), f'(\xi)) = 0$ 的有关命题的快捷证明法	167
41 存在 ξ , 使得 $G(\xi, f(\xi), \int_a^{\xi} f(t) dt) = 0$ 的有关命题的快捷证明法	170
42 定积分不等式的快捷证明法	172
43 平面图形面积的快捷算法	177
44 X 型 (或 Y 型) 平面图形 D 绕平行于 x 轴 (或 y 轴) 但不穿过 D 的直线旋转一周而成的旋转体体积的快捷算法	181
第三章 多元函数微积分学	185
45 二重极限不存在的快捷判别法	185
46 二元函数可微性的快捷判别法	187
47 二元函数偏导数与二阶偏导数的快捷算法	190
48 由 $z = z(x, y)$ 的全微分计算 $z = z(x, y)$ 的快捷方法	195
49 二元函数条件极值的快捷算法	198
50 有界闭区域上二元连续函数最值的快捷算法	204
51 二重积分的快捷算法	207
52 卷积型二重积分的快捷算法	211
53 变积分区域上二重积分的快捷算法	213
54 二重积分取值范围的快捷估计法	215
55 二次积分积分次序的快捷更换法	217
第四章 无穷级数与常微分方程	220
56 正项级数收敛性的快捷判别法	220
57 任意项级数收敛性的快捷判别法	225
58 抽象级数收敛性的快捷证明法	229
59 幂级数收敛域的快捷算法	232
60 函数幂级数的快捷展开法	237
61 幂级数和函数的快捷算法	242
62 级数和的快捷算法	246
63 一阶微分方程快捷求解法	251

64	二阶微分方程的快捷求解法	254
65	右端函数为分段函数的一阶线性微分方程的快捷求解法	257
66	方程 $y(x) = \int_0^x g(x, y(t)) dt + h(x)$ 的快捷求解法	262
B. 线性代数		268
第五章 矩阵与向量		268
67	矩阵式的快捷算法	268
68	数字矩阵逆矩阵的快捷算法	271
69	抽象矩阵可逆性判别与逆矩阵计算的快捷方法	275
70	分块矩阵或经由初等变换后的矩阵的转置、求逆及伴随矩阵的快捷算法	278
71	向量组线性相关性的快捷判别法	281
72	向量组的极大线性无关组的快捷算法	285
73	有关矩阵秩问题的快捷证明法	288
第六章 线性方程组		292
74	由线性方程组的有解性确定其中参数的快捷方法	292
75	两个线性方程组同解的快捷判别法	298
76	两个线性方程组公共解的快捷算法	301
77	矩阵方程的快捷求解法	304
78	有关线性方程组问题的快捷证明法	309
第七章 矩阵特征值与特征向量, 二次型		312
79	矩阵特征值与特征向量的快捷算法	312
80	由矩阵 A 的特征值与特征向量计算 A 中参数的快捷方法	319
81	矩阵可否相似对角化的快捷判别法	323
82	矩阵特征值与特征向量问题的快捷证明法	331
83	由可逆线性变换化二次型为标准形的快捷方法	333
84	由二次型 f 的标准形确定 f 中的参数或 f 的表达式的快捷方法	340
85	有关正定二次型或正定矩阵问题的快捷证明法	345
C. 概率论与数理统计		350
第八章 随机事件概率计算		350
86	分层应用全概率公式快捷计算随机事件概率的方法	350
87	条件概率的快捷算法	352
88	利用抽签原理快捷计算随机事件概率的方法	355
第九章 随机变量及其分布		359
89	(一维) 随机变量分布函数与分布律或概率密度的快捷换算法	359
90	(一维) 连续型随机变量函数的概率密度的快捷算法	364
91	与正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 有关问题的快捷算法	368
92	两个连续型随机变量独立性的快捷判定法	371
93	二维连续型随机变量的两类条件概率的快捷算法	374
94	二维连续型随机变量函数的概率密度的快捷算法	379
第十章 随机变量的数字特征		384
95	将离散型随机变量 X 表示成若干个随机变量之和快捷计算 X 的数字特征方法	384
96	利用常用随机变量的数字特征快捷计算连续型随机变量的数字特征方法	388
97	与二维正态分布 $N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ 有关问题的快捷算法	393

第十一章 数理统计..... 399

98 来自正态总体的样本统计量分布的快捷确定法 399

99 样本统计量数字特征的快捷算法 403

参考文献 408

第一篇 考研真题(数学三)与解答

这里给出 2009 ~ 2011 年全国硕士生入学考试题及其解答, 其中许多试题的解答都使用了第二篇中所述的快捷解题方法, 因此阅读本篇将使你初步领略快捷解题方法的优点, 也使你经过一次快捷解题方法的训练.

每道试题的解答都由【精解】与【附注】组成:

【精解】中, 给出了该道试题清晰、精确的解答, 并蕴含解题的技巧.

【附注】中, 除基本题(即可以利用基本概念、基本理论和基本计算方法直接求解的问题)外, 都指明问题是按第二篇中的哪一个快捷解题方法求解的

A. 2009 年真题与解答

一、选择题: 第 1 ~ 8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分, 下列每题给出的四个选项中, 只有一个选项符合试题要求.

1. 函数 $f(x) = \frac{x - x^3}{\sin \pi x}$ 的可去间断点个数为

- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 无穷多个.

【精解】在 $f(x)$ 的诸多间断点(即分母 $\sin \pi x$ 的零点) $x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 中, 仅在点 $x = 0, \pm 1$ 处存在极限, 即

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x^3}{\sin \pi x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin \pi x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\pi x} = \frac{1}{\pi}, \\ \lim_{x \rightarrow \pm 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \pm 1} \frac{x - x^3}{\sin \pi x} \xrightarrow{\text{洛必达法则}} \lim_{x \rightarrow \pm 1} \frac{1 - 3x^2}{\pi \cos \pi x} = \frac{2}{\pi}.\end{aligned}$$

【附注】本题是基本题, 即只要记住函数的可去间断点的定义, 即可计算与判断.

2. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = x - \sin ax$ 与 $g(x) = x^2 \ln(1 - bx)$ 是等价无穷小, 则

- (A) $a = 1, b = -\frac{1}{6}$. (B) $a = 1, b = \frac{1}{6}$.
(C) $a = -1, b = -\frac{1}{6}$. (D) $a = -1, b = \frac{1}{6}$.

【精解】先考察选项 A:

当 $a = 1, b = -\frac{1}{6}$ 时,

$$f(x) = x - \sin x = x - \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)\right) = \frac{1}{6}x^3 + o(x^4) \sim \frac{1}{6}x^3 (x \rightarrow 0),$$

$$g(x) = x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{6}x\right) = x^2 \left(\frac{1}{6}x + o(x)\right) = \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \sim \frac{1}{6}x^3 (x \rightarrow 0),$$

所以 $f(x) \sim g(x) (x \rightarrow 0)$.

因此, 本题选 A.

【附注】 本题是按第二篇快捷解题方法 03 分别寻找 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 和 $g(x)$ 的等价无穷小, 从而判定选项 A 是正确的.

3. 使不等式 $\int_1^x \frac{\sin t}{t} dt > \ln x$ 成立的 x 的范围是

(A) $(0, 1)$.

(B) $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$.

(C) $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

(D) $(\pi, +\infty)$.

【精解】 先考察选项 A:

记 $f(x) = \int_1^x \frac{\sin t}{t} dt - \ln x$, 则 $f(x)$ 在 $(0, 1]$ 上连续, 在

$(0, 1)$ 内可导且

$$f'(x) = \frac{\sin x}{x} - \frac{1}{x} < 0$$

所以, $f(x)$ 在 $(0, 1]$ 上单调减少, 从而有

$$f(x) > f(1) = 0, \text{ 即 } \int_1^x \frac{\sin t}{t} dt > \ln x (x \in (0, 1)).$$

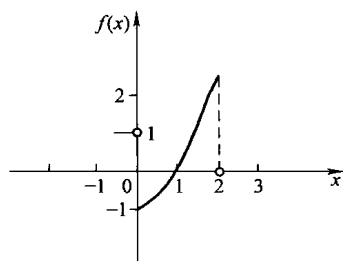
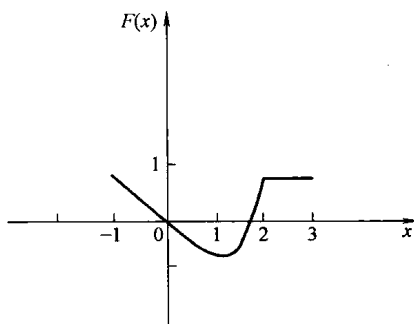


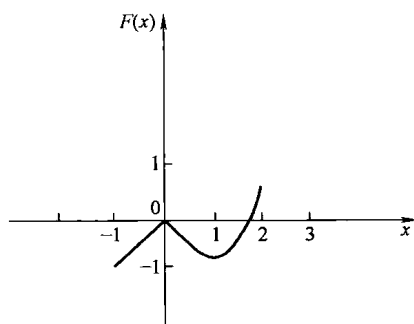
图 A-4

【附注】 本题是按第二篇快捷解题方法 27 计算和判断的.

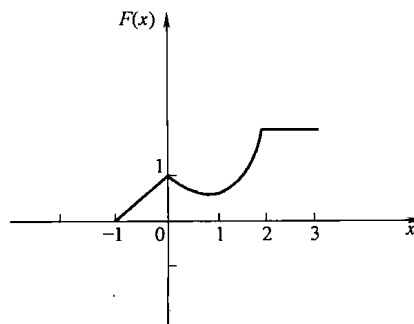
4. 设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-1, 3]$ 上的图形如图 A-4 所示, 则函数 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 的图像为



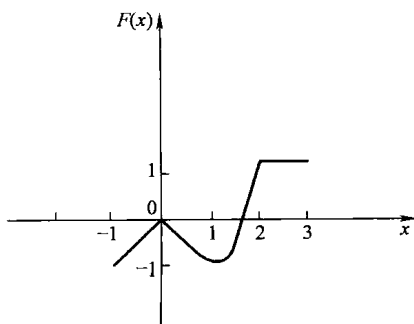
(A)



(B)



(C)



(D)

【精解】 由于当 $-1 \leq x \leq 0$ 时, $F(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^x dt = x < 0$, 所以应排除选项 A、

C. 由于当 $2 \leq x \leq 3$ 时, $F(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^2 f(t) dt + \int_2^x 0 dt = \int_0^2 f(t) dt \neq 0$ (因为图 A-4 中, 在 $[0, 1]$ 下方图形的面积与 $[1, 2]$ 上方图形的面积不相等), 所以应排除选项 B.

因此, 本题选 D.

【附注】 本题是按第二篇快捷解题方法 37 间接地判断选项 D 是正确的.

5. 设 A, B 均为 2 阶矩阵, A^*, B^* 分别为 A, B 的伴随矩阵, 若 $|A| = 2, |B| = 3$,

则分块矩阵 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为

$$(A) \begin{pmatrix} O & 3B^* \\ 2A^* & O \end{pmatrix}. \quad (B) \begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix}.$$

$$(C) \begin{pmatrix} O & 3A^* \\ 2B^* & O \end{pmatrix}. \quad (D) \begin{pmatrix} O & 2A^* \\ 3B^* & O \end{pmatrix}.$$

【精解】 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} O & |A|B^* \\ |B|A^* & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix}.$

因此, 本题选 B.

【附注】 本题是按第二篇快捷解题方法 70 计算判断的.

6. 设 A, P 均为 3 阶矩阵, P^T 为 P 的转置矩阵, 且 $P^TAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. 若 $P = (\alpha_1,$

$\alpha_2, \alpha_3)$, $Q = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3)$, 则 $Q^T A Q$ 为

$$(A) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad (B) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$(C) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad (D) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

【精解】 由 $Q = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 知

$$Q^T A Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T (P^T A P) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(即将 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 的第 2 行加到第 1 行后,

将第 2 列加到第 1 列)

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

因此, 本题选 A.

【附注】 本题是基本题.

7. 设事件 A 与事件 B 互不相容, 则

(A) $P(\bar{A}\bar{B}) = 0$. (B) $P(AB) = P(A)P(B)$.

(C) $P(A) = 1 - P(B)$. (D) $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1$.

【精解】 由 A 与 B 互不相容知 $AB = \emptyset$, 即 $\bar{A} \cup \bar{B} = \Omega$ (必然事件), 所以 $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1$.

因此, 本题选 D.

【附注】 本题是基本题.

8. 设随机变量 x 与 y 相互独立, 且 x 服从标准正态分布 $N(0, 1)$, y 的概率分布为 $P(y=0) = P(y=1) = \frac{1}{2}$, 记 $F_Z(z)$ 为随机变量 $Z = xy$ 的分布函数, 则函数 $F_Z(z)$ 的间断点个数为

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

【精解】 由于 $F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(xy \leq z)$

$$= P(y=0)P(xy \leq z | y=0) + P(y=1)P(xy \leq z | y=1)$$

$$= \frac{1}{2}P(x \cdot 0 \leq z | y=0) + \frac{1}{2}P(x \cdot 1 \leq z | y=1)$$

$$= \frac{1}{2}[P(0 \leq z) + P(x \leq z)] \quad (\text{利用 } x \text{ 与 } y \text{ 相互独立})$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}\Phi(z), & z < 0, \\ \frac{1}{2}[1 + \Phi(z)], & z \geq 0 \end{cases} \quad (\text{其中, } \Phi(x) \text{ 是 } x \text{ 的分布函数})$$

$$= \frac{1}{2}\Phi(z) + \begin{cases} 0, & z < 0, \\ 1, & z \geq 0. \end{cases}$$

所以, $F_Z(z)$ 仅有一个间断点 $z=0$.

因此, 本题选 B.

【附注】 本题是按第二篇快捷解题方法 89 计算和判断的.

二、填空题: 第 9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分.

9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2} - 1} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【精解】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2} - 1} = -e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\cos x} - 1}{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}$

$$= -e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\frac{1}{3}x^2} = 3e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{3}{2}e.$$

【附注】 本题是按第二篇快捷解题方法 04 计算的.

10. 设 $z = (x + e^y)^x$, 则 $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(1,0)} =$ _____.

【精解】 $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(1,0)} = \left. \frac{\partial}{\partial x} (x + e^y)^x \right|_{(1,0)} = \left. \frac{d}{dx} (x + 1)^x \right|_{x=1}$
 $= \left. \frac{d}{dx} e^{x \ln(1+x)} \right|_{x=1} = (x + 1)^x \left[\ln(1+x) + \frac{x}{1+x} \right] \Big|_{x=1}$
 $= 2 \ln 2 + 1.$

【附注】 本题是基本题.

11. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n - (-1)^n}{n^2} x^n$ 的收敛半径为 _____.

【精解】 记 $a_n = \frac{e^n - (-1)^n}{n^2}$, 则收敛半径为

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{e^n - (-1)^n}{n^2}}{\frac{e^{n+1} - (-1)^{n+1}}{(n+1)^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n - (-1)^n}{e^{n+1} - (-1)^{n+1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n}{e^{n+1}} = \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

【附注】 本题是基本题, 但是 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n - (-1)^n}{e^{n+1} - (-1)^{n+1}}$ 是按第二篇快捷解题方法 05 计算的.

12. 设某产品的需求函数为 $Q = Q(p)$, 其对价格 p 的弹性 $\varepsilon_p = 0.2$, 则当需求量为 10000 件时, 价格增加 1 元会使产品收益增加 _____ 元.

【精解】 收益函数 $L = Qp$, 所以

$$\frac{dL}{dp} = p \frac{dQ}{dp} + Q. \quad (1)$$

由于 $\varepsilon_p = -\frac{p}{Q} \frac{dQ}{dp}$, 所以由题设得

$$-\frac{p}{Q} \frac{dQ}{dp} = 0.2, \text{ 即 } p \frac{dQ}{dp} = -0.2Q.$$

将它代入式(1)得

$$\frac{dL}{dp} = -0.2Q + Q = 0.8Q.$$

于是 $\left. \frac{dL}{dp} \right|_{Q=10000} = 0.8 \times 10000 = 8000$, 即当需求量为 10000 件时, 价格增加 1 元, 会使产品收益增加 8000 元.

【附注】 本题是基本题, 但应记住需求函数 Q 对格价 p 的弹性 ε_p 的计算公式为 $\varepsilon_p = -\frac{p}{Q} \frac{dQ}{dp}$ (由于 $\frac{dQ}{dp} < 0$, 所以在公式右边加“-”号, 以保证 $\varepsilon_p > 0$).

13. 设 $\alpha = (1, 1, 1)^T$, $\beta = (1, 0, k)^T$. 若矩阵 $\alpha\beta^T$ 相似于 $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $k =$ _____.

【精解】 由于 $\alpha\beta^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (1, 0, k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 1 & 0 & k \\ 1 & 0 & k \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 所以它们主对角线上的

元素之和彼此相等, 即 $k=2$.

【附注】 本题是基本题, 它利用了相似矩阵的以下性质:

设 $A \sim B$, 则 $\text{tr}A = \text{tr}B$.

14. 设 $X_1, X_2, \dots, X_m$ 是来自二项分布总体 $B(n, p)$ 的简单随机样本, $\bar{X}, S^2$ 分别为样本均值和样本方差, 记统计量 $T = \bar{X} - S^2$, 则 $E(T) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【精解】 $E(T) = E(\bar{X} - S^2) = E(\bar{X}) - E(S^2)$, (1)

其中, $E(\bar{X}) = E(X) = np$ (这里 X 是总体),

$$E(S^2) = D(X) = np(1-p).$$

将它们代入式(1)得

$$E(T) = np - np(1-p) = np^2.$$

【附注】 本题是按第二篇快捷解题方法 99 计算的.

三、解答题: 第 15~23 小题, 共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (本题满分 9 分)

求二元函数 $f(x, y) = x^2(2+y^2) + y \ln y$ 的极值.

【精解】 $f(x, y)$ 的定义域为 $-\infty < x < +\infty, y > 0$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x(2+y^2), \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2y + 1 + \ln y.$$

$$\text{由} \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} 2x(2+y^2) = 0, \\ 2x^2y + 1 + \ln y = 0 \end{cases} \text{得唯一可能极值点 } x=0, y=\frac{1}{e}.$$

$$\text{由于 } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{(0, \frac{1}{e})} = 2(2+y^2) \Big|_{\frac{1}{e}} = 2\left(2 + \frac{1}{e^2}\right) > 0,$$

$$\begin{aligned} \left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right]_{(0, \frac{1}{e})} &= \left[(4xy)^2 - 2(2+y^2) \cdot \left(2x^2 + \frac{1}{y} \right) \right] \Big|_{(0, \frac{1}{e})} \\ &= -\frac{2}{e} \left(2 + \frac{1}{e^2} \right) < 0, \end{aligned}$$

所以, $f(x, y)$ 仅有极小值 $f\left(0, \frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$, 无极大值.

【附注】 本题是基本题, 但应熟练掌握二元函数极值的计算方法.

16. (本题满分 10 分)

计算不定积分 $\int \ln\left(1 + \sqrt{\frac{1+x}{x}}\right) dx \ (x > 0)$.

$$\begin{aligned} \text{【精解】} \quad \int \ln\left(1 + \sqrt{\frac{1+x}{x}}\right) dx &\stackrel{\text{令 } t = \sqrt{\frac{1+x}{x}}}{=} \int \ln(1+t) d\frac{1}{t^2-1} \\ &= \frac{\ln(1+t)}{t^2-1} - \int \frac{1}{t^2-1} \cdot \frac{1}{t+1} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\ln(1+t)}{t^2-1} - \int \frac{1}{(t-1)(t+1)^2} dt \\
&= \frac{\ln(1+t)}{t^2-1} - \frac{1}{4} \int \left[\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} - \frac{2}{(t+1)^2} \right] dt \\
&= \frac{\ln(1+t)}{t^2-1} - \frac{1}{4} \ln \frac{t-1}{t+1} - \frac{1}{2(t+1)} + C \\
&= x \ln \left(1 + \sqrt{\frac{1+x}{x}} \right) + \frac{1}{2} \ln(\sqrt{1+x} + \sqrt{x}) - \frac{\sqrt{x}}{2(\sqrt{1+x} + \sqrt{x})} + C.
\end{aligned}$$

【附注】 本题是按第二篇快捷解题方法 29, 通过变量代换并与分部积分法结合计算的.

17. (本题满分 10 分)

计算二重积分 $\iint_D (x-y) dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) \mid (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2, y \geq x\}$.

【精解】 由 $D = \{(x, y) \mid (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2, y \geq x\}$

$$\stackrel{\text{令}}{=} \frac{x=1+r\cos\theta,}{y=1+r\sin\theta} \left\{ (r, \theta) \mid r \leq \sqrt{2}, \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{4} \right\}$$

$$\begin{aligned}
\text{知} \quad \iint_D (x-y) dx dy &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r(\cos\theta - \sin\theta) \cdot r dr = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\cos\theta - \sin\theta) d\theta \cdot \int_0^{\sqrt{2}} r^2 dr \\
&= (\sin\theta + \cos\theta) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \cdot \frac{1}{3} r^3 \Big|_0^{\sqrt{2}} \\
&= -2\sqrt{2} \times \frac{2}{3}\sqrt{2} = -\frac{8}{3}.
\end{aligned}$$

【附注】 本题是按第二篇快捷解题方法 51 求解的.

18. (本题满分 11 分)

(I) 证明拉格朗日中值定理: 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$.

(II) 证明: 若函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续, 在 $(0, \delta)$ ($\delta > 0$) 内可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = A$, 则 $f'_+(0)$ 存在, 且 $f'_+(0) = A$.

【精解】 (I) 作辅助函数

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a),$$

则 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $F(a) = F(b) (= f(a))$, 所以由罗尔定理知存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $F'(\xi) = 0$, 即

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a).$$

$$(II) \text{ 由于 } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(\xi)x}{x} (\xi \in (0, x))$$

(这是由于 $f(x)$ 在 $[0, x]$ ($x \in (0, \delta)$) 上连续, 在 $(0, x)$ 内可导, 所以由拉格朗日中值定理知, 存在 $\xi \in (0, x)$, 使得 $f(x) - f(0) = f'(\xi)x$)

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow 0^+} f'(\xi) = A,$$

所以, $f'_+(0) \left(= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} \right)$ 存在且为 A .

【附注】 本题(I)是拉格朗日中值定理的证明,它表明,对于微积分中的重要定理,也应掌握它的证明.(II)是基本题,它可由右导数的定义及(I)中证明的结论推得.

19. (本题满分10分)

设曲线 $y=f(x)$, 其中 $f(x)$ 是可导函数, 且 $f(x) > 0$, 已知曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=0, x=1, x=t(t>1)$ 所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周所得的立体体积值是该曲边梯形面积值的 πt 倍, 求该曲线的方程.

【精解】 由题设得

$$\pi \int_1^t f^2(x) dx = \pi t \int_1^t f(x) dx, \text{ 即 } \int_1^t f^2(x) dx = t \int_1^t f(x) dx. \quad (1)$$

式(1)的两边对 t 求导数得

$$f^2(t) = \int_1^t f(x) dx + t f(t). \quad (2)$$

式(2)的两边对 t 求导数得

$$2f(t)f'(t) = f(t) + f(t) + t f'(t), \text{ 即 } \frac{dy}{dt} = \frac{2y}{2y-t}.$$

将上式改写成

$$\frac{dt}{dy} = \frac{2y-t}{2y}, \text{ 即 } \frac{dt}{dy} + \frac{1}{2y}t = 1. \text{ (一阶线性微分方程)}$$

它的通解为

$$\begin{aligned} t &= e^{-\int \frac{1}{2y} dy} \left(C + \int 1 \cdot e^{\int \frac{1}{2y} dy} dy \right) = \frac{1}{\sqrt{y}} \left(C + \int \sqrt{y} dy \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{y}} \left(C + \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} \right) = \frac{C}{\sqrt{y}} + \frac{2}{3} y. \end{aligned} \quad (3)$$

在式(2)中令 $t=1$ 得 $y=f(1)=1$ (这里利用 $f(t)>0$), 将它们代入(3)得

$$1 = C + \frac{2}{3}, \text{ 即 } C = \frac{1}{3}$$

将它代入式(3)得

$$t = \frac{1}{3\sqrt{y}} + \frac{2}{3}y.$$

故所求的曲线方程 $x = \frac{1}{3\sqrt{y}} + \frac{2}{3}y (y>0)$.

【附注】 本题的积分方程是按第二篇快捷解题方法 66 求解的.

20. (本题满分11分)

$$\text{设 } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}, \xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(I) 求满足 $A\xi_2 = \xi_1, A^2\xi_3 = \xi_1$ 的所有向量 ξ_2, ξ_3 ;

(II) 对(I)中的任意向量 ξ_2, ξ_3 , 证明 ξ_1, ξ_2, ξ_3 线性无关.

【精解】 (I) 先算 ξ_2 :

对 $A\xi_2 = \xi_1$ 的增广矩阵施行初等行变换:

$$\begin{aligned}(A : \xi_1) &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & -2 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),\end{aligned}$$

由此可知,所有的 ξ_2 为 $\xi_2 = C_1 \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1 \right)^T + \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right)^T = \left(\frac{1}{2}C_1 - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}C_1 + \frac{1}{2}, C_1 \right)^T$ (其中 C_1 是任意常数).

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

接着计算 ξ_3 :

对 $A^2\xi_3 = \xi_1$ 的增广矩阵施行初等行变换:

$$\begin{aligned}(A^2 : \xi_1) &= \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).\end{aligned}$$

由此可知,所有的 ξ_3 的为 $\xi_3 = C_2 (-1, 1, 0)^T + C_3 (0, 0, 1)^T + \left(-\frac{1}{2}, 0, 0 \right)^T = \left(-C_2 - \frac{1}{2}, C_2, C_3 \right)^T$ (其中 C_2, C_3 是任意常数).

$$(II) \text{ 由于 } |(\xi_1, \xi_2, \xi_3)| = \begin{vmatrix} -1 & \frac{1}{2}C_1 - \frac{1}{2} & -C_2 - \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2}C_1 + \frac{1}{2} & C_2 \\ -2 & C_1 & C_3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} -1 & \frac{1}{2}C_1 - \frac{1}{2} & -C_2 - \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -2 & C_1 & C_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \neq 0, \text{ 所以,}$$