高校经典教材同步辅导

九章丛书

概率论与数理统计教程

（高教第四版）

辅导及习题全解

主编／周奎伟 宋彩霞

编写／九章系列课题组

人民日报出版社

高校经典教材同步辅导

概率论与数理统计教程

（高教第四版）

辅导及习题全解

人民日报出版社

图书在版编目(CIP)数据

高校经典教材同步辅导·概率论与数理统计教程(高教第四版)/周奎伟,宋彩霞主编.—北京:人民日报出版社,2004.9

ISBN 7-80153-967-2

Ⅰ.高… Ⅱ.①周…②宋… Ⅲ.高校—教学参考资料

Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 099673 号

高校经典教材同步辅导·概率论与数理统计教程(高教第四版)

主　　编:周奎伟　宋彩霞
责任编辑:曲　易
封面设计:伍克润

出版发行:人民日报出版社(北京金台西路 2 号/邮编:100733)
经　　销:新华书店
印　　刷:北京顺天意印刷有限公司

字　　数:334 千字
开　　本:787×960　1/16
印　　张:21.75
印　　数:3000
版　　次:2005 年 8 月第 1 次印刷

书　　号:ISBN 7-80153-967-2/G·550
定　　价:21.80 元(全五册·128.00 元)

前　　言

本书是高等教育出版社出版的普通高等教育“十五”国家级规划教材《概率论与数理统计教程》(第四版)一书的辅导及习题全解. 全书按教材各章顺序编排,与教材题号一致,对各章全部习题都做了详尽解答. 同时,本书亦可作为一本概率统计的参考书独立使用,以帮助读者更好的学习该课程.

本书各章均由四部分组成:

(一)重点内容提要

该部分包含有知识结构、基本概念、主要内容三个小部分,对本章的基本概念、定理、公式等进行了归纳总结,便于读者掌握本章知识要点.

(二)经典例题解析

该部分选取了一些有启发性或综合性较强的经典例题,对所给例题先进行分析,再给出详细解答,并在最后作出点评,意在抛砖引玉.

(三)课后习题解答

该部分对每一道习题做了知识点窍、逻辑推理、解题过程的分析,希望读者能够掌握解题的思路、方法和技巧,从而能举一反三,以不变应万变.

(四)全真考题详解

该部分选取了近年来全国高等学校硕士研究生入学统一考试数学试题中有关概率论与数理统计部分的一些比较经典的试题,不仅对报考硕士研究生的读者有所帮助,而且对学习本课程的读者也有参考之处.

由于编者水平有限,书中难免有错误、疏漏及不妥之处,恳请读者批评指正.

编者

2005 年 6 月

目　　录

第一章　随机事件及其概率

一、重点内容提要

Ⅰ. 知识结构

- 随机事件与样本空间(频率与概率)
- 事件的关系及运算
- 概率的计算
  - 古典概率
  - 加法公式
  - 乘法公式
  - 全概率公式
  - 贝叶斯公式
- 随机事件的独立性(二项概率公式)
- 概率论的公理化体系

Ⅱ. 基本概念

1. 随机试验

若试验(观察或实验过程)满足:

(ⅰ)可以在相同条件下重复进行;

(ⅱ)结果有多种可能性,并且所有可能结果事先已知;

(ⅲ)作一次试验究竟哪个结果出现,事先不能确定,则称试验为随机试验,记为 E.

2. 样本空间

试验所有可能结果组成的集合称为样本空间,记为 Ω.

3. 样本点

试验的每一个可能结果称为样本点.

4. 随机事件

样本空间 Ω 的任一个子集,用大写字母 $A,B,C,\cdots$,表示.

如果在每次试验的结果中，某事件一定发生，则这一事件叫做必然事件，用字母 U 表示；相反地，如果某事件一定不发生，则叫做不可能事件，用字母 V 表示.

5. 基本事件

如果一个随机事件只含一个不可再分的试验结果称为试验的一个基本事件(即由单个样本点构成的集合).

6. 频率

设随机事件 A 在 n 次重复试验中发生了 m 次，则比值 $\frac{m}{n}$ 叫做随机事件 A 的频率，记住 $f_n(A)$，即

$$f_n(A)=\frac{m}{n}. \tag{1.1}$$

7. 概率

在大量重复试验中，随机事件 A 的频率具有稳定性，即当试验次数 n 很大时，频率 $f_n(A)$ 常在一个确定的数字 $p(0<p<1)$ 的附近摆动，这个刻画随机事件在试验中发生的可能性大小的数字 p 叫做随机事件 A 的概率，记作 $P(A)$，即

$$P(A)=p\approx f_n(A). \tag{1.2}$$

Ⅲ. 主要内容

1. 事件的关系和运算

(1)四种关系

关　系	符　号	概率论的定义	集合论的含义
包含关系	$A\subset B$	事件 A 发生必然导致 B 发生	A 是 B 的子集
相等	$A=B$	$A\subset B$ 且 $B\subset A$	A 与 B 相等
对立关系	$\overline{A}$	A 不发生所构成的事件	A 的补集
互不相容(或互斥)	$AB=\varnothing$	事件 A 与 B 不能同时发生	A 与 B 没有公共元素

(2)三种运算

运　算	符　号	概率论的定义	集合论的定义
事件的并 (或和)	$A\cup B$ (或 $A+B$) $\bigcup_{i=1}^{n}A_i$	事件 A 与 B 至少一个发生 事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 至少一个发生	A 与 B 的并集 $A_1,\cdots,A_n$ 的并集

运　算	符　号	概率论的定义	集合论的定义
事件的交（或积）	$A\cap B$（或 AB） $\bigcap_{i=1}^{n}A_i$	事件 A 与 B 同时发生 事件 $A_1,\cdots,A_n$ 至少一个发生	A 与 B 的交集 $A_1,\cdots,A_n$ 的交集
事件的差	$A-B$ 或$(A\overline{B})$	事件 A 发生而事件 B 不发生	A 与 B 的差集

(3) 事件的运算律

①交换律

$$A\cup B=B\cup A;\quad A\cap B=B\cap A.$$

②结合律

$$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C;\quad A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C.$$

③分配律

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C);$$
$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C).$$

④德·摩根律：

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B};\quad \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}.$$
$$\overline{\bigcup_{k=1}^{n}A_k}=\bigcap_{k=1}^{n}\overline{A}_k;\quad \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{A}_n;$$
$$\overline{\bigcup_{k=1}^{n}A_k}=\bigcap_{k=1}^{n}\overline{A}_k;\quad \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{A}_n.$$

2. 古典概型

设随机事件 E 的样本空间 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$. n 为有限的正整数，且每个样本点 $\omega_i(i=1,2,\cdots,n)$ 出现的可能性相等，若事件 A 包含 m 个基本事件，则

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{\text{事件 }A\text{ 包含的基本事件数 }m}{\text{基本事件总数 }n} \tag{1.3}$$

3. 几何概型

设试验的基本事件有无穷多个，但是可用某种几何特征（如长度、面积、体积）来表示其总和，设为 S；并且其中的一部分，即随机事件 A 所包含的基本事件数，也可用同样的几何特征来表示，设为 s；则随机事件 A 的概率

$$P(A)=\frac{s}{S}. \tag{1.4}$$

4. 加法公式

对两个事件 A 和 B，有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB). \tag{1.5}$$

特别地，若事件 A,B 互斥，则有

$$P(B\cup A)=P(A)+P(B). \tag{1.6}$$

可以推广为：

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3),$$

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=S_1-S_2+S_3-S_4+\cdots+(-1)^{n-1}S_n,$$

其中

$$S_1=\sum_{i=1}^{n}P(A_i),\qquad S_2=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j),$$

$$S_3=\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k),\ \cdots,\ S_n=P(A_1A_2\cdots A_n).$$

5. 条件概率与乘法公式

设 A,B 是两个事件，且 $P(A)>0$，称

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)} \tag{1.7}$$

为在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率.

由条件概率公式，得乘法公式

$$P(AB)=P(A\mid B)P(B)=P(B\mid A)P(A). \tag{1.8}$$

乘法公式的推广：

对于任何正整数 $n\geqslant 2$，当 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$ 时，有

$$P(A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)\cdots P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$

6. 全概率公式

如果事件组 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 满足：

①$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 两两互斥，且 $P(B_k)>0(k=1,2,\cdots,n)$；

②$\bigcup_{k=1}^{n}B_k=\Omega$

则对任一事件 A，有

$$P(A)=\sum_{k=1}^{n}P(B_k)P(A|B_k). \tag{1.9}$$

7. 贝叶斯公式

设试验 E 的样本空间为 Ω，事件组 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 满足全概率公式的①、②，则对任何一事件 A，当 $P(A)>0$ 时，有

$$P(B_i|A)=\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{k=1}^{n}P(B_k)P(A|B_k)}\qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{1.10}$$

8. 事件的独立性

如果事件 A、B 中任一事件的发生不影响另一事件的发生概率，则称它们是相互独立的. 且有

$$P(A \mid B) = P(A), P(B \mid A) = P(B).$$

易知有

$$P(AB) = P(A)P(B) \tag{1.11}$$

进行一系列试验，每次试验的结果与其他各次试验的结果无关，事件 A 的概率 $P(A)$ 在各次试验中保持不变，这样的一系列试验叫做独立试验序列. 设每次试验只有两个互相对立的结果 A 与 $\overline{A}$，且

$$P(A) = p, \quad P(\overline{A}) = q, \quad 0 < p < 1, \quad p + q = 1.$$

则在 n 次试验中事件 A 恰发生 m 次的概率(二项概率公式)

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \tag{1.12}$$

9. 概率的公理化定义

设 E 是随机试验，Ω 是它的样本空间，对于 E 的每一个事件 A，赋予一个实数 $P(A)$，若有(1)$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$；(2)$P(\Omega) = 1$；(3)满足可列可加性，则称 $P(A)$ 为 A 的概率

二、经典例题解析

Ⅰ. 基本概念

例 1　设 A, B 为两事件，且 $P(A) = p, P(AB) = P(\overline{A}\,\overline{B})$，求 $P(B)$.

【分析】　要求 $P(B)$，只能从已知事件 $P(AB) = P(\overline{A}\,\overline{B})$ 的转化入手.

【解答】　$P(\overline{A}\,\overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$

$= 1 - P(A) - P(B) + P(AB).$

由题设 $P(AB) = P(\overline{A}\,\overline{B})$，即

$$P(AB) = 1 - P(A) - P(B) + P(AB),$$

因此

$$P(B) = 1 - P(A) = 1 - p.$$

【点评】　关键是 $P(\overline{A}\,\overline{B})$ 的转化.

例 2　设 $0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1$，证明：

(1)若 A 与 B 互不相容，则 A 与 B 一定不独立；

(2)若 A 与 B 相互独立，则 A 与 B 一定是相容的.

【分析】　用定义进行说明.

【证明】 (1)由于 $AB=\varnothing$,则 $P(AB)=0$,而 $P(A)P(B)\neq 0$,因此 $P(AB)\neq P(A)P(B)$,即 A 与 B 一定不独立.

(2)由于 A 与 B 独立,故有 $P(AB)=P(A)P(B)>0$.

因此 $AB\neq\varnothing$,即 A 与 B 是相容的(不是互不相容的).

【点评】 互不相容与相互独立是两个非常重要的概念,应分清两者之间的差异.由本题可知,在一般情况下,若 A 与 B 互不相容时,A 与 B 一定不独立,即 A 发生时,B 一定不发生,A 的发生严重影响了 B 的发生;反之,当 A 与 B 独立时,A 与 B 一定是相容的,即 A 与 B 可同时发生.

例 3 设两个相互独立的事件 A 与 B 都不发生的概率为 $1/9$,A 发生 B 不发生的概率与 B 发生 A 不发生的概率相等,求 $P(A)$.

【分析】 由 $P(A-B)=P(B-A)$ 可知,$P(A)=P(B)$

【解答】 由题设可知

$$P(AB)=P(A)P(B),$$

$$P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})=\frac{1}{9},$$

$$P(A-B)=P(B-A),$$

因此

$$P(A)=P(A-B)+P(AB)=P(B-A)+P(AB)=P(B),$$

所以

$$P(\overline{A})=P(\overline{B}),$$

故有

$$P^2(\overline{A})=\frac{1}{9},\qquad P(\overline{A})=\frac{1}{3},$$

即

$$P(A)=1-P(\overline{A})=\frac{2}{3}.$$

【点评】 准确理解事件运算、事件相互独立的概念是至关重要的.

Ⅱ. 综合题

例 4 袋中有 a 个白球和 b 个红球,现按无放回抽样,依次把球一个个取出来.试求第 k 次取出的球是白球的概率($1\leqslant k\leqslant a+b$).

【分析】 要选定好试验概型,可将该例中的抽样视为一个排列,找准切入点.

【解答】 **解法 1** 把 $a+b$ 个球编号,把球依摸出的先后次序排队,则基本事件总数为 $a+b$ 个相异元素的全排列,有 $(a+b)!$ 种,设 $A=\{$第 k 次取出的球是白球$\}$,这相

当于在第 k 个位置上放一个白球，在其余 $a+b-1$ 个位置上放另外的 $a+b-1$ 个球，从而 A 包含基本事件数为 $a(a+b-1)!$，故所求的概率为

$$P(A)=\frac{a(a+b-1)!}{(a+b)!}=\frac{a}{a+b}.$$

解法 2 将球看作是各不相同的，只考虑前 k 个位置，此时基本事件总数为 A_{a+b}^{k}，设 $A=\{$第 k 次取出的球是白球$\}$，这相当于在第 k 个位置上放一个白球，有 a 种方法，在其余 $k-1$ 个位置上放从余下的 $a+b-1$ 个球中任取的 $k-1$ 个球，有 A_{a+b-1}^{k-1}，从而 A 包含基本事件数为 aA_{a+b-1}^{k-1}，故所求的概率为

$$P(A)=\frac{aA_{a+b-1}^{k-1}}{A_{a+b}^{k}}=\frac{a}{a+b}.$$

【点评】 (1)如每次抽完再放回，则第 k 次取出的是白球的概率仍是 $a/(a+b)$. 也就是说，不管是放回抽样还是不放回抽样，第 k 次取出的球是白球的概率都是 $a/(a+b)$.

(2)上面的计算结果表明，事件 $A=\{$第 k 次取出的球是白球$\}$的概率 $P(A)$ 与 k 无关，即 A 发生的概率与取球的先后次序无关，而且不管是放回抽样还是不放回抽样，这就是所谓的"抽签原理"，直觉经验也能说明这一点：$a+b$ 个人摸 $a+b$ 张彩票，其中有 a 张彩票有奖，则任何人中奖的概率都是 $a/(a+b)$，否则"摸彩票"这种办法就不公平了. 在体育比赛或其他一些机会均等活动场合人们也经常利用这一原理.

例 5 在 1,2,3,4,5 这 5 个数字中，每次取出一个数字，取后不放回，连取两次，求在第 1 次取到偶数的条件下，第 2 次取到奇数的概率.

【分析】 利用条件概率公式求解.

【解答】 用(i,j)表示第一次取出数 i 且第二次取出数字 j，则随机试验产生的样本空间为

$$\Omega=\{(i,j)\mid i\neq j;i,j=1,2,3,4,5\}$$

记 $A=\{$第一次取出偶数$\}$，$B=\{$第二次取出奇数$\}$，考虑两次取数的随机试验所构成的样本空间 Ω，容易求得 Ω 包含的样本点数为 A_5^2，其第一个数字是偶数的样本点有 $C_2^1\cdot C_4^1$ 个，故

$$P(A)=\frac{C_2^1\cdot C_4^1}{A_5^2}=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$$

第一次取出偶数且第二次取出奇数的样本点有 $C_2^1\cdot C_3^1$ 个，故

$$P(AB)=\frac{C_2^1\cdot C_3^1}{A_5^2}=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$$

由条件概率公式得

$$P(B \mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{3}{10}}{\frac{2}{5}}=\frac{3}{4}.$$

【点评】 在求解 $P(A)$时，隐含了第二次取数的信息，所以是 $C_2^1C_4^1$.

例6 发报台分别以概率 0.6 和 0.4 发出信号“·”及“—”，由于通信系统受到干扰，当发出信号“·”时收报台分别以概率 0.8 和 0.2 收到信息“·”和“—”；又当发出信号“—”时，收报台分别以概率 0.9 及 0.1 收到信号“—”及“·”. 求当收报台收到“·”时，发报确定实发出“·”的概率，以及收到“—”时，确实发出“—”的概率.

【分析】 该题属于已知试验已发生某种结果，确定其中某一原因发生的概率，因此要用到贝叶斯公式.

【解答】 设 A_1、B_1 表示发报台发出信号“·”、“—”的事件. A_2、B_2 表示收报台收到信号“·”、“—”则

$$P(A_1)=0.6 \quad P(B_1)=0.4 \quad P(A_2|A_1)=0.8$$
$$P(B_2|A_1)=0.2 \quad P(B_2|B_1)=0.9 \quad P(A_2|B_1)=0.1$$

由贝叶斯公式得

$$P(A_1|A_2)=\frac{P(A_1)P(A_2|A_1)}{P(A_1)P(A_2|A_1)+P(B_1)P(A_2|B_1)}$$
$$=\frac{0.6\times0.8}{0.6\times0.8+0.4\times0.1}=\frac{48}{52}=\frac{12}{13}$$
$$P(B_1|B_2)=\frac{P(B_1)P(B_2|B_1)}{P(B_1)P(B_2|B_1)+P(A_1)P(B_2|A_1)}$$
$$=\frac{0.4\times0.9}{0.4\times0.9+0.6\times0.2}=\frac{36}{48}=\frac{3}{4}.$$

【点评】 注意区分后验概率贝叶斯公式和先验概率中的条件概率，分清结果事件，原因事件，将具体题目信息，抽象成数学模型，正确运用公式.

例 7. 某仪器装有 L_1,L_2,L_3 三个不同的元件，它们在规定时间内损坏的概率分别为 0.4,0.5,0.7，已知一个元件损坏，仪器发生故障的概率为 0.2；两个元件损坏，仪器发生故障的概率为 0.6，三个元件损坏仪器必然发生故障，求在规定的时间内仪器发生故障的概率.

【分析】 欲求概率的事件是仪器发生故障，它与一个、两个、三个元件损坏都有关系，由题目条件分析它们之间关系，本题关键是在于找全原因.

【解答】 (1)欲求概率事件是“仪器发生故障”，故设 A=“仪器发生故障”

(2)A 和几个元件损坏有关，因此设 B_i=“恰有 i 个元件损坏”，$i=1,2,3$.

(3)A 与 B_1,B_2,B_3 有下列关系：

$A=B_1A+B_2A+B_3A$

因 B_1,B_2,B_3 互不相容,且 $P(B_i)>0,i=1,2,3$ 故应用全概率公式.

(4) $P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+P(B_3)P(A|B_3)=0.2\times P(B_1)+0.6\times P(B_2)+P(B_3)$

只要算出 $P(B_1),P(B_2),P(B_3)$ 问题就解决了.我们重复上述的步骤.

(1) B_1,B_2,B_3 如上所设

(2) B_i 与哪个元件损坏有关($i=1,2,3$),故设 C_j="元件 L_j 损坏" $j=1,2,3$

(3) $B_1=C_1\overline{C}_2\overline{C}_3+\overline{C}_1C_2\overline{C}_3+\overline{C}_1C_2C_3$

$B_2=C_1C_2\overline{C}_3+C_1\overline{C}_2C_3+\overline{C}_1C_2C_3$

$B_3=C_1C_2C_3$

(4)利用加法公式并注意到互不相容性和独立性知

$$\begin{aligned}P(B_1)&=P(C_1\overline{C}_2\overline{C}_3)+P(\overline{C}_1C_2\overline{C}_3)+P(\overline{C}_1\overline{C}_2C_3)\\&=P(C_1)P(\overline{C}_2)P(\overline{C}_3)+P(\overline{C}_1)P(C_2)P(\overline{C}_3)+P(\overline{C}_1)P(\overline{C}_2)P(C_3)\\&=0.4\times0.5\times0.3+0.6\times0.5\times0.3+0.6\times0.5\times0.7\\&=0.36\end{aligned}$$

$P(B_2)=0.41,P(B_3)=0.14$

代入 $P(A)$ 的关系式得 $P(A)=0.458$,即在规定的时间内仪器发生故障的概率为 0.458.

【点评】 利用基本公式计算概率的一般步骤是:

(1)写出欲求概率的事件 A.

(2)分析 A 与哪些事件有关,用字母(如 $B_1,\cdots,B_n$)将这些事件表示出来.

(3)分析 A 与 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 是什么关系,写出事件的关系式.

(4)选择适当的公式计算概率.

三、课后习题解答

1.1 任意抛掷一颗骰子,观察出现的点数.设事件 A 表示"出现偶数点",事件 B 表示"出现的点数能被 3 整除".

(1)写出试验的样本点及样本空间;

(2)把事件 A 及 B 分别表示为样本点的集合;

(3)下列事件:

$$\overline{A},\overline{B},A\cup B,AB,\overline{A\cup B}$$

分别表示什么事件?并把它们表示为样本点的集合.

【知识点窍】 样本点、样本空间、随机事件的基本概念、事件的关系和运算

【逻辑推理】 掷一颗骰子可视为一次随机试验，其所有可能的结果有"出现1点"，"出现2点"，…，"出现6点"，便可得到试验的样本点和样本空间 Ω. $\overline{A}$ 表示 A 的对立事件，$\overline{A}=\Omega-A$.

【解答】 (1)试验的样本点 $\omega_i=$"出现 i 点"， $i=1,2,3,4,5,6$；

样本空间 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6\}$.

(2)A 表示"出现偶数点"，"即2点、4点或6点"

所以有 $A=\{\omega_2,\omega_4,\omega_6\}$.

同理有 $B=\{\omega_3,\omega_6\}$

(3)$\overline{A}$ 表示"出现奇数点"，且 $\overline{A}=\{\omega_1,\omega_3,\omega_5\}$；

$\overline{B}$ 表示：出现的点不能被3整除，且 $\overline{B}=\{\omega_1,\omega_2,\omega_4,\omega_5\}$；

$A\cup B$ 表示"出现的点数为偶数或能被3整除"，且 $A\cup B=\{\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_6\}$

$\overline{A\cup B}$表示"出现的点数为奇数且不能被3整除"，$\overline{A\cup B}=\{\omega_1,\omega_5\}$

1.2 设 A、B、C 表示三个随机事件，试将下列事件用 A、B、C 表示出来：

(1)仅 A 发生；

(2)A、B、C 都发生；

(3)A、B、C 都不发生；

(4)A、B、C 不都发生；

(5)A 不发生，且 B、C 中至少有一事件发生；

(6)A、B、C 中至少有一事件发生；

(7)A、B、C 中恰有一事件发生；

(8)A、B、C 中至少有二事件发生；

(9)A、B、C 中最多有一事件发生.

【知识点窍】 随机事件的运算

【逻辑推理】 "仅 A 发生"意味着"A 发生，且 B、C 都不发生"；"不都发生"看成是"都发生"的逆事件；"n 个事件中至少有一事件发生"即为 n 个事件的并，(7)应分解成符合条件的所有小事件，(9)为(8)的逆事件.

【解答】 (1)$A\overline{B}\,\overline{C}$

(2)ABC

(3)$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$

(4)$\overline{ABC}$

(5)$(\overline{A}B\overline{C})\cup(\overline{A}\overline{B}C)\cup(\overline{A}BC)=\overline{A}(B\cup C)$

(6)$A\cup B\cup C$

(7)$(A\bar{B}\bar{C})\cup(\bar{A}B\bar{C})\cup(\bar{A}\bar{B}C)$

(8)$(AB)\cup(AC)\cup(BC)$

(9)$\overline{(AB)\cup(AC)\cup(BC)}$

1.3　袋中有 10 个球，分别写有号码 1～10，其中 1，2，3，4，5 号球为红球；6，7，8 号球为白球；9，10 号球为黑球. 设试验为：

(1)从袋中任取一个球，观察其颜色；

(2)从袋中任取一个球，观察其号码.

分别写出试验的基本事件及样本空间，并指出样本空间中的基本事件是否等可能的.

【知识点窍】　基本事件、样本空间、概率的基本概率

【逻辑推理】　因为袋中 10 个球为 3 种颜色，10 个编号，所以观察颜色有红、白、黑三个基本事件，观察号码有 1～10 十个基本事件. 由古典概型的概率计算公式便可知道各基本事件的概率.

【解题过程】　(1)从袋中任一个球，如果试验是为了观察取出的球的颜色，则因为袋中有 3 种不同颜色的球，所以试验的基本事件共有 3 个，它们是：

$$\omega_{红}=“取出红球”,\omega_{白}=“取出白球”,\omega_{黑}=“取出黑球”;$$

于是有样本空间

$$\Omega_1=\{\omega_{红},\omega_{白},\omega_{黑}\}.$$

因为袋中红球、白球、黑球的个数不相等，所以上述 3 个基本事件不是等可能的.

(2)从袋中任取一个球，如果试验是为了观察取出的号球的号码，则因为袋中有 10 个不同号码的球，所以试验的基本事件共有 10 个，它们是：

$$\omega_i=“取出 i 号球”(i=1,2,\cdots,10);$$

于是有样本空间

$$\Omega_2=\{\omega_1,\omega_3,\cdots,\omega_{10}\}.$$

因为袋中 1，2，…，10 号的球各有一个，所以上述 10 个基本事件是等可能的.

1.4　电话号参与由 7 个数字组成，每个数字可以是 0，1，2，…，9 中的任一个数字(但第一个数字不能为 0)，求电话号码是由完全不相同的数字组成的概率.

【知识点窍】　排列组合

【逻辑推理】　7 位数的电话号码中，第一位数不能为 0，其余六位都可以是 0，1，…，9 中的任何一个数字. 由 0，1，…，9 组成的 7 位电话号码所有可能情况有 $P_9^1\cdot10^6$(第 1 位数从 1，2，…，9 中任取一个，剩下的 6 位均可为 0，1，…，9 中的任意一位). 完全由不相同的数字组成的可能情况有 $P_9^1\cdot P_9^6$(第一位数从 1，2，…，9 中任取一个，其余六位数则为剩下 9 个数字的一个排列 P_9^6).

【解题过程】　由 7 个数字组组成的电话号码中，总的排列数就是 $P_9^1\cdot10^6$. 所以，