中国科学技术协会“英才计划”项目

SHUXUE ZHIWAI YU SHUXUE ZHINEI

数学之外与数学之内

田　刚　吴宗敏　主编

复旦大學出版社
www.fudanpress.com.cn

中国科学技术协会“英才计划”项目

SHUXUE ZHIWAI YU SHUXUE ZHINEI

数学之外与数学之内

田 刚 吴宗敏 主编

復旦大學出版社
www.fudanpress.com.cn

图书在版编目(CIP)数据

数学之外与数学之内/田刚,吴宗敏主编. —上海:复旦大学出版社,2015.10
ISBN 978-7-309-11749-3

Ⅰ. 数… Ⅱ. ①田…②吴… Ⅲ. 中学数学课-课外读物 Ⅳ. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 212361 号

数学之外与数学之内
田 刚 吴宗敏 主编
责任编辑/范仁梅

复旦大学出版社有限公司出版发行
上海市国权路 579 号 邮编:200433
网址:fupnet@fudanpress.com http://www.fudanpress.com
门市零售:86-21-65642857 团体订购:86-21-65118853
外埠邮购:86-21-65109143
江苏省句容市排印厂

开本 890×1240 1/32 印张 7.125 字数 175 千
2015 年 10 月第 1 版第 1 次印刷

ISBN 978-7-309-11749-3/G·1513
定价:20.00

内容提要

数学之外是指数学从哪里来？数学又要到哪里去？数学之内就是要回答数学是什么？是指数学学科内部各学科方向之间的关联与侧重，以及数学学科内部的关键问题。

本书为中国科学技术协会“中学生英才计划”数学工作委员会编辑的科普类读物,是“中学生英才计划”数学工作委员会在多次调研的基础上,听取了参加“中学生英才计划”的学生及教师的建议,邀请工作委员会的成员及部分特邀著名高校的教授撰写的。与中学数学那样按部就班地灌输知识不同，本书是作者按照自己的思路，想写什么就写什么，其目的是提出并讨论数学的对外联系及数学的根本问题，将数学教育从答题、知识点教育扩展到问题来源及应用前景的分析与展望；特别是对数学根本问题的探索与讨论,从中学开始了解解决根本问题的思想和方法,以提高学生的创新能力及对数学根本问题的兴趣与好奇心。

传统的中学数学教育的特征是配方式的“细粮饲料”，填鸭式的喂养灌输，缺少“粗粮”与“杂粮”。本书只是数学学习生活的调料，以增加新思想的味道；只是餐余，以增加产生新思想的肥料，其特征就是——杂。希望这本书可以给吃惯“细粮”的同学，品尝一点“粗粮、杂粮”，以补充学习营养的单一性。书中的文章也是按文章名的顺序编排，让读者自己去发现它们之间的关系。

前　言

数学之外是指数学从哪里来？数学又要到哪里去？

数学之内就是要回答数学是什么？是指数学学科内部各学科方向之间的关联与侧重，以及数学学科内部的关键问题。

这是数学的根本问题，当然这本书也不可能回答全部的这类问题，有的可能永远都找不到答案，因为问题以及答案本身都是与时俱进的。但是问问题比找答案更重要，找答案的过程比答案本身更重要。对问题的探索过程实际上就是人类对世界认识的发展过程，就是人类思维的发展过程。对于数学，与其他学科不同的是，它还要解决对问题探索的规范问题，也就是对找问题答案过程的规范。一句话，就是理性的、科学的、严密的、系统的逻辑规范。

学数学已经超过 50 年了，研究数学也已经超过 30 年。经常有人问我："什么是数学？""什么是数学的基本问题？"这也正是我一直在问我自己的问题。很多人认为，希尔伯特 23 个问题，千禧年问题，谁谁的猜想，是数学的根本问题。我的回答是：不错！但这些只是数学现时的内部问题，而有些内部问题可以说在数学内部已经是不可能解决的了。

我认为数学与哲学、宗教及其他科学类别一样，如同本文的开

篇，最基本的问题都是要回答：世界是什么？我们从哪里来？要到哪里去？事实上，这也是任何学科的根本问题。不过有些学科更加具体，如物理研究力是什么？磁场是什么？化学研究碳是什么？水是什么？它们会变成什么？是钻石还是煤炭？是不可燃烧的液体，还是可以燃烧的两种气体？爱因斯坦从小到大的兴趣就是想知道：光是什么？光速是什么？光是从哪儿来的？莫奈放弃了银行家的工作，就是想问：绘画究竟是要干什么？这些基本问题永远不会脱离：这种东西是什么？它们从哪里来？又会到哪里去？任何科学问题，任何社会问题，甚至任何问题，都可以简单表述为：这是什么？它们怎么会是这样的？又会变成什么样的？这好像也是任何一个小孩刚懂事时经常问的问题。可见，每个人都是带着佛心而来，而是被家长的“哪有那么多的为什么”、老师的“这么简单的问题，你都不懂啊”给埋没了。所以保持童真，保持好奇心，保持喜欢问为什么，是孩提时期将来想要成为数学家，将来想要成为科学家，甚至于将来想要干成任何大事业者的基本素养，而且是本质的素养。事实上，想要成为大数学家、大科学家、大学问家，往往取决于你能不受外界的干扰而保持这份童真的时间。我认识一些老科学家，发现他们对任何新事物都有极强的好奇心、极强的求知欲、极其风趣幽默。从另一种角度看，他们到老了还一直是贪玩的老小孩。不过他们不是被玩具所左右，而是玩出与别人不一样的名堂来。

大家都在批评应试教育，大家都看到应试教育扼杀了创新能力。原因很简单，就是应试教育告诉你，你只要学，你只要记，你只要记住解题的步骤，你不用去问，这题是哪儿来的？解了这题有什么用？这使得人变成知识的存储器，但人脑的存储量还比不过一个U盘。我们都知道，如果高考允许上网，那么一个学会了网上查询的操作员，肯定也可以得到高分。这样，就永远也培养不出一个思想家，数学也就退化成为算术。

既然数学与其他学科一样，要解决一样的问题，那么数学有什么特别之处呢？数学不但要超越具体对象的这种基本问题，而且更加着重于研究过程的逻辑性、系统性与演绎性；不是只凭印象，不是只凭臆测，不是只凭经验。数学需要将经验提升为普遍的理论，并且要指出这种理论结果的适用范围。更加重要的是，通过数学之内的矛盾可以演绎到数学之外。数学的研究论文一般都是从假设开始的，如果怎样，那么就会怎样。即使是猜测也要告诉别人，这个猜测的可信度是多少。

许多人认为搞文科的一般数学差些，而搞数学的一般文科差些。我认为这是非常不全面的。我认识许多大数学家，他们都是多才多能的。许多孩子都读过《爱丽丝漫游奇境记》，而其著者就是数学家。苏步青先生爱写诗，王元先生爱书法。一些大数学家、一些数学教育大家往往同时强调理科教育要强化文科，是搞通识教育的积极倡导者。复旦大学的李大潜院士就说过："一个好的数学家都是带有几分诗人气质的。"什么叫诗人气质？诗人气质就是不受羁绊，就是自由思想，就是要把自己的灵魂放飞到天外去看世界。是的，数学有许多规则，解数学题有许多套路，但是如果你被规则与套路束缚，那么就不可能做出超越前人的研究工作。如果你是套路的高手，那么你可能成为能工巧匠，可以成为一个好会计，甚至是好的金融家，但不可能成为数学思想家。李大潜院士在《光明日报》倡导"中学数学教育应注重人文内涵"，认为数学教育的根本是要让学生明白：(1)数学知识的来龙去脉；(2)数学的精神实质与思想方法；(3)数学的人文内涵。王元院士也认为"所谓创新，一定是前人没有想到的，没有做到的"，他曾在《光明日报》发表题为"靠老师手把手地教，一定教不出创新人才"的文章，建议读者可以去读一下，会有很大的启发。

在我的研究生教学生活中，很多学生会要求我给一个研究问题，然后过一段时间会问我怎么解这个问题。有些学生到了研究生阶

段，基本上还是如同在中学阶段，只会做习题。这简单说来，就是缺乏创新的能力。所以，对新进的研究生我总是告诉他们：最顶尖的科学家是自己发现问题、提出问题，并且自己解决问题。一个顶尖科学家首先是能够发现和提出问题，其次才是找到解决途径。解决先人提出的著名问题，固然很好，但更重要的是在解决先人著名问题的同时，能提出新的问题。而有些关键的问题是应该从小就开始问了。通常基础的问题、从基础问起的问题，才是关键的问题、颠覆性的问题、真正创新的问题。爱因斯坦就是从小就喜欢光线，可以长时间地看着太阳，问自己："什么是光?"黎曼、罗巴切夫斯基就是一直问自己："数学的公理基础是什么?"

由于工作的关系，经常有人找我，说解决了诸如三等分角的问题，文章只有3页纸，希望我推荐发表，当然最终目标是帮助他们出名。这个问题在数学上是已经解决的问题，答案是不可能用圆规直尺三等分任何给定角，当然其背后是一整套的伽罗瓦理论。在数学上证明解的不存在性是更为困难的问题，而这也是数学的魅力所在。我告诉他们：三等分角问题为什么会有名的原因，就是背后的伽罗瓦理论；如果三等分角问题可以用3页纸解决，就比两等分角稍微难一点，那么这个问题也就不会那么著名了。

现在是一个创新的年代，可能大家会认为，数学，特别是中学的数学，或者可以到大学的高等数学范畴，已经没有什么可以创新的了。中学数学已经经过几千年的发展，又经过几百年的系统化、现代化，用高等数学的语言说，已经是完备的了。事实果真如此吗? 在教授中学数学时只需要灌输，只是教师灌输的水平不同吗? 怎么在教授中学数学的同时培养学生的质疑精神——这一科学的基本精神呢? 看看数学的发展吧！如果中学数学已经完备了，那么大学数学又是从哪儿来的? 现代数学呢? 伟大的数学家希尔伯特在第二届国际数学家大会上曾经做过一个著名的报告，提出了23个问题，并且

认为这是数学的可以说是全部的剩余问题。他在报告的结束语中说,如果我们足够聪敏,可能可以在100年内解决所有这些问题。现在100年过去了,离开这些问题的全部解决还遥遥无期。事实上,在希尔伯特(David Hilbert, 1862—1943)提出23个问题后4年,在第三届国际数学家大会上,另一位伟大的数学家——哥德尔(Kurt Godel, 1906—1978),就用数学证明了"任何系统都不可能是封闭的",而且它的根本问题往往在其根本上。在中学教授学生数学,这没有什么可以质疑的,学生只要记住就行,不可能跑出数学之外。但对基础数学问题的深入研究一定会引出新的数学问题,一定会跑出数学之外,成为数学的新的学科生长点。事实上,数学的这种内部的矛盾在数学产生时就已经写在数学的DNA中。我们就是应该从数学的产生开始质疑。

数学到现在已经成为一个庞大的系统。从另一方面看,它由两部分组成。一个是数学知识,一个是数学文化。课堂里教的是数学知识,但并不是知识越多就越有文化。文化是需要去体验、去发掘、去融入的。

为了给沉闷的灌输式的中学数学教育加一点"调料",在参加"英才计划"的学生及导师的建议下,我们有了编写这么一本书的想法,于是,邀请了一些大学数学老师,编写这么一本题为《数学之外与数学之内》的书。与中学数学那样按部就班地灌输知识不同,参编者想写什么就写什么,可以写数学之内的知识,也可以写数学之外的管窥。传统的中学数学教育的特征是配方式的"细粮饲料",填鸭式的喂养灌输,缺少"粗粮"与"杂粮"。这本书只是"调料",以增加新思想的味道;只是"餐余",以增加产生新思想的"肥料",特征就是——杂。希望这本书可以给吃惯"细粮"的同学,品尝一点"粗粮、杂粮",以补充学习营养的单一性。书中的文章是按文章名的顺序编排,让读者自己去发现它们之间的关系。我一直认为,我们现在的数学课本编

写得太好了;哪里是重点,哪里是小结,剥夺了学生自己找出内容的主题和关联性的训练。我在刚进大学时,老师教我的就是:读懂一本书就是把厚书读薄的能力,简单地说就是自己整理出脉络,列出提纲。这作为前言,好像已经讲得太多了。而且现在很多人已经很少看书,即使看书也很少看前言,所以就写这些,希望还是会有有心人从中获得一些什么东西。

本书的出版得到了中国科学技术协会、国家自然科学基金委员会、上海市工业与应用数学学会、上海市现代应用数学重点实验室的支持,作者在此表示感谢。

复旦大学数学科学学院 吴宗敏

目录

给大学生歌咏会的致辞

音乐是什么？音乐是给人带来欢快的旋律。数学是什么？数学似乎是单调的、枯燥的，我们是为了逃避单调枯燥才来参加歌咏会的。有人说，“学数学的人一般不懂得音乐”，我说你没有真正懂得音乐，你也还没有真正懂得数学。复旦大学李大潜院士就曾经说过：“一个好的数学家都是带有几分诗人气质的。”诗是需要吟、需要唱的，用歌唱的心情去歌唱数学，那么你离大数学家也就不远了。

傅立叶级数是一段著名的数学词章，那么傅立叶(Jean Baptiste Joseph Fourier，1768—1830)是怎么发现傅立叶级数的呢？就是在他弹琴时发现：几根长度成比例的弦，同时一起弹，琴就会发出比较好听的声音，这就叫做和声。数学史上最著名、最伟大、应用最广的数学理论就从好听的和声中产生了。我说傅立叶比任何人都更懂得音乐。你知道巴赫(Johann Sebastian Bach，1685—1750)吗？巴赫在作曲中运用了很多数学的基本原理。正是巴赫运用了数学原理来作曲，才使得他的音乐走进了宫廷、教堂与民间。

中国古代的音律是宫、商、角、徵、羽，听起来略微单调一些，而西方音乐是 7 音阶、12 音阶。钢琴上的 12 音阶从 C 到 C 由 8 个白键、5 个黑键组成。钢琴上为什么要有白键和黑键？为什么白键是 8 个，黑键是 5 个？为什么白键、黑键是这样排列的？音乐家们每天都面

对着键盘，他们问过这样的问题吗？意大利数学家利奥纳多·斐波那契(Leonardo Fibonacci，1175—1250)在1202年写过一本《算盘书》，书中有这样一道题目："某人有一对小兔，小兔一个月可以成长为成年兔，每一对成年兔每个月可以生一对小兔，半年后他有多少成年兔与小兔？"答案是有8对成年兔，5对小兔。如果你按血缘关系排成一行，把每对成年兔涂成白色，小兔涂成黑色，你就会发现这恰好就是钢琴的琴键排列。如果兔子继续繁衍下去，则数目分别是1，1，2，3，5，8，13，……。啊！那是著名的斐波那契级数！它的相邻项之比的极限是"黄金分割数"。原来12音阶从C到C的13个音，简谱的从1到1的8个音，或者中国古代的宫、商、角、徵、羽5个音，钢琴上的黑键数与白键数，键的总数都只是斐波那契级数的前几项。中国古代的音乐实际上只使用了钢琴上的黑键数，并且这个黑键数最终与"黄金分割"有关，甚至与一切生命(贝螺、向日葵、花瓣)、一切社会的发展模式有关。居然生命的发展模式与音乐以及美丽的图像可以通过数学统一起来！这就是数学，而这只是数学的一个乐章片断。如果你再仔细地研究下去，你就会聆听到数学的小夜曲、数学的奏鸣曲、数学的交响乐。同学们，在享受音乐的同时，请尽情地享受数学的旋律吧！

复旦大学数学科学学院　吴宗敏

不可交换的矩阵乘法

在中学教科书中，已经引进了矩阵的概念。所谓矩阵，就是将 $n\times m$ 个数排成 n 行 m 列的矩形列阵，通常用一对圆括号将其括起来，也常常用一个大写字母表示矩阵，如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

就是一个 2 行 3 列的 2×3 矩阵。

矩阵主要用来处理一些有关联的数据，比如在处理财务报表、实验数据、统计数据时经常会遇到。比如，表 1 显示的是某连锁商业公司各门店的销量统计表。

表 1 （单位：件）

门店	商品 A	商品 B	商品 C
门店 1	80	25	120
门店 2	45	30	85

表 1 就可以表示成一个 2×3 矩阵 $\begin{pmatrix}80 & 25 & 120\\ 45 & 30 & 85\end{pmatrix}$。

19 世纪中叶,英国数学家凯利(Arthur Cayley, 1821—1895)系统建立了矩阵理论,规定了矩阵的算术运算。矩阵的加法比较简单,两个矩阵有相同的行数和列数,则它们的和就是对应位置的元素相加所得到的矩阵,例如,两个 2×2 矩阵相加为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}。$$

矩阵乘法的规定有些奇怪,两个矩阵相乘,要求前一个矩阵的列数和后一个矩阵的行数相等,而其积在第 i 行、第 j 列的元素等于第一个矩阵的第 i 行和第二个矩阵第 j 列对应位置元素相乘再求和所得。例如,两个 2×2 矩阵的乘积为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}。$$

和代数中用 ab 表示乘法 $a\times b$ 一样,矩阵乘法中的符号×通常省略不用。

一些初学矩阵的人不太理解矩阵乘法:为什么矩阵乘法规定得如此古怪,而不是像加法一样将对应位置的元素相乘呢?其实,这样定义的矩阵乘法更符合实际需要。以上面的商业公司为例,假设某门店销售商品 A 计 80 件,每件商品单价为 20 元,则计算该门店销售商品 A 的营业额要用乘法,为 $80\times 20=1\,600$(元)。现在考虑该公司多个门店以及销售多个商品的情况。除前面的销量表外,如果还有如下的商品单价和单位利润表(见表 2),则各门店的营业额和营业

表 2 (单位:元)

商品	单价	单位利润
商品 A	20	5
商品 B	100	20
商品 C	15	4

利润如下：门店 1，营业额 $=80\times20+25\times100+120\times15=5\,900$(元)，利润 $=80\times5+25\times20+120\times4=1\,380$(元)；门店 2，营业额 $=45\times20+30\times100+85\times15=5\,175$(元)，利润 $=45\times5+30\times20+85\times4=1\,165$(元)，则有如表 3 所示的营业额和利润表格。

表 3 （单位：元）

门店	营业额	利润
门店 1	5 900	1 380
门店 2	5 175	1 165

表 3 用矩阵表示，即为

$$\begin{pmatrix}80 & 25 & 120\\ 45 & 30 & 85\end{pmatrix}\begin{pmatrix}20 & 5\\ 100 & 20\\ 15 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\,900 & 1\,380\\ 5\,175 & 1\,165\end{pmatrix}。$$

矩阵乘法这样定义的一个更重要的因素是来自数学中的线性变换。假设有如下变量之间的关系：

$$\begin{cases}z_1=-y_1+2y_2,\\ z_2=2y_1+y_2;\end{cases}\cdots\cdots ① \quad \begin{cases}y_1=3x_1+2x_2,\\ y_2=x_1-2x_2。\end{cases}\cdots\cdots ②$$

将②式代入①式，有

$$\begin{cases}z_1=-x_1-6x_2,\\ z_2=7x_1+2x_2。\end{cases}\cdots\cdots ③$$

这些变换可以用矩阵来表示，变换①，②，③分别可表示为

$$\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix},$$

以及 $\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -6\\ 7 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$。