普通高等教育“十二五”规划教材

工程数学

GONGCHENG SHUXUE

主　编◎王　艳　张大庆　郭良栋
副主编◎石艳霞　宫　华　朱丽梅　缪淑贤　祝丹梅
主　审◎何希勤

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

普通高等教育"十二五"规划教材

工程数学

主　编　王　艳　张大庆　郭良栋
副主编　石艳霞　宫　华　朱丽梅
　　　　缪淑贤　祝丹梅
主　审　何希勤

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书主要介绍方差分析、回归分析 、正交试验设计的原理与方法，主成分分析、因子分析和聚类分析的方法，线性规划、运输问题和整数规划等的求解方法和应用，傅里叶变换、拉普拉斯变换等内容。本书主要是针对卓越计划工科试点专业在学完高等数学、线性代数、概率统计的基础上开设的课程学习使用。本书可作为工科、管理类、应用数学等相关专业的教材及参考书，也可作为科技人员和自学者的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

工程数学/王艳，张大庆，郭良栋主编. —北京：北京理工大学出版社，2016.1
ISBN 978－7－5640－9261－0

Ⅰ. 工…　Ⅱ. ①王…　②张…　③郭…　Ⅲ. ①工程数学-高等学校-教材　Ⅳ. ①TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 105212 号

出版发行 /北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 /北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 /100081
电　　话 /(010)68914775(总编室)
　　　　　82562903(教材售后服务热线)
　　　　　68948351(其他图书服务热线)
网　　址 /http://www.bitpress.com.cn
经　　销 /全国各地新华书店
印　　刷 /三河市华骏印务包装有限公司
开　　本 /787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张 /17
字　　数 /389 千字
版　　次 /2016 年 1 月第 1 版　2016 年 1 月第 1 次印刷
定　　价 /36.90 元

责任编辑 /张慧峰
文案编辑 /张慧峰
责任校对 /周瑞红
责任印制 /边心超

编委会名单

编写说明

根据教育部《关于"十二五"普通高等教育本科教材建设的若干意见》(教高[2011]5号)精神和辽宁省教育厅办公室《关于组织开展"十二五"普通高等学校本科规划教材首批推荐遴选工作的通知》(辽教办发[2011]249号)的要求，沈阳工业大学、辽宁科技大学、辽宁石油化工大学、辽宁工业大学、大连交通大学、大连工业大学、沈阳航空航天大学、沈阳理工大学、沈阳建筑大学和沈阳工程学院等辽宁省内10所理工科院校理学院(数理系)发起组织了普通高等教育本科基础课高等数学(理工类)、高等数学(经管类)、概率论与数理统计、线性代数、工程数学、大学物理、大学物理实验、高等数学(英文・双语教材)、大学物理(英文・双语教材)等九门课程教材的编写工作。

为做好本套教材的编写工作，确保优质教材进课堂，辽宁省10所理工科院校的理学院院长(数理系主任)及基础课相关学科负责人组建了学科建设和教材编写专委会和编委会。专委会工作的目标是通过创新、融合，整合各院校优质教学教研资源，广泛吸收10所理工科院校在工科基础课课程教学理念、学科建设和体系搭建等方面的教学教研建设成果，按照当今最新的教材理念和立体化教材开发技术，通过不断的教材修订、立体化体系建设打造"工科基础课"教材品牌。

本套书力求结构严谨、逻辑清晰、叙述详细、通俗易懂。全书有较多的例题，便于读者自学，同时注意尽量多给出一些应用实例。

本书可供高等院校理工科类各专业学生使用，也可供广大教师、工程技术人员参考。

辽宁省10所理工科院校理学院(数理系)
基础课学科建设和教材编写专委会和编委会

前　　言

本书涵盖正交试验设计、数据分析、线性规划与整数规划、积分变换四个部分的内容。

第一部分为正交试验设计，16 学时，主要讲述方差分析、回归分析 、正交试验设计的原理与方法；第二部分为数据分析，16 学时，主要介绍主成分分析、因子分析和聚类分析的方法；第三部分为线性规划与整数规划，16 学时，主要介绍线性规划、运输问题和整数规划的求解方法和应用；第四部分为积分变换，8 学时，主要介绍傅里叶变换、拉普拉斯变换。

本书是根据教育部教高[2011]5 号《关于“十二五”普通高等教育本科教材建设的若干意见》文件和“卓越工程师教育培养计划”精神的要求，为全面推进高等教育理工科院校“质量工程”的实施，将教学改革的成果和教学实践的积累体现到教材建设和教学资源统合的实际工作中去，以满足不断深化的教学改革的需要，更好地为学校教学改革、人才培养与课程建设服务，确保高质量教材进课堂而编写的。本书是由辽宁科技大学、沈阳理工大学、大连交通大学、大连工业大学、沈阳航空大学、沈阳工业大学、沈阳建筑大学、辽宁石油化工大学、辽宁工业大学和辽宁工程学院 10 所辽宁省高校组建编委会，以创新、融合、优化院校优质资源为先导，结合辽宁省 10 所理工科院校对工科基础课教学理念、学科建设和体系搭建等研究建设成果，在参编教师充分研讨的基础上，汲取了国内外一些优秀教材的优点，按照当今最新的教材理念和立体化教材开发技术联合编写而成，是编者多年教学经验和教学改革成果的结晶。

本书可供高等院校工程相关专业在学完高等数学、线性代数、概率统计的基础上开设的相关课程做为教材使用，旨在培养学生将数学思想和方法应用于工程实践中，并能使用数学软件去解决统计问题、数据处理问题和优化问题等。不同的专业可依据各专业的培养目标，自主选学四个部分中的部分或全部内容。

本书第一部分由辽宁科技大学王艳编写，第二部分由辽宁科技大学张大庆编写，第三部分由辽宁科技大学郭良栋编写，第四部分由辽宁科技大学石艳霞编写，沈阳理工大学宫华、沈阳航空航天大学朱丽梅、沈阳建筑大学缪淑贤、辽宁石油化工大学祝丹梅等参与部分章节的编写。全书由王艳、张大庆、郭良栋组织、构思及统纂，东北大学宋书尼教授为此书的编写提出了宝贵的意见和建议，辽宁科技大学何希勤教授给出审定意见。辽宁科技大学的许多同事对本书的编写也提出了宝贵意见与建议，在此一并致以衷心的感谢。

由于编者水平有限，书中难免有不妥之处，恳请读者与同行专家不吝赐教。在本书的编写过程中参阅了很多同行的专著、编著和教材，在此向他们表示深深的谢意。

编　者

目 录

第一部分 正交实验设计

第二部分 数据分析

第三部分 线性规划与整数规划

第四部分 积 分 变 换

第一部分　正交试验设计

第1章　方差分析

方差分析是数理统计学中常用的数据处理方法之一，是试验设计中分析试验数据的一种有效的工具。在生产实践中，影响一个事物的因素往往是很多的，人们总是通过试验观察各种因素的影响。例如，不同型号的机器，不同的原材料，不同的技术人员及不同的操作方法等，对产品的产量、性能都会有影响。有的影响大，有的影响小，有的因素可以控制，有的因素不可控制。如何从多种可控因素中找出主要因素，并且通过对主要因素进行控制调整，提高产品的产量、性能等，就是方差分析所要解决的问题。

上述产品的产量、性能等称为试验指标，它们受因素的影响，因素的不同状态称为水平，一个因素可采取多个水平。不同的因素、不同的水平可以看作是不同的总体。通过观测可以得到试验指标的数据，这些数据可以看成是从不同总体中得到的样本数值，利用这些数据可以分析不同因素、不同水平对试验指标影响的大小。

方差分析的内容很丰富，本章主要介绍单因素方差分析和两因素方差分析问题。

1.1　单因素试验的方差分析

在一项试验中，若只有一个因素的水平在改变，而其他因素的水平固定不变，试验的目的在于比较因素各水平上指标值之间的差别，就叫作单因素试验问题。

1. 方差分析的基本思想

为了说明方差分析的基本思想，先来看一个实例。

例 1.1　考察生产某化工产品时反应温度 A(℃)对收率 y(%)的影响。为此比较两个反应温度：$A_1=30$ ℃，$A_2=40$ ℃。这是一个单因素二水平的实验。实验结果如表 1.1 所示。(收率就是投入单位数量原料获得的实际生产的产品产量与理论计算的产品产量的比值。)

表 1.1　某化工产品收率试验数据表　　（单位：%）

水平 \ 试验号	1	2	3	4	5	平均值
$A_1=30$ ℃	75	78	60	61	83	$\bar{y}_1=71.4$
$A_2=40$ ℃	89	62	93	71	85	$\bar{y}_2=80.0$

如果试验没有误差，那么只要对 A_1 和 A_2 各做一次试验，直接比较其收率大小就可判断反应温度高低的好坏。但是试验结果总是受误差影响的，所以不能从第 1 号试验的两个结果得出，由于 89 大于 75 就说 A_2 比 A_1 好。因为不能判断 89 大于 75 究竟是由 A_2 和 A_1 的不同所引起的，还是由于误差的影响造成的。同样，也不能从第 2 号试验的结果作出相反的结论。

是否可以直接比较其平均值的大小，由 $\bar{y}_2=80.0>\bar{y}_1=71.4$，就说 A_2 比 A_1 好呢？还是很难说。虽然平均值的代表性强一些，受误差的影响小一些，但由于不知道误差的大小，仍旧不能判断这个差别是否是由于因素水平的改变所引起的。因此，为了能作出一种合理的判断，首先必须对误差影响的大小或误差引起的指标波动有个定量的估计；同时，对指标总的波动以及因素水平改变引起的指标波动也给以数量表示，然后加以适当的比较。

例 1.1 中 10 个试验数据与总的平均值

$$\bar{y}=\frac{1}{10}(75+78+\cdots+85)=75.7$$

之差的离差平方和反映了指标观察值的总的波动，记为 S_T^2，即

$$S_T^2=(75-75.7)^2+(78-75.7)^2+\cdots+(85-75.7)^2=1\,294.10$$

一方面，如果因素水平改变对指标不产生影响，而且也不存在试验误差，那么全部试验数据应该一样，此时 S_T^2 应为零。但 S_T^2 实际上不是零，说明 S_T^2 是由因素水平改变引起的指标波动和误差引起的指标波动两部分组成。

另一方面，如果没有试验误差，A_1 条件下的 5 个试验数据应该相同，A_2 条件下的 5 个试验数据也应该相同。现在两个条件下的 5 个数据不相同，说明存在试验误差。试验误差对指标影响的大小或误差引起的指标波动可用误差离差平方和 S_E^2 来表示，即

$$\begin{aligned}S_E^2&=(75-71.4)^2+(78-71.4)^2+\cdots+(83-71.4)^2+\\&\quad(89-80.0)^2+(62-80.0)^2+\cdots+(85-80.0)^2\\&=429.20+680.00\\&=1\,109.20\end{aligned}$$

对于因素 A 来说，当它取水平 A_1 时，平均收率为 71.4，这个平均值可以用来近似表示水平 A_1 各次试验对指标收率的影响；当它取水平 A_2 时，收率的平均值为 80.0，这个平均值可以用来近似表示水平 A_2 各次试验对指标收率的影响。因而，5 个 71.4 和 5 个 80.0 与总平均值 75.7 之差的平方和

$$S_A^2=5\times(71.4-75.7)^2+5\times(80.0-75.7)^2=184.90$$

反映了因素各水平的改变引起指标波动的大小，当然其中也包含了试验误差的影响。

可以看出，此处有

$$S_T^2=S_A^2+S_E^2=184.90+1\,109.20=1\,294.10$$

即数据总的离差平方和等于因素水平改变引起的离差平方和加上误差离差平方和，或指标总的波动可以分解成因素水平改变引起的指标波动和试验误差引起指标波动两部分，这就是所谓的平方和分解公式。

有了 S_E^2 和 S_A^2 之后，是否就能直接比较出由因素水平变化引起的数据波动与由试验误差引起的数据波动之间的差异呢？此外，离差平方和不仅与数据本身有关，而且还与数据的个数有关，为此必须消除数据个数的影响。我们采用平均离差平方和 $\frac{S_A^2}{f_A}$ 与 $\frac{S_E^2}{f_E}$ 进行比较，并以此作出推断，这里的 f_A 和 f_E 分别称为 S_A^2 与 S_E^2 的自由度（即离差平方和公式中独立数据的个数）。

对 S_E^2 而言，因为其中的 10 个数据满足两个关系式

$$\frac{75+78+60+61+83}{5}=71.4$$

$$\frac{89+62+93+71+85}{5}=80.0$$

所以 S_E^2 的自由度为 $f_E=10-2=8$。

对于 S_A^2 而言，因为其中的 2 个数据有一个关系式 $\frac{71.4+80.0}{2}=75.7$，所以 S_A^2 的自由度 $f_A=2-1=1$。

对 S_T^2 而言，因为其中的 10 个数据有一个关系式

$$\frac{75+78+60+61+83+89+62+93+71+85}{10}=75.7$$

所以 S_T^2 的自由度 $f_T=10-1=9$。

于是有

$$f_T=f_A+f_E=1+8=9$$

即 S_T^2 的自由度等于 S_A^2 的自由度 f_A 加上 S_E^2 的自由度 f_E，这就是自由度分解公式。

这样就可以进行比较了，考虑比值

$$F_A=\frac{S_A^2/f_A}{S_E^2/f_E}$$

显然，如果 F_A 的值接近于 1，则说明因素水平的改变对指标的影响与试验误差对指标的影响相近，这时，可以认为因素水平之间没有显著差异或因素对指标影响不显著。反之，则可以认为因素水平之间有显著差异或因素对指标影响显著。现在的问题是，F_A 多大时才能认为因素对指标的影响显著呢？这就需要知道 F_A 的概率分布。在一些假定条件下，可以证明 F_A 服从自由度为(f_A,f_E)的 F 分布。于是对给定的显著水平 α，查 F 分布表可得一临界值 $F_\alpha(f_A,f_E)$，若 $F_A>F_\alpha(f_A,f_E)$，则可以认为因素 A 对指标的影响显著，当 $F_A\leqslant F_\alpha(f_A,f_E)$时，则认为因素 A 对指标的影响不显著。

本例中，

$$F_A=\frac{184.90/1}{1\,109.20/8}=1.33$$

对 $\alpha=0.05$，查得 $F_{0.05}(1,8)=5.3$，因 $F_A=1.33<5.3=F_{0.05}(1,8)$，故可以认为在水平 $\alpha=0.05$ 下，反应温度 A 对指标收率的影响不显著，或反应温度 30 ℃和 40 ℃对收率的影响没有显著差异，试验结果出现的波动主要是由试验误差造成的。

从上述例子的分析可以看出，方差分析的基本思想是：首先从数量上将因素对指标的影响和误差对指标的影响加以区分并作出估计，然后将它们进行比较，从而作出因素对指标的影响是否显著或因素各水平之间的差异是否显著的推断。

2. 方差分析的一般方法

设单因素 A 有 r 个水平，每个水平重复做 n_i 次独立试验，所得试验结果 x_{ij} 表示因素 A 的第 i 个水平 A_i 在第 j 次重复试验的响应值，μ_i 表示因素 A 的第 i 个水平 A_i 的均值，取下面的线性统计模型：

$$\begin{cases}x_{ij}=\mu_i+\varepsilon_{ij}, & i=1,2,\cdots,r;j=1,2,\cdots,n_i\\ \varepsilon_{ij}\sim N(0,\sigma^2)，\text{各 }\varepsilon_{ij}\text{ 相互独立，}\varepsilon_{ij}\text{ 为随机变量}\end{cases} \tag{1.1}$$

设

$$\mu=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r}n_i\mu_i$$

为总平均值，其中 $n=\sum\limits_{i=1}^{r}n_i$。

令 $\alpha_i=\mu_i-\mu$ 为第 i 个水平 A_i 的效应，则 $\sum\limits_{i=1}^{r}n_i\alpha_i=0$，于是式(1.1)变成

$$\begin{cases}x_{ij}=\mu+\alpha_i+\varepsilon_{ij}, & i=1,2,\cdots,r;j=1,2,\cdots,n_i\\ \varepsilon_{ij}\sim N(0,\sigma^2)\end{cases}$$

因素 A 水平的改变对响应值是否有显著影响的问题就变为检验假设

$$\begin{aligned}&H_0:\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_r=0,\\ &H_1:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r \text{ 至少有一个不为 } 0\end{aligned} \tag{1.2}$$

是否成立的问题。

(1) 参数估计

似然函数为

$$L(\mu,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\sigma^2)=\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{r}\sum\limits_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\mu-\alpha_i)^2}$$

其中 $n=\sum\limits_{i=1}^{r}n_i$，取对数得

$$\ln L=-\frac{n}{2}\ln 2\pi-\frac{n}{2}\ln\sigma^2-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\mu-\alpha_i)^2$$

令

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\ln L}{\partial\mu}=\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{r}\sum\limits_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\mu-\alpha_i)=0\\ \dfrac{\partial\ln L}{\partial\alpha_i}=\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\mu-\alpha_i)=0,i=1,2,\cdots,r\\ \dfrac{\partial\ln L}{\partial\sigma^2}=-\dfrac{n}{2\sigma^2}+\dfrac{1}{2\sigma^4}\sum\limits_{i=1}^{r}\sum\limits_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\mu-\alpha_i)^2=0\end{cases}$$

解此方程组并记 $\bar{x}_i=\dfrac{1}{n_i}\sum\limits_{i=1}^{r}x_{ij}$，$\bar{x}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{r}\sum\limits_{j=1}^{n_i}x_{ij}$，得

$$\begin{cases}\hat{\mu}=\bar{x}\\ \hat{\alpha}_i=\bar{x}_i-\bar{x},i=1,2,\cdots,r\\ \hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{r}\sum\limits_{j=1}^{n_j}(x_{ij}-\bar{x}_i)^2\end{cases} \tag{1.3}$$

可以证明 $\hat{\mu}$、$\hat{\alpha}_i$ 分别是 μ 和 α_i 的无偏估计量。

(2) 离差平方和分解与显著性检验

记

$$S_T^2=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\bar{x})^2 \tag{1.4}$$

S_T^2 表示响应值的总波动，称之为总离差平方和。

$$S_T^2=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\bar{x})^2=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\bar{x}_i+\bar{x}_i-\bar{x})^2$$

$$= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\bar{x}_i)^2+\sum_{i=1}^{r}n_i(\bar{x}_i-\bar{x})^2+2\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\bar{x}_i)(\bar{x}_i-\bar{x})$$

注意到 $\sum\limits_{i=1}^{r}\sum\limits_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\bar{x}_i)(\bar{x}_i-\bar{x})=0$,并记

$$S_E^2=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\bar{x}_i)^2 \tag{1.5}$$

$$S_A^2=\sum_{i=1}^{r}n_i(\bar{x}_i-\bar{x})^2 \tag{1.6}$$

则有

$$S_T^2=S_E^2+S_A^2 \tag{1.7}$$

S_E^2,S_A^2 分别称为误差平方和和因素 A 的离差平方和,S_E^2 反映了试验误差引起的响应值的波动,而 S_A^2 反映了因素 A 水平的改变引起的响应值的波动,式(1.7)称为离差平方和分解公式。

注意到:

$$x_{ij}\sim N(\mu_i,\sigma^2),\quad \bar{x}_i\sim N\left(\mu_i,\frac{\sigma^2}{n}\right)\text{及}\ \bar{x}\sim N\left(\mu_i,\frac{\sigma^2}{n}\right),\quad i=1,2,\cdots,r$$

得

$$E(S_E^2)=\sum_{i=1}^{r}(n_i-1)\sigma^2=(n-r)\sigma^2 \tag{1.8}$$

$$E(S_A^2)=\sum_{i=1}^{r}n_i\alpha_i^2+(r-1)\sigma^2 \tag{1.9}$$

故有

$$E\left(\frac{S_E^2}{n-r}\right)=\sigma^2$$

$$E\left(\frac{S_A^2}{r-1}\right)=\sigma^2+\frac{1}{r-1}\sum_{i=1}^{r}n_i\alpha_i^2$$

当 H_0 成立时,即 $H_0:\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_r=0$ 时,

$$E\left(\frac{S_A^2}{r-1}\right)=E\left(\frac{S_E^2}{n-r}\right)=\sigma^2$$

否则 $E\left(\frac{S_A^2}{r-1}\right)\geqslant E\left(\frac{S_E^2}{n-r}\right)$。因此当 H_0 不成立时,比值

$$F_A=\frac{S_A^2/(r-1)}{S_E^2/(n-r)} \tag{1.10}$$

有偏大的趋势,所以 F_A 可作为检验 H_0 的统计量。下面需要求出在 H_0 成立的条件下,统计量 F_A 的概率分布。

若 H_0 成立,则 $x_{ij}\sim N(\mu_i,\sigma^2)$,则

$$\frac{S_T^2}{\sigma^2}=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}\left(\frac{x_{ij}-\bar{x}}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(n-1)$$

$\frac{S_E^2}{\sigma^2}=\frac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{r}\sum\limits_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\bar{x}_i)^2$ 满足 r 个约束条件:$\sum\limits_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\bar{x}_i)=0(i=1,2,\cdots,r)$,所以二次型 $\frac{S_E^2}{\sigma^2}$ 的秩为 $n-r$。$\frac{S_A^2}{\sigma^2}=\frac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{r}n_i(\bar{x}_i-\bar{x})^2$ 满足一个约束条件 $\sum\limits_{i=1}^{r}n_i(\bar{x}_i-\bar{x})^2=0$,所以 $\frac{S_A^2}{\sigma^2}$ 的秩

为 $r-1$。
因为

$$rn\left(\frac{1}{\sigma^2}S_E^2\right)+rn\left(\frac{1}{\sigma^2}S_A^2\right)=n-r+r-1=n-1=rn\left(\frac{1}{\sigma^2}S_T^2\right)$$

故由柯赫伦定理知$\frac{S_E^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-r)$，$\frac{S_A^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(r-1)$，且 S_E^2 与 S_A^2 相互独立。

由 F 分布的定义知，在 H_0 成立的条件下

$$F_A=\frac{S_A^2/(r-1)}{S_E^2/(n-r)}\sim F(r-1,n-r)$$

对给定的显著水平 α，由 F 分布临界值表查出 $F_\alpha(r-1,n-r)$ 的值，使得

$$P\{F_A>F_\alpha(r-1,n-r)\}=\alpha$$

从一次抽样后所得样本计算 F_A 的数值，若 $F_A>F_\alpha(r-1,n-r)$，拒绝假设 H_0，即认为在显著水平 α 下，因素 A 的不同水平对实验结果有显著影响；若 $F_A\leqslant F_\alpha(r-1,n-r)$，则接受假设 H_0，即认为因素 A 的不同水平对实验结果无显著影响。将以上分析过程列为方差分析表 1.2。

表 1.2　方差分析表

方差来源	离差平方和	自由度	平均离差平方和	F 值	显著性
因素 A	S_A^2	$r-1$	$S_A^2/(r-1)$	$F_A=\frac{S_A^2/(r-1)}{S_E^2/(n-r)}$	
误差 E	S_E^2	$n-r$	$S_E^2/(n-r)$		
总和 T	S_T^2	$n-1$			

在显著性一栏，对 $\alpha=0.05$，若是因素 A 显著，则标以记号“*”；对 $\alpha=0.01$，若 A 显著，则标以记号“**”。

为了计算方便，计算 S_T^2，S_E^2，S_A^2 时经常采用以下简化公式

$$\begin{cases}Q=\sum\limits_{i=1}^{r}\frac{1}{n_i}\left(\sum\limits_{j=1}^{n_i}x_{ij}\right)^2\\ P=\frac{1}{n}\left(\sum\limits_{i=1}^{r}\sum\limits_{j=1}^{n_i}x_{ij}\right)^2\\ R=\sum\limits_{i=1}^{r}\sum\limits_{j=1}^{n_i}x_{ij}^2\\ S_A^2=Q-P\\ S_E^2=R-Q\\ S_T^2=R-P\end{cases}\tag{1.11}$$

(3) 多重比较(S 检验)

如果 F 检验显著，那么只表明因素各水平之间存在显著差异，但并未指明哪些水平之间存在显著差异，因而还需要进一步对各水平进行比较，即多重比较。多重比较有利于确定较好的生产工艺条件。在一项试验中，如果是指标值大的结果好，人们通常选取平均指标值高的所对应的水平作为较好工艺条件。指标值小的情况类似。当两个水平之间的差异显著时，这样做会取得良好的效果；但当两个水平之间的差异不显著时，从中选取容易操作的水平作为较好工艺条件会更加经济实惠一些。多重比较经常采用 S 检验法。

首先要列出因素各水平下指标平均值的差数三角形表 1.3。列差数三角形表时，第一列