四柒二

英國倫德編輯

英國　傅蘭雅　口譯
金匱　華蘅芳　筆述

本利生息

一題　將金錢一箇放出生息卯年每年將所得之利加入本內其利息之數不大于每年四分而其年數卯不過于十年則依$(一丄未)^{卯}$引長之級數之首四級以明本利之和所差必在四分銅錢之一以內求證之

金錢一箇放出生利每年加利入本則依例當得$(一丄未)^{卯}$箇金錢

$$=一丄卯未丄\frac{二}{卯(卯丅一)}未^{二}丄\cdots\cdots丄未^{卯}$$

其未爲一金錢一年之利

令

$$卯=一〇$$

$$未=〇\cdot〇四$$

則

$$(一丄〇\cdot〇四)^{一〇}=一丄一〇\times〇\cdot〇四丄\frac{一\times二}{一〇\times九}(〇\cdot〇四)^{二}丄\frac{一\times二\times三}{一〇\times九\times八}(〇\cdot〇四)^{三}丄\cdots\cdots$$

其第五級

$$=\frac{一\times二\times三\times四}{一〇\times九\times八\times七}\cdot\frac{一〇^{八}}{四^{四}}\cdot九六〇$$

$$=\frac{一〇^{八}}{二一〇\times四^{四}\times九六〇}=\frac{一〇^{八}}{五一六〇九六}=〇\cdot五一六〇九六$$

第六級

$$=\frac{五}{六}\times\frac{一〇^{二}}{四}\cdot〇\cdot五一六〇九六=〇\cdot〇二四七七三$$

第七級

$$=\frac{一〇^{二}}{四^{二}}\times〇\cdot五一六〇九六=〇\cdot〇〇〇八二六$$

第八級

$$=\frac{七}{四}\times\frac{一〇^{二}}{四}\times〇\cdot〇〇〇八二六=〇\cdot〇〇〇〇一八$$

而第九第十級以至未級更比第八級小所以易明第四級以後各級之和不足四分之一之銅錢所以級數之首四項爲所求之數少四分錢之一

二題　有人藏一票據過二十一年之後可憑此票每年收金錢二十箇今將此票賣與他人可得金錢二百二十箇求此數合于每百金錢每年利息若干（此題甚深）令天爲一箇金錢一年之本利合數則因所賣之價可以放出生利每年加利入本至二十一年其本利之和爲

$$\text{二二〇}\,天^{\text{二一}}=\text{二〇}(\text{一}+天+天^{\text{二}}+\cdots+天^{\text{二〇}})$$

即

$$\text{一一}\,天^{\text{二一}}=\frac{天^{\text{二一}}-\text{一}}{天-\text{一}}$$

即

$$\text{一一}\,天^{\text{二一}}-\frac{天^{\text{二一}}-\text{一}}{天-\text{一}}=\text{〇}$$

必從此式求其天之同數用疊借近數之法從對數表試知其天必在一·○八八一與一·○六八二之間如以一·○六八二爲眞而令之爲天之同數則一金錢一年之利爲·○六八二金錢而所求每百金錢每年之利爲六·八二 即合六箇金錢又十六箇銀錢五箇銅錢

三題　有說本利分年歸還之事呷爲每年當收之錢惟其收錢之期必過巳年始起連收午年爲止今欲從本年即收起連收午年爲止求減其每次所收之數當爲若干

令天爲所求之每年所收之錢則依（吳書第四百二十一款）呷之現價爲

$$呷=\frac{呷味^{-巳}}{味-\text{一}}\{\text{一}-味^{-午}\}$$

天之現價爲

$$天=\frac{天}{味-\text{一}}\{\text{一}-味^{-午}\}$$

依本題之理其巳＝○ 所以得

$$\frac{天}{味-\text{一}}\{\text{一}-味^{-午}\}=\frac{呷味^{-巳}}{味-\text{一}}\{\text{一}-味^{-午}\}$$

即

$$天=呷味^{-巳}=\frac{呷}{(\text{一}+未)^{巳}}$$

四題　有人將金錢吧箇放出生利每年將本年之利再照利加 $\frac{\text{一}}{寅}$ 入本錢內求過卯年之後本利如何

令未爲一金錢一年之利每年加利並利之 $\frac{\text{一}}{寅}$ 入本則一金錢變爲 $\text{一}+未+\frac{未}{寅}$ 所以其吧箇金錢之數每年必以 $\text{一}+未+\frac{未}{寅}$ 乘之即卯年必以 $\left(\text{一}+未+\frac{未}{寅}\right)^{卯}$ 乘之所以卯年之後吧金錢變爲

$$吧\left(\text{一}+未+\frac{未}{寅}\right)^{卯}$$

即

$$吧\left(\frac{寅+寅未+未}{寅}\right)^{卯}$$

五題　有人有若干產業第一年費用去其利之寅倍第

二年費用去其所餘之值之$二實$倍第三年費用爲第二年所餘之值之$三實$倍過了$二巳$年產業蕩盡求證其第巳年所費之錢等于此年之末所賸之錢

令$吧_卯$爲卯年之末之本則下一年之利爲$吧_卯未$其費用之錢爲$(卯丄一)實吧_卯未$所以在第$(卯丄一)$年其本

$$吧_{卯丄一}=吧_卯丄吧_卯未丅(卯丄一)實吧_卯未$$

$$=吧_卯\{一丄未丅(卯丄一)實未\}$$

如令$二巳$代$卯丄一$則依本題得

$$吧_{二巳丅一}\{一丄未丅二巳實未\}=〇$$

$$\therefore 一丄未=二巳實未$$

惟在第巳年其費用

$$=巳實吧_{巳丅一}未$$

又巳年末之本

$$=吧_{巳丅一}\{一丄未丅巳實未\}$$

$$=巳實吧_{巳丅一}未$$

$$\therefore 一丄未=二巳實未$$

錢

六題 有人儘其所有將吧箇金錢放出生利一金錢每年所得之利爲未而其人每年之費用實比全利多巳金錢求過若干年其錢費盡若剩一半本錢之時減其費用之半可多過若干年

一令$吧_卯$爲第卯年末之本則$吧_卯=$前一年之本$吧_{卯丅一}$加了本年之利而減了$(吧未丄巳)$即

$$吧_卯=吧_{卯丅一}味丅呷$$

此以味代$一丄未$以呷代$吧未丄巳$也

又依同理

$$吧_{卯丅一}=吧_{卯丅二}味丅呷$$

$$吧_{卯丅二}=吧_{卯丅三}味丅呷$$

$$\vdots$$

$$吧_二=吧_一味丅呷$$

$$吧_一=吧味丅呷$$

$$\therefore 吧_卯=吧_{卯丅二}味^二丅呷味丅呷$$

$$=吧_{卯丅三}味^三丅呷味^二丅呷味丅呷$$

$$=吧_{卯丅四}味^四丅呷味^三丅呷味^二丅呷味丅呷$$

$$=吧味^卯丅呷(味^{卯丅一}丄味^{卯丅二}丄\cdots丄味丄一)$$

$$=吧味^卯丅呷\frac{味^卯丅一}{味丅一}\qquad ㊀$$

其

$$吧_卯=〇$$

$$吧味^卯=呷\frac{味^卯丅一}{味丅一}$$

$$\therefore 吧未味^卯=吧未味^卯丄巳味^卯丅(吧未丄巳)$$

$$\therefore 巳味^卯=吧未丄巳$$

$$\therefore 對巳丄卯對(一丄未)=對(吧未丄巳)$$

$$\therefore 卯=\frac{對(一丄未)}{對(吧未丄巳)丅對巳}\qquad ㊁$$

二如于㊀式中令$\frac{吧}{二}$代其吧則易推費去其$吧_卯$之一半之時而此數與㊁式之較爲依題之前半節所言費

了吧之一半之時爲 $\frac{對(一上未)}{對(吧未上巳)丅對(\frac{二}{吧}未上巳)}$ 又依題之下半費了 $\frac{二}{吧}$

之時從㊁得 $\frac{對(一丅未)}{對\frac{二}{吧未}上巳丅對\frac{二}{巳}}$ 即 $\frac{對(一上未)}{對(吧未上巳)丅對巳}$ 所以所求之較 $=\frac{對(一上未)}{對(\frac{二}{吧未}上巳)丅對巳}$

七題　兩人有公地一塊並地面之房屋多間每年共得租錢爲巳金錢平半分之今欲歸并于一人許于卯年內每年以午金錢與之求巳與午相比之數

每人每年得利 $\frac{二}{巳}$ 則其本錢現値之數 $=\frac{二}{巳}\div未=\frac{二未}{巳}$ 又卯年得午金錢之票現値之價 $=午\cdot\frac{未}{一丅(一上未)^{卯}}$ $\therefore\frac{二未}{巳}=午\cdot\frac{未}{一丅(一上未)^{卯}}$ 即 $\frac{午}{巳}=二\left\{\frac{丅(一上未)^{卯}}{一}\right\}$

八題　設吧爲某邑某年所有之人數而每年內所死者爲明年人數之 $\frac{巳}{一}$ 每年所生者爲 $\frac{午}{一}$ 求過卯年之後其邑之人數當有若干

一年之末人數爲吧所增減之人 $=\frac{午}{吧}丅\frac{巳}{吧}=吧\cdot\frac{巳午}{巳仵}$ 所以 $吧_{一}$ 爲第一年末之人數 $=吧上吧\cdot\frac{巳午}{巳仵}=吧\left\{一上\frac{巳午}{巳仵}\right\}$ 而 $吧_{二}$ 爲第二年末之人數 $=吧_{一}\left\{一上\frac{巳午}{巳仵}\right\}=吧\left\{一上\frac{巳午}{巳仵}\right\}^{二}$ 則 $吧_{三}$ 爲第三年末之人數 $=吧_{二}\left\{一上\frac{巳午}{巳仵}\right\}=吧\left\{一上\frac{巳午}{巳仵}\right\}^{三}$ 其餘依此類推所以 $吧_{卯}$ 爲第卯年末之人數 $=吧\left\{一上\frac{巳午}{巳仵}\right\}^{卯}$

九題　如于上題之式內令 $巳=六〇$ $午=四五$ 求證其人數在 $一二五$ 年內略加一倍

此題為有 $\left\{一\top\frac{一}{三六五}\right\}^{卯}=\frac{一}{二}$ 式而欲求卯

$\therefore\left(\frac{三六五}{三六四}\right)^{卯}=二$

即

$卯\{對三六五\top對三六四\}=對二$

$卯\{二\cdot五六二二九三\top二\cdot五六一一〇一\}=〇\cdot三〇一〇三$

$\therefore卯=\frac{〇\cdot三〇一〇三}{〇\cdot〇〇一一九二}=[illegible]$

為 一二五

年內之略數

## 決疑數

一題　西國紙牌全副為五十二張內有四張為貴牌今從全副牌內連取四張求每次取貴牌之決疑率

第一次之決疑率為 $\frac{四}{五二}$ 第二次為 $\frac{三}{五一}$ 因或可以第一次取一貴牌則只有三張貴牌在餘牌之內故也 第三次為 $\frac{二}{五〇}$ 第四次為 $\frac{一}{四九}$ 所以四次中每次取貴牌之決疑率為

$\frac{四}{五二}\times\frac{三}{五一}\times\frac{二}{五〇}\times\frac{一}{四九}$ 即 $\frac{一}{二七〇七二五}$

二題　用白棊四枚黑棊三枚閉目列成一行求行之兩端皆為黑棊之決疑率

因除了兩枚黑棊之外其餘五枚能有 $\underline{五|}$ 之排列法如將所除之二黑棊置于各排列之兩端即得 $二\times\underline{五|}$ 但其兩棊有三法可取之所以其得 $六\times\underline{五|}$ 即 $\underline{六|}$ 為合意之排列法而其七棊有 $\underline{七|}$ 箇不同之排列法所以所求之決疑率為

$\frac{\underline{六|}}{\underline{七|}}=\frac{一}{七}$

三題　有二囊一盛九球一盛六球每囊中所盛之球各以甲乙丙丁等字為記今于每囊內各隨手探出一球求其探出之球字號相同其決疑率如何

第一囊中取出之球過了己號則不能與第二囊內取出之球相同其決疑率為 $\frac{六}{九}$ 又于第二囊中能取出同號之球其決疑率為 $\frac{一}{六}$ 所以兩事之相并其決疑率為

$\frac{六}{九}\times\frac{一}{六}=\frac{一}{九}$

四題　甲與乙打球一局又甲與丙亦打球一局計甲其打兩局其勝負之決疑數有四與一之比而甲與乙所打之一局其勝負之決疑數有三與二之比求與丙所打之一局其勝負之決疑數比例如何

令 $\frac{天}{地}$ 為所求之比例則勝乙之決疑率與勝丙之決

疑率相乘等于兩局中甲勝之決疑率即 $\frac{五}{三}\times\frac{天丄地}{天}=\frac{五}{一}$ 即 $三天=二天丄地$

$二天=地$　$\frac{地}{天}=\frac{二}{一}$ 所以其勝負之決疑數有二與一之比

五題　紙牌一副隨手取其十二張每張與一人看之令各人自記其牌乃將十二張收回還入餘牌中而和之又隨手取十二張分與其十二原人求一人兩次所得之牌相同之決疑率又求證兩次所得之牌其貴賤之和等于三

㈠其十二人之人數與決疑數不相關而第二次所得之牌與第一次相同其決疑率爲 $\frac{五二}{一}$ 因五二張內只有一張能合式之故也

㈡其一人兩次所得之牌貴賤之和爲三則一數必爲一一數必爲二而第一次所分之牌其得值一之張與得值二之張其決疑率爲 $\frac{五二}{八}$ 此兩張內之一張分與人之後又得其第二張分出其決疑率爲 $\frac{五二}{四}$ 所以此兩事並有之決疑率爲 $\frac{五二}{八}\times\frac{五二}{四}=\frac{一三}{二}\times\frac{一三}{一}=\frac{一六九}{二}$

六題　將骰子兩顆任手立作長方柱形求相切兩面點數相同之決疑率

令兩顆骰子爲甲乙則乙之各面遞與甲之一面相切共得六箇長立方體又與其外各面排列數各有四種共得二四箇不同之排列而甲之餘各面亦有此理所以不同之排列其全數爲 $六\times二四$

如于二四箇排列法內令乙之一點與甲之一點相切則其四箇排列法內必有兩箇排列得甲乙之面點數相等如果乙之餘五面加于甲之一點則四箇排列內只有一箇能有相切之面相同又依同理其餘各二四排列之幅類推即其合意之排列法爲 $六\times七$ 所以所求之決疑率爲 $\frac{六\times二四}{六\times七}=\frac{二四}{七}$

七題　囊中有金錢兩枚各值銀錢二十一枚以甲名之又有金錢三枚各值銀錢二十枚以乙名之另有銀錢五枚以申名之求隨手探取三枚所值之決疑數

其三枚之排列法如下

二甲一乙
一甲二乙
三乙
一甲一乙一申
二甲一申
一甲二申
二乙一申
一乙二申
三申

| 排列數 | 合銀錢 |
| --- | --- |
| 一✕三＝三 | 三✕六二＝一八六 |
| 二✕三＝六 | 六✕六一＝三六六 |
| 一＝一 | 一✕六〇＝六〇 |
| 二✕三✕五＝三〇 | 三〇✕四二＝一二六〇 |
| 一✕五＝五 | 五✕四三＝二一五 |
| 二✕一〇＝二〇 | 二〇✕二三＝四六〇 |
| 三✕五＝一五 | 一五✕四一＝六一五 |
| 三✕一〇＝三〇 | 三〇✕二二＝六六〇 |
| 一〇 | 一〇✕三＝三〇 |
| 共＝一二〇 | 共＝三八五二中 |

所以每一排列之中値數爲$\frac{三八五二}{一二〇}$銀錢卽$＝三二\frac{一}{一〇}$

八題　有一銀錢落于棋枰之面此枰每格正能容銀錢四枚求所落之錢不壓棋枰之線之決疑率

如以銀錢之徑爲一則棋枰之邊爲一六而枰之全面爲二五六亦爲六四方每方內有小方之面積爲一錢心若落在此面積上則能不壓于線所以錢心不落在每小方之

決疑率爲$\frac{六四}{二五六}＝\frac{一}{四}$

但此題以爲銀錢可有半箇在枰邊之外若必全在枰邊之內則枰之四面必除去一邊其寬等于銀錢之徑

此爲西國棋枰而言則其決疑率爲$\frac{六四}{二二五}$

九題　呷吃㖠三人次第擲一骰子言明先得么者則得金錢一枚求三人得銀錢之決疑數率

如能一定得么而取一金錢則呷擲得么之決疑率爲$\frac{一}{六}$金錢是爲第一次擲如呷不得則吃擲其得么之決疑率爲$\frac{五}{六^{二}}$金錢是爲第二次若呷吃皆不得則㖠擲其得么之決疑率爲$\frac{五^{二}}{六^{三}}$金錢是爲第三次呷吃㖠皆不得則呷可再擲其得么之決疑率爲$\frac{五^{三}}{六^{四}}$金錢是爲第四次呷再不得則吃再擲其得么之決疑率爲$\frac{五^{四}}{六^{五}}$金錢是爲第五次以下可依此類推所以其決疑率

$$呷＝\left(\frac{一}{六}\middle|\frac{五^{三}}{六^{四}}\middle|\frac{五^{六}}{六^{七}}\middle|\cdots\right)金錢$$

$$＝\frac{一}{六}\times\frac{一}{一-\frac{五^{三}}{六^{三}}}＝\frac{三六}{九一}金錢$$

$$吃＝\frac{五}{六}呷＝\frac{五}{六}\times\frac{三六}{九一}$$

$$＝\frac{三〇}{九一}金錢$$

$$㖠＝\frac{五}{六}吃＝\frac{二五}{九一}金錢$$

所以

呷＝七銀錢一〇銅錢$\frac{八六}{九一}$

吃＝六銀錢七銅錢$\frac{一一}{九一}$

㖠＝五銀錢五銅錢$\frac{八五}{九一}$

十題　有五人要打牌其打法兩兩成對只能用四人乃依常法各人取一牌所得點數最少者去之今于五人中任兩人爲一對求此兩人成對之決疑率

令五人爲甲乙丙丁戊而甲乙爲所指之兩人但其第一層功夫須論甲或乙不在除去之列之決疑率如果丙丁戊三人內任一人得其小數則甲與乙可不去其不除去之決疑率爲$\frac{三}{五}$卽使甲乙皆不除去則爲四

人中之兩人然甲可與其三人中之任一人成對所以甲能得乙為對之決疑率為 $\frac{三}{一}$ 所以將各決疑率合之即將甲乙兩人不去之決疑率與甲乙兩人成對之決疑率相合也得 $\frac{五}{三}\times\frac{三}{一}$ 即 $\frac{五}{一}$

十一題　將黑球若干箇白球若干箇置于器內搖亂之令瞽者取一球其得黑得白之決疑率相同今有人欲連取十一次皆得白球求其決疑率若干

每一次能取得白球之決疑率為 $\frac{二}{一}$ 則連取十一次白球之決疑率為

$$\frac{二}{一}\times\frac{二}{一}\times\frac{二}{一}\cdots 至十一次=\left(\frac{二}{一}\right)^{十一}=\frac{二〇四八}{一}$$

十二題　用十箇綠球十二箇白球十四箇紅球同置一器中求任取兩球能得一綠一白之決疑率

從球之全數內任取其二其法有 $\frac{一\times二}{三六\times三五}$ 即 $一八\times三五$ 又一綠球與每白球同取之法有 $一二$ 所以能取得一綠一白之球其法有 $一〇\times一二$ 即 $一二〇$ 所以其能得之決疑率為 $\frac{一八\times三五}{一二〇}=\frac{二一}{四}$ 其不能得之決疑率為 $一-\frac{二一}{四}=\frac{二一}{一七}$ 所以其得與不得之比若 $一七$ 與四之比

十三題　將骰子一顆連擲之求能得幺之決疑率

每擲一次其不能得幺之決疑率為 $\frac{六}{五}$ 擲了天次不得幺之決疑率為 $\left(\frac{六}{五}\right)^{天}$ 所以所求之率為 $\left(\frac{六}{五}\right)^{天}=\frac{二}{一}$ 式中天之同數　用屢試之法以三代天得 $\left(\frac{六}{五}\right)^{三}=\frac{二一六}{一二五}$ 則微大于 $\frac{二}{一}$ 又令四代天得 $\left(\frac{六}{五}\right)^{四}=\frac{一二九六}{六二五}$ 則微小于 $\frac{二}{一}$ 所以知所求之數必在三與四之間用對數表得

$$天=\frac{對六-對五}{對二}=\frac{〇·〇七九一八一二五}{〇·三〇一〇三〇〇〇}=三·八$$

即 $三\frac{五}{四}$ 略

十四題　有兩人在官司作證各人言親見一事但其言之屬真屬假其決疑數有三與一之比而其事之可有與不能有其決疑數相等求有無此事之決疑數

各人所說之事為真之決疑率為 $\frac{四}{三}$ 而兩人並言真之決疑率為 $\frac{一六}{九}$ 兩人並言假之決疑率為 $\frac{一六}{一}$ 其一人言真一人言假不在本題之例內所以言真言假兩決疑數之比為

$$\frac{一六}{九}:\frac{一六}{一}::九:一$$

十五題　甲每言四事有三事為真乙每言五事有四事

爲眞丙每言七事有六事爲眞今有一事甲與乙言有此事丙言無此事求此事果有果無之決疑數

甲言有則爲 $\frac{無}{有}=\frac{一}{三}$ 乙亦言有則此分數加增有 $四:一$ 則變爲 $\frac{一}{一二}$ 丙又言無則分數要減有 $一:六$ 則變爲 $\frac{一}{二}$ 所以此事之有與無之比爲 $二:一$

十六題 請客吃飯同坐者十三人惟因平等難定坐位欲卜以決之所團之桌爲圜求證任擇兩人此兩人卜得其不得並坐之決疑數爲五與一之比

先令兩人內之一人爲主坐在任一位則其第二人得其餘十二位內之任一位其決疑數相等然只有兩箇位能在主人之旁所以能得坐主位之旁之決疑率爲 $\frac{二}{一二}=\frac{一}{六}$ 而其不得之決疑率爲 $\frac{五}{六}$ 所以其決疑數有五與一之比

十七題 有呷吃呐三馬賭跑第一次博者以爲呷馬不能勝之決疑數有四與一之比吃馬不能勝之決疑數有三與一之比呐馬不能勝之決疑數有二與一之比有吧咋兩人吧言跑三次此三馬若各勝一次則願罰金錢十枚咋言跑三次不能勝如勝則罰金錢五百九十枚及跑第一次呷馬勝第二次有兩馬並勝一爲吃一爲他馬吧而吧馬之負與勝爲六與一之比求吧能得咋之五百九十金錢之決疑率値銀若干

吃馬跑第二次能勝之決疑率爲 $\frac{一}{四}$ 其吧馬能勝之決疑率爲 $\frac{一}{七}$ 所以吃馬吧馬能勝之兩決疑率之比爲 $\frac{一}{四}:\frac{一}{七}::七:四$ 又吃勝之決疑率與吃加了吧能勝之決疑率之比爲 $七:一一$ 所以吃之能勝之決疑率爲 $\frac{七}{一一}$ 其呐之能勝之決疑率爲 $\frac{一}{三}$ 所以吧之能勝之決疑率爲 $一\times\frac{二}{七}\times\frac{三}{一}=\frac{三三}{七}$

吧之能負之決疑率爲 $一丅\frac{三三}{七}=\frac{三三}{二六}$ 所以巳之決疑率所値金錢

$$\left(\frac{三三}{七}\times五九〇\right)丅\left(\frac{三三}{二六}\times一〇\right)$$

$$=\frac{三三}{三八七〇}=\frac{一一}{一二九〇}$$

$$=一一七金錢五銀錢五\frac{一}{五}$$

十八題　有某公廨中專用甲乙兩處之人甲處之人數爲寅乙處之人數爲卯每年卜若干人派爲董事如其董事共有巳丄午人求其能有巳箇甲處之人午箇乙處之人之決疑數

其(寅丄卯)人卜出(巳丄午)董事各次不同其次數等于(寅丄卯)箇(寅丄卯)依(巳丄午)累取之其排列之法爲 $\frac{丙}{寅丄卯\quad 巳丄午}$ 再從寅數甲處之人以巳累取之其不同之排列法爲 $\frac{丙}{寅\quad 巳}$ 又卯數乙處之人以午累取之其不同之排列法爲 $\frac{丙}{卯\quad 午}$ 所以其董事之不同排列法 ＝ $\frac{丙}{寅\quad 巳} \times \frac{丙}{卯\quad 午}$ 所以其決疑率爲 ＝ $\frac{\frac{丙}{寅\quad 巳} \times \frac{丙}{卯\quad 午}}{\frac{丙}{寅丄卯\quad 巳丄午}}$

十九題　囊中有三球一爲黑一爲白其一不知何色但不出于黑白二色之外若任探出兩球求能得兩黑球之決疑率

若未知之球爲白則無法能得二黑球只有三法能取兩球而不論其色如未知之球爲黑則取兩黑球只有一法惟因不問球色而取兩球亦有三法所以其有六法能取兩球而只有一法能得二黑球其決疑率爲 $\frac{一}{六}$

二十題　有作標者標中只有一標能勝其餘皆爲負將各標藏篋中搖亂之每人探取一標求證每人能勝之決疑率相等

令卯爲標數則第一人勝者其決疑率爲 $\frac{一}{卯}$ 第一人負之決疑率爲 一丅$\frac{一}{卯}$ 卽 $\frac{卯丅一}{卯}$ 第二人勝之決疑率爲第一人負之決疑率與第二人能勝之決疑率相乘 ＝ $\frac{卯丅一}{卯} \cdot \frac{一}{卯丅一}$ ＝ $\frac{一}{卯}$

第三人能勝之決疑率爲第一人與第二人負之決疑率及第三人能勝之決疑率相乘 ＝ $\frac{卯丅一}{卯} \cdot \frac{卯丅二}{卯丅一} \cdot \frac{一}{卯丅二}$ ＝ $\frac{一}{卯}$ 其餘類推則可見各人能勝之決疑率爲 $\frac{一}{卯}$ 所以必定相等

二十一題　篋中有銅錢二十箇銀錢五箇求任取錢十箇能得恰有三箇銀錢在內之決疑率

其錢數共有二五任取其十則其公排列法

＝ $\frac{一 \times 二 \times \cdots \times 十}{二五 \times 二四 \times \cdots \times 一六}$ (甲)

二〇箇銅錢取其七其不同排列法爲 $\dfrac{一\times二\times\cdots\times七}{二〇\times一九\times\cdots\times一四}$ 五箇銀錢取其三其排列法爲 $\dfrac{一\times二\times三}{五\times四\times三}$ 所以二五錢內能取七銅錢三銀錢之不同排列法爲 $\dfrac{一\times二\times\cdots\times七}{二〇\times一九\times\cdots\times一四}\times\dfrac{一\times二\times三}{五\times四\times三}$ ⑨ 所以所求之決疑率爲 $\dfrac{⑩}{⑨}=\dfrac{一一\times二三}{三\times四\times五}=\dfrac{二五三}{六〇}$

二十二題　甲乙丙丁四人成對打牌求指定一人此人只得一張一點之牌之決疑率又求各人得一張一點之牌之決疑率

其一點之牌全副內共有四張而此四張發出之次序其排列法有二十四茲設一排列法以爲式

天地人物四形內各有一張一點之牌又先求其甲乙丙丁依次得此四張則甲之得天形一點其決疑率爲 $\dfrac{五二}{一三}$ 因全副爲五十二張也則必有五一張內必有其天形點者乙手中有十三張所以乙之能得地形一點之決疑率爲 $\dfrac{五一}{一三}$ 又依同理丙之能得人形一點之決疑率爲 $\dfrac{五〇}{一三}$ 而丁能得物形之一點其決疑率爲 $\dfrac{四九}{一三}$ 所以此四事並有之決疑率爲 $\dfrac{五二}{一三}\times\dfrac{五一}{一三}\times\dfrac{五〇}{一三}\times\dfrac{四九}{一三}$ 如將其餘之排列法爲其四形之點推之其得 $二四\times\dfrac{五二}{一三}\times\dfrac{五一}{一三}\times\dfrac{五〇}{一三}\times\dfrac{四九}{一三}=\dfrac{二〇八二五}{二一九七}$ 即 $\dfrac{九}{一}$ 爲略數再令甲爲所指定之人而只能得一張一點之牌則所能有之不同排列之張其全數爲 $丙_{五二}^{\ \ 一三}$ 而此各排列內只有一張一點之牌之排列數爲 $丙_{四八}^{\ \ 一二}\times四$ 所求之決疑率 $=\dfrac{丙_{五二}^{\ \ 一三}}{丙_{四八}^{\ \ 一二}}\times四$ $=\dfrac{五一\times五〇\times四九}{三九\times三八\times三七}$ $=\dfrac{二〇八二五}{九一三九}$ $=\dfrac{七三}{三二}$ 略

二十三題　有兩囊各盛八球四黑四白所求之各事相等有一瞽者從第一囊取出四球換入第二囊中則從

第二囊中取出八球得六白二黑求再取一球其為白球之決疑率

因已知取出兩白球則第一次所取之球其排列必為下各幅內之任一幅

兩白兩黑其決疑率為

$$\frac{\text{丙}_{\text{八},\text{四}}}{\text{丙}_{\text{四},\text{二}}\times\text{丙}_{\text{四},\text{二}}}=\frac{\text{七〇}}{\text{三六}}$$

三白一黑其決疑率為

$$\frac{\text{丙}_{\text{八},\text{四}}}{\text{丙}_{\text{四},\text{三}}\times\text{丙}_{\text{四},\text{一}}}=\frac{\text{七〇}}{\text{一六}}$$

四白無黑其決疑率為

$$\frac{\text{丙}_{\text{八},\text{四}}}{\text{丙}_{\text{四},\text{四}}}=\frac{\text{七〇}}{\text{一}}$$

此三幅以甲名之則第二囊中未取出球之時有六箇白球六箇黑球或七箇白球五箇黑球或八箇白球四箇黑球所以從此三箇排列其取六白二黑之決疑率為

$$\frac{\text{丙}_{\text{一二},\text{八}}}{\text{丙}_{\text{六},\text{六}}\times\text{丙}_{\text{六},\text{二}}}\qquad\frac{\text{丙}_{\text{一二},\text{八}}}{\text{丙}_{\text{七},\text{六}}\times\text{丙}_{\text{五},\text{二}}}\qquad\frac{\text{丙}_{\text{一二},\text{八}}}{\text{丙}_{\text{八},\text{六}}\times\text{丙}_{\text{四},\text{二}}}$$

卽

$$\frac{\text{四九五}}{\text{一五}}\qquad\frac{\text{四九五}}{\text{七〇}}\qquad\frac{\text{四九五}}{\text{一六八}}$$

所以從甲式內之事得決疑率為

$$\frac{\text{七〇}}{\text{三六}}\times\frac{\text{四九五}}{\text{一五}}\qquad\frac{\text{七〇}}{\text{一六}}\times\frac{\text{四九五}}{\text{七〇}}\qquad\frac{\text{七〇}}{\text{一}}\times\frac{\text{四九五}}{\text{一六八}}$$

惟餘下之球有四箇為黑或一白三黑或兩白兩黑而再取出之一球為白其決疑數為○或四二或三二所以所求之決疑率為

$$\frac{\text{三六}\times\text{一五}\,\text{丄}\,\text{一六}\times\text{七〇}\,\text{丄}\,\text{一}\times\text{一六八}}{\text{三六}\times\text{一五}\times\text{〇}\,\text{丄}\,\text{一六}\times\text{七〇}\times\text{四}\,\text{丄}\,\text{一}\times\text{一六八}\times\text{三}}=\frac{\text{四五七}}{\text{九一}}$$

二十四題　四人成對打牌求分牌之人及其夥能得四張貴牌之決疑率

分牌之人能得一貴牌之決疑率為 $\frac{\text{一三}}{\text{四}}$ 其不得之決疑率為 $\frac{\text{一三}}{\text{九}}$ 無論得不得其分牌之人與其夥必得餘五一張內之二五其排列為 $\text{丙}_{\text{五一},\text{二五}}$ 不同法而函其餘三張貴牌之排列法為 $\text{丙}_{\text{四八},\text{二二}}$ 所以如得一貴牌而其餘三貴牌在分牌之人與其夥之手內其決疑率

$$=\frac{\text{丙}_{\text{五一},\text{二五}}}{\text{丙}_{\text{四八},\text{二二}}}=\frac{\text{五一}\times\text{五〇}\times\text{四九}}{\text{二五}\times\text{二四}\times\text{二三}}=\frac{\text{八三三}}{\text{九二}}$$

此兩事相合其決疑率為 $\frac{\text{一三}}{\text{四}}\times\frac{\text{八三三}}{\text{九二}}$ 但分牌者與其夥能得

四貴牌之決疑率 $=\frac{五一\;^{兩}\;二五}{四七\;^{兩}\;二一}=\frac{五一\times五〇\times四九\times四八}{二五\times二四\times二三\times二二}=\frac{四九九八}{二五三}$ 所以其總決疑率為 $=\frac{一三}{九}\times\frac{四九九八}{二五三}$

本題所求 $=\frac{一三}{四}\times\frac{八三三}{九二}丄\frac{一三}{九}\times\frac{四九九八}{二五三}=\frac{一九九九}{一一五}=\frac{二九}{二}$ 畧

二十五題 打牌分開之時先分之二十張內求其能得全地形各牌之決疑率 其得全地形之牌有二法一依不論次序而得之二依所值之次第而得之

一如將全副牌內先分出其地形之點者則餘 三九 張內分出七張有 $\frac{\underline{七|}}{三九\times三八\times三七\times三六\times三五\times三四\times三三}$ 排列法將內任一箇排列法與其各地形之牌相連即得 二〇 張內有各地形之牌則其排列之法有 $\underline{二〇|}$ 所以首 二〇 張分出有各地形在內之不同排列法有 $\frac{\underline{七|}\times\underline{三二|}}{\underline{三九|}}\times\underline{二〇|}$ 而其餘 三二 張可以有 $\underline{三二|}$ 之不同分法所以依本題之意而分開其排列法有 $\frac{\underline{七|}\times\underline{三二|}}{\underline{三九|}}\times\underline{二〇|}\times\underline{三二|}$ 即 $\frac{\underline{七|}}{\underline{三九|}\times\underline{二〇|}}$ 但無論用何法分開其排列之法有 $\underline{五二|}$ 所以其決疑率為 $\frac{\underline{七|}\times\underline{五二|}}{\underline{三九|}\times\underline{二〇|}}$

二令吧為分全副而能得首 二〇 張有地形之點之各張依其所值之數之分開排列法之決疑數則分各牌之法得 $\underline{一三|}$ 之不同排列因改了地形點次第之排列所以得 吧 $\times\underline{一三|}$ 為分牌之全法能得首 二〇 張有各地形之牌在內但依上第一法其地形點之次序不定者為 $\frac{\underline{三九|}\times\underline{二〇|}}{\underline{七|}}$ 所以 吧 $=\frac{\underline{七|}\times\underline{一三|}}{\underline{三九|}\times\underline{二〇|}}$ 所以所求之決疑率 $=\frac{\underline{七|}\times\underline{一三|}\times\underline{五二|}}{\underline{三九|}\times\underline{二〇|}}$

二十六題 一囊中有十二球任取出若干箇放入第二囊中（此囊本為空）再從第二囊中任取出若干球求證其從第二囊中取出之球其數為奇之決疑率與為偶之決疑率之比必如 三四一 與 三四〇 之比

假如第一囊中取出卯數之球則從卯球再取而能得奇數共有$二^{卯\text{丅}一}$法而取出偶或奇有$二^{卯}\text{丅}一$法因卯物之全排列法為$二^{卯}\text{丅}一$而其奇數排列法為$二^{卯\text{丅}一}$此理易明即將相等式

$$\frac{(一\text{丄}天)^{卯}\text{丅}(一\text{丅}天)^{卯}}{二}=卯天\text{丄}\frac{卯(卯\text{丅}一)(卯\text{丅}二)}{一\cdot二\cdot三}天^{三}\text{丄}\cdots$$

內令$天=一$也所以如將卯球令有從一至一二之不同排列則取奇之決疑率

$$=\frac{一\text{丄}二\text{丄}二^{二}\text{丄}\cdots\text{丄}二^{一一}}{一\text{丄}二\text{丄}二^{二}\text{丄}\cdots\text{丄}二^{一二}\text{丅}一三}=\frac{二^{一二}\text{丅}一}{二^{一三}\text{丅}一四}=\frac{四〇九五}{八一七八}$$

而不得奇之決疑率

$$=一\text{丅}\frac{四〇九五}{八一七八}=\frac{四〇八三}{八一七八}$$

所以得奇之決疑率

$$=\frac{四〇九五}{四〇八三}=一\text{丄}\frac{一}{三四〇\text{丄}\cdots}$$

$$=\frac{三四一}{三四〇}\ 畧$$

二十七題　假如甲乙二人甲為男年四十六歲乙為女年三十六歲兩人為夫婦其能到天年與不能到天年決疑數相等則依棣美弗之法每同時生出八十六人每年死一箇求其年數天　依吳德代數書中四百五十款之法甲在天年後能活之決疑率為$\frac{四〇\text{丅}天}{四〇}$乙能活天年之決疑率為$\frac{五〇\text{丅}天}{五〇}$所以兩人都能過天年不死之決疑率為$\frac{四〇\text{丅}天}{四〇}\times\frac{五〇\text{丅}天}{五〇}$所以依本題得

$$\frac{四〇\text{丅}天}{四〇}\cdot\frac{五〇\text{丅}天}{五〇}=\frac{一}{二}$$

$$二〇〇〇\text{丅}九〇天\text{丄}天^{二}=一〇〇〇$$

$$天^{二}\text{丅}九〇天\text{丄}(四五)^{二}=一〇二五$$

$$天\text{丅}四五=三二\ 畧$$

$$\therefore 天=一三$$

二十八題　有一人年三十五歲恐五十歲以後無錢用求應發若干銀買票得五十歲以至死每年收利若干其利息為每年每百得四　其推算之法必依哈理之表並棣美弗之例

如果每年收回之利從今日起算則依吳德書第四百五十款之法可令$五一$代卯而$一〇四$代味而得之此與下三題各數與吳書第四百二十二款相似

再依吳書四百十八款之法令$一五$代卯而$一〇四$代味則能知$一五$年首所收之銀今值若干價將此二數彼此相減則所得之餘為今日所值之價但此以為其人一定可活到$五〇$歲所以依哈理之表得其人能活到$五〇$歲之決

疑數爲 四九〇／三四六 所以所求今日須發之銀爲 四九〇／二四六 與上所
言之較相乘之數卽 二四·四四 卽 二二／四 略所以今日須出之銀
必爲五十歲後每年所需之銀之四倍半

二十九題　有人今年三十歲又有他人四十歲如果十
一年之後其四十歲之人已死則其三十歲之人每年
得十箇金錢以至終身求其收十箇金錢之劵今日値
若干錢其利息爲每年百分之四此用哈里之表所云十一年之後第憑劵起算之日從此日起滿一年則爲收第一次之時
假令今年三十歲之人十一年後收起每年收十金錢
其劵今日之價依前題之法核金錢 六九·四二 惟題內所言今
年四十歲之人在十一年內死之決疑率爲 丅四四五／三三五 卽 四四五／一一〇
所以今日所値之數爲 四四五／一一〇 ╳ 六九·四三 ＝一七·一六 金錢

三十題　有農家租一地每年租價爲十金錢其地主今
年三十四歲若十一年以內死了則其子孫不能繼爲
地主而地爲租者所得求其人保命十一年今須出錢
幾何其利息每年每百爲四　收了租錢之日則其地
今日値 二五〇 金錢所以其人之命必在收租錢之日保起
他死之後得 二六〇 金錢此錢于下一收租之日其保命之
錢必收則依棣美弗之例其人在每年內死之決疑率
爲 五二／一 所以人在十一年死了而死之日要收保命公
司 二六〇 金錢則今日之値爲

五二／二六〇 ╳ {一·〇四／一 丄 (一·〇四)／一 丄 (一·〇四)／一 丄 ……至十一項}

＝ 五二／二六〇 ╳ ·〇四／丅(一·〇四)丅一一

＝ 五二／二六〇 ╳ ·〇四／·三五〇四

其 丅(一·〇四)丅一一 用對數表算之又

＝ 二三／六五 ╳ 八·七六

＝ 四·三八 金錢卽 四三 金錢 一六 銀錢

三十一題　有四十歲之人今出金錢三百又十年內每
年出若干錢則五十歲之後以至終其身每年要收四
十四金錢求十年中每年應出若干銀其生息爲每年
百分之四而保命依哈里之表
先求一人四十歲從五十歲起每年收一金錢之劵今
値之數爲金錢 五·九五三 所以每年要得 四四 金錢今日所値之

價為 ＝一〇四✕三·九五三＝二·六一九三二 所以每年所須出之錢等于今日之 二·六一九三二 金錢因其所出金錢 二〇〇 卽在應出之 二·六一九三二 金錢之中爲其每年收金錢之劵今日所值之價 再每年出一金錢從今日起以至死合于每年一金錢今日所值之價依棣美弗之例並吳書四百五十六款之法得

$\frac{\cdot〇四}{一} \top \frac{四六}{一〇四} \times \frac{(一\cdot〇四)^{二}}{一 \top (一\cdot〇四)^{四六}}$

$= 二五 \top \frac{四六}{一〇四} \times \frac{(\cdot〇四)^{二}}{\cdot八三五三八}$

＝二一·三一九六 金錢所以十年後一金錢今值之價 ＝二一·三一九六⊤五九五三＝一七·二四三

所以所求之每年所出之錢 $= \frac{一七\cdot二四三}{二\cdot六一九三二} =$ 八·五五 金錢