交通管理基础教程

王 晖 编著

云南大学出版社

交通管理基础教程

王　晖编著

云南大学出版社

责任编辑：王登全
封面设计：丁群亚

交通管理基础教程

王　晖　编著

*
云南大学出版社出版发行
（云南大学校内）
云南科技印刷厂
*
开本：787×1092　1/16　印张：15　字数：360千
1996年9月第1版　　1996年9月第1次印刷
ISBN 7－81025－652－1/U・3
定价：18元

内容提要

本书是由公安交通管理专业王晖老师，根据讲授该门课程的多年教学经验编著而成。

书中详细论述了道路交通流、道路通行能力、道路交通调查等方面的有关基础理论。本书适用于交通管理专业和相关专业的大学本科生和大专生的必修课教材，也可作为交通管理人员进行专业学习的参考书。

目　录

第一章　概率论基础知识

自然界和社会上发生的现象千奇百怪、多种多样。有一类现象，在一定条件下必然发生（或必然不发生），例如，向上抛一枚石子必然下落、同性电荷必互相排斥、人固有一死，等等。这类现象称为确定性现象。然而在自然界和社会中也还存在着另一类现象，例如，在相同条件下向上投掷同一枚硬币，其结果可能是“国徽”一面朝上，也可能是“数字”一面朝上，并且不论怎样控制抛掷条件，在每次抛掷之前都无法肯定抛掷后的结果是什么；如社会上发生的刑事案件，事先无法控制案件发生的时间，次数、地点，损失等。这类现象呈现出不确定性，称为随机现象。早在十七世纪以前，人们就注意到这类现象。许多学者早就从人口统计中注意到：一个国家或城市的男婴出生数与男女婴出生总数之比，几乎年年保持不变。他们由此联想到，类似的其它随机现象在一定条件下发生的程度，或许也可以通过大量试验和统计，得到某些概率性数据。若真能如此，就不至于再象猜谜一样说某些事可能发生，也可能不发生、而是可以有把握地计算出它们发生的可能性大小。也就是说，从表面上看随机现象虽带有不确定性，似乎没有什么规律可言，但在大量重复试验或观察下它的结果呈现出某种规律性。这种在大量重复试验或观察中所呈现出的固有规律性，就是所谓的统计规律性。

概率论是一门从数量上研究随机现象规律的科学。事件在一定条件下发生的可能性大小——概率的规律性的发现，使人们运用某些事件的已知概率，来计算和预测与该事件有关的其它事件的未知概率成为可能，并在运用中逐步形成了互斥事件、对立事件、独立事件，概率加法定理、乘法定理、全概率、条件概率、各种条件下随机变量分布定律及其数字特征等一系列基本概念和运算法则。其中，有些吸收了函数、微积分、线性代数等数学方法，有些贯穿着对策论、排队论、线性规划、动态规划等应用数学。概率论的出现，增强了人们具有由已知推算未知、由概然推断必然的能力，由于随机现象存在的普遍性，所以，概率论的概念和方法具有非常普遍的意义。概率论自十七世纪发展至今天已获得广泛的应用，目前它几乎遍及所有科学技术领域，工农业生产和国民经济的各个部门之中。很自然，它也被应用到交通管理上，研究交通方面的随机现象问题。由于在交通现象中，存在着大量的随机现象，这就需要我们掌握概率论的一些基本概念和知识，掌握处理随机现象的基本方法，用以解决交通管理中所遇到的有关实际问题。

第一节　概率论的初步知识

一　概率的基本概念

（一）　随机事件

前文已述，自然界和社会中的现象可分为确定性现象和随机现象两类。现象的每种表现或结果称为事件。在一定条件下肯定发生的事件称为必然事件。例如，在标准大气

压下，水受热到100℃时，必然会“沸腾”。“沸腾”这种事件，就是必然事件。必然事件用符号S表示。在一定条件下，肯定不会发生的事件称为不可能事件。例如，在标准大气压下，15℃的水肯定不会结冰，这里的“结冰”就是不可能事件。不可能事件用符号$\varnothing$表示。必然事件与不可能事件统称为确定性事件。比如我们研究汽车的速度，这是一种现象，不同的速度表现为不同的事件，速度为$30km/h$时为一种事件，速度为$60km/h$时又是一种事件。在一定的行驶条件下，现代汽车的速度一定可达到$80km/h$，这是一种必然事件，但是，科学技术再发展，其速度也不可能达到光速，显然这是一种不可能事件。在自然界和社会上的现象中，除确定性现象外，还有与此本质不同的现象，即随机现象。随机现象的每种表现或结果称为随机事件，即在一定条件下可能发生也可能不发生的事件就称为随机事件。随机事件用大写字母如A、B、C等表示。例如，投掷硬币就是一种随机现象，“出现正面”是一随机事件，“出现反面”也是一随机事件。随机事件在日常生活和工作中经常看到，例如，某时段通过某路口的车辆数、某地区某月发生的交通事故数、伤亡人数、某地区某月下几场雨、降雨量多少等等。这些有关数量的出现是偶然的、事先无法确定的，都称为随机事件。

必然事件，不可能事件和随机事件都是有条件的，可变动的。同一种现象，在某一条件下是必然事件，在另一条件下就可能变成不可能事件。例如，在标准大气压下，水受热到100℃时，“沸腾”是必然事件，而在大于标准大气压的条件下，水受热到100℃时，“沸腾”则是不可能事件。研究各种事件时，应根据具体情况进行具体分析。

（二） 随机事件的频率

在概率论中，通常把在一定条件下的一次实现称为一次试验。随机现象的试验结果带有随机性，故又称为随机试验。随机事件在每次试验之下的出现与否是随机的，表面看起来，试验结果无规律可循，但如果进行大量试验就会发现其内部的固有规律性。为了说明这个问题，先介绍频率的概念。

若以m表示某一随机事件A在n次重复试验中所出现的次数，则m与n之比值称为随机事件A出现的频率，记为$f(A)$，即

$$f(A)=\frac{m}{n} \tag{1-1-1}$$

式中 $f(A)$——事件A出现的频率；

n——试验次数；

m——随机事件出现的次数。

显然，对任何随机事件A，有

$$0\leqslant f(A)\leqslant 1$$

如果事件A是必然事件，则在任何试验中，都将出现，即$m=n$，则有$f(A)=1$。所以必然事件出现的频率总等于1，即$f(S)=1$。

如果事件A是不可能事件，则在任何试验中都不会出现，即$m=0$，则有$f(A)=0$。所以不可能事件出现的频率总等于0，即$f(\phi)=0$。

需要阐明的规律是：随着随机试验次数n的逐渐增加，事件的频率越来越趋向于稳定性。即大量重复进行某一随机试验，其中某一事件出现的频率的数值，就趋向于某一确定的数值，频率的数值在这一确定的数值附近摆动，差异很小。为了证实这个问题，十

八世纪法国科学家毕方和英国科学家皮尔逊，分别进行了投掷铜币的试验。试验结果如表 1—1—1 所示。

表 1—1—1

实验者	n	n_H	$f_n(H)$
毕方	4040	2048	0.5080
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005

表 1—1—2 为一组"投掷硬币"的试验结果。为了要知道事件 H 出现的可能性的大小，将硬币抛 n 次，观察在 n 次试验中事件 H 出现的次数。现在将硬币连续抛 5 次，50 次、500 次各做了 10 遍。

表 1—1—2

实验序号	$n=5$		$n=50$		$n=500$	
	n_H	$f_n(H)$	n_H	$f_n(H)$	n_H	$f_n(H)$
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502
2	3	0.6	25	0.50	249	0.498
3	1	0.2	21	0.42	256	0.512
4	5	1.0	25	0.50	253	0.506
5	1	0.2	24	0.48	251	0.502
6	2	0.4	21	0.42	246	0.492
7	4	0.8	18	0.36	244	0.488
8	2	0.4	24	0.48	258	0.516
9	3	0.6	27	0.54	262	0.524
10	3	0.6	31	0.62	247	0.494

从这个表中可看出，抛硬币次数较少时，事件 H 出现的频率差异较大，但是随着抛硬币的次数的增多，事件 H 出现的频率呈现出稳定性。也就是说，不管什么人去抛硬币，当试验次数逐渐增多时，出现事件 H 的频率 $f_n(H)$ 总是在 0.5 附近摆动，而逐渐稳定于 0.5。这个数值能反映出现事件 H 的可能性大小。

从上面的例子可看出，一个随机试验的随机事件 H，在 n 次试验中出现的频率 $f_n(H)$，当试验次数 n 逐渐增多时，它在一个常数附近摆动。并逐渐稳定于这个常数。这个常数是客观存在的，它就是下面将要定义的事件的概率的客观基础。"频率稳定性"的性质，不断地为人类的实践所证实，它揭示了隐藏在随机现象中的规律性，这种规律性就称为统计规律性。

（三） 事件的概率

频率的重要意义在于它能一定程度地反映事件 A 发生的可能性的大小，并且比较简

单，易于掌握。用频率来刻划事件发生可能性的大小是直观的，但有其缺点，即它有随机波动性。不过当试验次数 n 逐渐增多时，频率 $f(A)$ 逐渐稳定于某个常数，这个常数记为 $P(A)$。即当试验次数 n 很大时有 $f(A) \approx P(A)$。这个常数 $P(A)$ 是客观存在的，对于每一随机事件 A 总有这样一个数 $P(A)$ 与之相对应。前述的投掷硬币试验，就有 $P(A)=0.5$。于是就想到用稳定值 $P(A)$ 来刻划事件发生的可能性的大小是比较恰当的。然而，在进行理论研究时，不可能对每一事件，都做大量的试验，从中得到 P 频率的稳定值。为此，必须采取抽象化的方法，给出度量事件发生可能性大小的概率定义。

当试验次数 n 足够大（$n \to \infty$）时，随机事件 A 的频率趋向于稳定的常数 P，即

$$P(A)=\lim_{n \to \infty} f(A)=P \qquad (1—1—2)$$

那么，常数 P 就称为随机事件 A 的概率，记为 $P(A)$。可见，事件的频率是经验值，事件的概率是理论值。当 $n \to \infty$ 时，概率是频率的极限值。在许多实际问题中，当事件的概率不易求得时，往往取 n 充分大时，事件的频率作为事件概率的近似值，即

$$P(A) \approx \frac{m}{n}$$

从上述概率的定义可看出概率具有如下几个性质：

1）必然事件的概率等于 1，即 $P(s)=1$；

2）不可能事件的概率等于 0，即 $P(\phi)=0$；

3）任何随机事件的概率总是介于 0 和 1 之间，即 $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$。

二　事件间的关系

在研究随机事件时，用直接计算法和统计法只能解决简单事件的计算问题，对于复杂的事件往往要根据事件间的关系分解为若干个简单事件，再按一定的运算规律进行计算。

（一）　事件的包含关系

如果事件 A 的发生必然导致事件 B 的发生；则称事件 A 包含于事件 B，记为 $A \subset B$。

例如，发生交通事故是一随机事件，记为 A。而发生交通事故时，有人、畜伤亡或车物损坏的后果也是一随机事件，记为 B。只要发生交通事故，就必然有这种后果。没有这种后果的不属于交通事故。所以说，事件 A 包含于事件 B。

（二）　和事件

如果事件 A、事件 B 中有一个发生，事件 C 就发生；反之，如果事件 C 发生，事件 A 与事件 B 至少有一个发生，则事件 C 为事件 A 和事件 B 的和事件，记为

$A+B=C$ 或 $A \cup B=C$

例 1—1　检查汽车的制动状况，若检查项目只有“制动距离”和“制动跑偏”两项，现用

A 表示：“制动距离长”事件；

B 表示：“制动跑偏”事件；

C 表示：“制动状况不合格”事件。

在汽车制动系统的检查过程中，只要发现“制动距离长”或“制动跑偏”，就可认为

汽车制动状况不合格；反之，若汽车制动状况不合格，就意味着不是“制动距离长”，就是“制动跑偏”或者二者都存在。所以有

$C=A+B$

（三） 积事件

若事件 A 与事件 B 都发生时，事件 C 才发生；反之，若事件 C 发生，事件 A 与事件 B 一定都发生，则事件 C 称为事件 A 与事件 B 的积事件，记为

$C=AB$ 或 $C=A\cap B$

例 1—2 如检查汽车发动机的活塞销，若检查项目只有长度和直径两项，现用

A 表示：“活塞销长度合格”事件；

B 表示：“活塞销直径合格”事件；

C 表示：“活塞销合格”事件。

因为只有当活塞销的长度合格，直径也合格，才算合格的活塞销；反之，活塞销合格一定是它的直径也合格，长度也合格，所以有

$C=A\cap B$

（四） 互不相容事件（也称互斥事件）

若事件 A 的发生，必然导致事件 B 不发生，即事件 A 和事件 B 不能同时发生（$AB=\phi$），就称事件 A 与事件 B 是互不相容事件或称互斥事件。

例 1—3 某驾驶员驾车到某地执行运输任务。若 A 表示“安全完成任务”事件，B 表示“途中发生了交通事故”事件。则事件 A，事件 B 是彼此互斥的。这是因为，驾驶员在执行任务过程中，不可能既是“安全完成任务”又是“途中发生了交通事故”。

（五） 对立事件（也称互逆关系，逆事件）

若事件 A 与事件 B 不能同时发生（即 $AB=\phi$），但必有一事件发生（即 $A+B=S$），则称事件 A 与事件 B 为对立事件，或称互逆关系。若记 $B=\overline{A}$（$\overline{A}$ 读作非 A），即事件 A 与事件 $\overline{A}$ 是对立事件，则有

$$\begin{cases} A\overline{A}=\phi \\ A+\overline{A}=S \end{cases}$$

例 1—4 一值勤交通警察检查某汽车是否超载行驶，若事件 A 表示“未超载行驶”事件，事件 B 表示“超载行驶”事件。那么事件 A 与事件 B 是对立事件。这是因为，不能认为该辆汽车既“未超载行驶”，又“超载行驶”，在这两种情况中只能出现一种情况，二者必居其一。

若事件 A 表示“未超载行驶”，那么事件 $\overline{A}$ 就表示“超载行驶”。

对立事件不同于互斥事件，若事件 A 与事件 B 是互斥事件，那么两个事件不能同时发生，但不一定非得有一事件发生不可，很有可能哪个也未发生。若事件 A 与事件 B 是对立事件，同两个事件是互斥事件一样，不能同时发生，但是必有一事件发生，要么是事件 A 发生，要么是事件 B 发生。

例 1—5 有 3 辆车都要开往同一目的地，若 A 表示“至少有 1 辆车到达目的地”的事件，B 表示“1 辆车也未到达目的地”的事件。那么，事件 A 与事件 B 则为对立事件。这是因为“至少有一辆车到达目的地“包括到达目的地的车辆数可能是 1 辆，或 2 辆，或 3 辆，与“1 辆车也未到达目的地”不能同时发生，此外，3 辆车开往同一目的地有 4 种

情况：到达 1 辆，或 2 辆，或 3 辆，或 1 辆也未到达。上述的事件 A，事件 B 把这 4 种情况都包括进去了，所以，两事件中必有一事件发生。

若 A 表示“至少有 2 辆车到达目的地”事件，B 仍表示“1 辆车也未到达目的地”事件，这时的事件 A 与事件 B 仅是互斥事件而不是对立事件。这是由于，虽然事件 A 与事件 B 不可能同时发生，但不能说两事件中必有一事件发生。因为两事件并未包括有 1 辆车到达目的地的情况，如果只到达 1 辆车，说明事件 A 和事件 B 都未发生。

三　概率的加法定理

（一）　两个互斥事件概率的加法定理

定理 1　若事件 A 与事件 B 是互斥事件（即 $AB=\phi$），则两事件和的概率，等于这两个事件的概率的和。则

$$P(A+B)=P(A)+P(B) \tag{1—1—3}$$

下面就概率的统计意义来推导此定理。

设一随机试验反复进行了 n 次（n 相当大），其中事件 A 出现 m_1 次，事件 B 出现 m_2 次。由于事件 A 与事件 B 是互斥的，即它们不可能同时出现，所以和事件 $A+B$ 出现了 m_1+m_2 次，由此，

事件 $(A+B)$ 的频率 $=\dfrac{m_1+m_2}{n}=\dfrac{m_1}{n}+\dfrac{m_2}{n}$

$=$ 事件 A 的频率 $+$ 事件 B 的频率

即 $f(A+B)=f(A)+f(B)$

前面已说明，当 n 相当大时，事件的频率与事件的概率相差极小，可以由事件频率的性质推出事件概率的性质，所以有

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

多个互斥事件的和的概率，也可以运用这个定理，即

推理 1　若事件 A_1、事件 A_2、……、事件 A_n 为互斥事件，则有

$$P(A_1+A_2+\cdots\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n) \tag{1—1—4}$$

对于对立事件 A 和 $\overline{A}$，则有如下结论：

推论 2　对立事件概率的和等于 1。即

$$P(A)+P(\overline{A})=1 \tag{1—1—5}$$

或　$P(A)=1-P(\overline{A})$

证明：$\because$ 事件 A 与事件 $\overline{A}$ 是互斥的

$\therefore P(A+\overline{A})=P(A)+P(\overline{A})$

又 $\because$ 事件 A 与事件 $\overline{A}$ 是对立事件，则有

$A+\overline{A}=S$　（必然事件）

$\therefore P(A+\overline{A})=P(S)=1$

$\therefore P(A)+P(\overline{A})=1$

在实际计算中，如果计算事件 A 的概率 $P(A)$ 比计算事件 $\overline{A}$ 的概率 $P(\overline{A})$ 要复杂，就可以先计算 $P(\overline{A})$，再从 1 里减去 $P(\overline{A})$，从而得到 $P(A)$。反之亦然。

利用上述定理和推论，可以比较容易地求得一些复杂事件的概率。

例 1—6　如图 1—1—1 所示，一个圆形靶有甲、乙、丙三个区域。射击一次，命中甲、乙、丙区域的概率分别为 0.15、0.23、0.17，问脱靶的概率是多少？

解：设 A_1、A_2、A_3 依次表示"命中甲区域"、"命中乙区域""命中丙区域"的事件，$A_1+A_2+A_3$ 表示"中靶"事件，$\overline{A}$ 表示"脱靶"事件。

$\because P(A_1+A_2+A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)$

$=0.15+0.23+0.17$

$=0.55$

$\therefore P(\overline{A})=1-P(A_1+A_2+A_3)$

$=1-0.55$

$=0.45$

即脱靶的概率为 0.45。

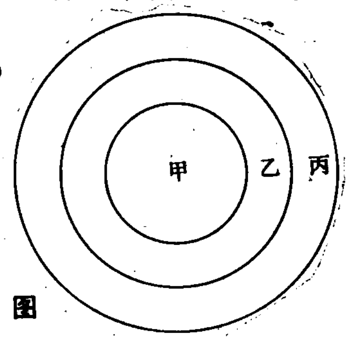

图 1—1—1　靶图

例 1—7　现对 50 辆汽车进行技术状况检验，其中有 5 辆车属技术状况不合格，若从 50 辆中任意抽查 3 辆，求其中有不合格车辆的概率。

解：设 A_1 表示"抽查的 3 辆车中有 1 辆不合格"事件；

A_2 表示"抽查的 3 辆车中有 2 辆不合格"事件；

A_3 表示"抽查的 3 辆车中都不合格"事件。

在抽查的 3 辆车中有不合格车辆的情况，只有上述三种可能性，且三种可能性中两两是互斥的。则求任意抽检 3 辆得到有不合格车辆的概率为：

$P(A_1+A_2++P_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)$

$=\frac{C_5^1C_{45}^2}{C_{50}^3}+\frac{C_5^2C_{45}^1}{C_{50}^3}+\frac{C_5^3C_{45}^0}{C_{50}^3}$

$=0.2525+0.023+0.0005$

$=0.276$

另一种解法：

可用对立事件的概率求解。令 A_0 表示在抽查的 3 辆车中"没有不合格车辆"的事件，则

$A_0=\overline{A_1+A_2+A_3}$

$P(A_1+A_2+A_3)=1-P(A_0)$

$=1-\frac{C_{45}^3}{C_{50}^3}=1-0.724$

$=0.276$

显然，用后一种方法求解较简便。

例 1—8　甲、乙两人同时射击同一靶子，已知甲击中靶子的概率是 0.9，乙击中靶子的概率是 0.8，问靶子被击中的概率是多少？

解：设 A 表示"甲击中靶子"事件，$P(A)=0.9$；

B 表示"乙击中靶子"事件，$P(B)=0.8$；

C 表示"靶子被击中"事件。

在射击中，只要有一人击中，靶子就算被击中、则由和事件定义知：

$C=A+B$

但要用定理 1，则得

$P(C)=P(A+B)=P(A)+P(B)$

$=0.9+0.8$

$=1.7$

即靶子被击中的概率为 1.7。

这个结论显然是错误的。因为任何事件的概率都不能大于 1。那么错误出在什么地方呢？是出在没有注意定理 1 的条件。在定理 1 中，事件 A 与事件 B 必须为互斥事件，即两个事件不能同时出现。而在这个例子中，事件 A“甲击中靶子”与事件 B“乙击中靶子”并不互斥、甲乙两人有同时击中靶子的可能，也就是说，事件 A 与事件 B 有同时发生的可能。因此，在求解本例时不能应用定理 1，而应用下述的定理 2。

（二）　任意两事件的加法定理

定理 2　对任意两个事件 A 与事件 B，有：

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB) \qquad (1-1-6)$$

同样可在概率统计定义的意义下来推导此定理。

设一随机试验反复进行了 n 次（n 相当大），其中事件 A 出现了 m_1 次，事件 B 出现了 m_2 次，而在这些试验中，两事件同时出现了 K 次，则和事件 $A+B$ 共出现了 m_1+m_2-K 次，由于

$$\frac{m_1+m_2-k}{n}\approx\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}-\frac{k}{n}$$

又$\because P(A+B)\approx\frac{m_1+m_2-k}{n}$

$P(A)\approx\frac{m_1}{n}$

$P(B)\approx\frac{m_2}{n}$

而事件 A 与事件 B 同时出现 K 次，这就是积事件 AB 出现了 K 次，

$\therefore P(AB)\approx\frac{K}{n}$

由此得　$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

例 1—9　在例 1—8 中，若甲乙两人同时中靶的概率为 0.72，间靶子被击中的概率是多少？

解：设 A 表示“甲击中靶子”事件，$P(A)=0.9$；

B 表示“乙击中靶子”事件，$P(B)=0.8$；

AB 表示“甲乙同时击中靶子”事件，$P(AB)=0.72$；

C 表示“靶子被击中”事件。

则根据定理 2　得

$P(C)=P(A+B)$

$=P(A)+P(B)-P(AB)$

$=0.9+0.8-0.72$

$=0.98$

即靶子被击中的概率为 0.98

定理 1 是定理 2 的一种特殊情况。因为在定理 1 中，事件 A 与事件 B 是互斥的，$AB=\phi$，则 $P(AB)=P(\phi)=0$，所以

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$
$$=P(A)+P(B)$$

四　条件概率与乘法定理

（一）　条件概率

如果在事件 B 已经发生的条件下，计算事件 A 的概率，则这种概率叫做事件 A 在事件 B 已发生的条件下的条件概率，记为 $P(A/B)$。

条件概率 $P(A/B)$ 与无条件概率 $P(A)$ 是不同的概念。一般情况下，它们是不相等的，简单地说，条件概率与条件有关，而无条件概率与条件无关。

当出现 $P(A/B)=P(A)$ 的情况时，表明事件 B 的发生（条件）对事件 A 的概率不发生影响，表现了事件 A 与事件 B 无关的特性，称为事件 A 与事件 B 相互独立，或者称事件 A 和事件 B 为相互独立事件。事件 A 和事件 B 是相互独立事件时，条件概率 $P(A/B)$ 就转化为无条件概率 $P(A)$；反之，使公式 $P(A/B)=P(A)$ 成立的事件 A 和事件 B 为相互独立事件。

下面仍通过概率统计意义来推证条件概率计算的一般规则。

设一随机试验反复进行了 n 次（n 相当大），其中事件 B 发生了 m 次，事件 A 和事件 B 同时发生了 K 次。

在 n 次试验中，事件 A 和事件 B 同时发生了 K 次，所以事件 AB 发生的概率是

$$P(AB)=\frac{k}{n}$$

在 n 次试验中，事件 B 发生了 m 次，所以事件 B 发生的概率是

$$P(B)=\frac{m}{n}$$

在事件 B 发生的 m 次中，事件 A 发生了 K 次，所以，在事件 B 发生的条件下事件 A 的条件概率是

$$P(A/B)=\frac{k}{m}$$

而 $\frac{k}{n}=\frac{m}{n}\cdot\frac{k}{m}$

则 $\frac{k}{m}=\frac{k}{n}/\frac{m}{n}$，由此得到，在事件 B 发生的条件下，事件 A 发生的条件概率有如下计算公式：$P(A/B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$　(1—1—7)

例 1—10　有甲乙两厂的产品共 1000 件，其中一级品 450 件。又知 1000 件产品中有甲厂 600 件，其内有 250 件为一级品。问在甲厂产品中取出一件是一级品的概率是多少？

解：设 A 表示“取一件是一级品”事件，则

$$P(A)=\frac{450}{1000};$$

B 表示“取一件是甲厂产品”事件，则

$P(B)=\frac{600}{1000}$;

AB 表示“取一件既是甲厂产品，又是一级品“事件，则

$P(AB)=\frac{250}{1000}$;

A/B 表示“在甲厂产品中，取一件是一级品”事件。其概率 $P(A/B)$ 是在事件 B（取一件是甲厂产品）发生的条件下，事件 A（取一件是一级品）发生的条件概率。根据公式（1—1—7）得出

$$P(A/B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{\frac{250}{1000}}{\frac{600}{1000}}=\frac{250}{600}$$

（二） 概率的乘法定理

从条件概率的计算公式，很容易得到概率的乘法定理，由公式（1—1—7）得

$P(AB)=P(A/B)P(B)$

或者写为 $P(AB)=P(B/A)P(A)$ （1—1—8）

定理 1 两个事件积的概率等于其中一事件的概率，乘以在该事件发生的条件下另一事件的条件概率。这称为概率的乘法定理。其一般情形是：

$$P(A_1A_2\cdots\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)\cdots\cdots P(A_n/A_1A_2\cdots\cdots A_{n-1})$$ （1—1—9）

例 1—11 设有 100 件产品（其中有 6 件次品），若每次从中抽取一件（抽取后不放回），求连续抽二次并都是次品的概率。

解：设 A 表示“第一次抽得一件是次品”事件，$P(A)=\frac{6}{100}$;

B 表示“第二次抽得一件是次品”事件，但是事件 B 的概率，则要看事件 A 是否发生，若事件 A 已经发生（第一次已抽得一件次品、并不放回）则有

$P(B/A)=\frac{5}{99}$

由于事件“连续两次抽出的都是次品”是事件 A 和事件 B 都发生时才发生的事件，即是事件 A 与事件 B 的积事件 AB，所以有

$$P(AB)=P(A)P(B/A)=\frac{6}{100}\times\frac{5}{99}=\frac{1}{330}$$

定理 2 如果事件 A 与事件 B 是独立的，则

$P(AB)=P(A)P(B)$ （1—1—10）

由独立事件的定义，读者不难自己证明上述定理。

在有多个事件的情况下，如果每两个事件都彼此相互独立，其积事件的概率等于各事件概率的乘积，即

$P(A_1A_2\cdots\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots\cdots P(A_n)$ （1—1—11）

例 1—12 一个由甲、乙、丙 3 架轰炸机组成的编队对一敌舰各投一弹，其命中率分别为 0.4、0.5、0.3，并知命中二弹才能摧毁敌舰，求摧毁敌舰的概率。

解：设 A 表示“摧毁敌舰”事件；

B_1 表示“甲机命中敌舰”事件；