

高等学校教材配套辅导用书

概率论与数理统计

辅导

(第四次修订本)

最新版 最低价

第三版

主 编 北京大学数学科学学院 章 昕
浙江大学 刘 意 谢 齐
编 写 双 博 士 数 学 课 题 组
总策划 胡东华



科学技术文献出版社

概率论与数理

主 编 北京大学数学科学学院 章昕
浙 江 大 学 刘 意 谢 齐
编 写 双博士高等数学课题组
总策划 胡东华

科学技术文献出版社

Scientific and Technical Documents Publishing House

北 京

声明:本书封面及封底均采用双博士品牌专用图标
(见右图);该图标已由国家商标局注册登记。
未经本策划人同意,禁止其他单位或个人使用。



图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计辅导/章昕主编, -北京:科学技术文献出版社, 2006. 9

(高等学校数学教材配套辅导丛书)

ISBN 7 - 5023 - 3390 - 8

I. 概... II. 章... III. ①概率论-高等学校-教学参考资料②数理统计-高等学校-教学参考资料 IV. 021

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2006) 第 001202 号

科学技术文献出版社

责任编辑:朱 华

责任校对:郝峥嵘

封面设计:胡东华

责任印制:何全君

北京市高岭印刷厂印刷

科学技术文献出版社出版发行

2006 年 9 月第 3 版 第 1 次印刷

850mm × 1168mm 1/32 印张 18 字数 580 千字

定价:原定价 20~~×60~~ 元,促销惊爆价 14.80 元

©版权所有 违法必究

盗版举报电话:(010)82608023(著作权者)

<http://www.bbdd.cc>(中国教育考试双博士网站)

如有字迹不清、缺页、倒页、脱页,由本社发行部负责调换。

前言

双博士品牌高等学校数学辅导系列丛书全国销量第一!

概率统计作为数学的一个重要分支在许多领域中有着广泛的应用。现在,不但理工学科,而且经济学、管理类专业对概率统计的要求也越来越高。在历年考研试题中,概率统计也不容忽视,而且难度有所增加。如果仅仅靠一本教材、有限的几个课时和课后少量的练习,往往是很难学好这门课的。本书编写兼顾在校课堂同步使用和准备考研的考生用于复习指导,其特点为:

知识网络图 提纲挈领掌握全章,使同学们对各个概念性质定理之间的逻辑关系有更深刻的认识,使知识更加系统化。

考试内容及理解记忆法 对各个概念性质和定理进行了详细的说明并指出了注意事项以及理解记忆法。便于同学掌握各个概念、性质和定理的内涵与外延。

典型例题解析 本部分收集了各种的经典题型,方便同学们多见多练。归纳出了“技巧总结”,便于同学举一反三。对每个解题的关键步骤加有旁注,对解题思路、方法适时提醒犹如名师在侧。

历届考研真题评析 通过对历年来考研试题中出现的一些典型例题进行详尽的阐述,旨在帮助同学们在以后的解题过程中举一反三,触类旁通。总结历年考生的备考经验,大多数人都做过大量的真题和典型例题——当然,做到后来就不必再中规中矩,只认题型想解法即可。

本章自测题 本书的各章自测题就是在同学们对各章内容有了全面了解之后,给同学们一个检测、巩固的机会,对各种题型有个深刻的了解,从而下笔如有神。同时,也使同学们对各个知识点有更为深刻的理解,达到以此类推,互为贯通。

根据读者的意见,我们对全国流行的经典教材——浙江大学《概率论与数理统计》第三版的习题作了相应的参考答案。由于本书和浙大的教材在知识点的编排上有所不同,为此,我们征求了策划者和作者的意见,认为宜保留本书原有的编排特色,把浙大的教材答案当作附录附在书后,供读者参考使用。

我们在书后附上了考研大纲“概率统计”各部分考点分析以及数学一真题。在考点分析中包括常考知识点,考试要求,还包括“概率统计”各部分在历年考题中所占的分数,为方便各类考生,按不同的数学种类单独列出。供各类考生各取所需。

本书用 60 克特制的防盗版纸印刷,双色排版,印装精美,内容精致。故称之为双博士精品系列。

双博士全体同仁非常感谢考生对双博士品牌的厚爱,并衷心希望广大考生对双博士图书内容和质量的改进提出具体意见,可以发电子邮件(shuangboshi@sina.com)进行交流指正。

双博士数学课题组

双博士奉献:

1. 本书封底均贴有数码防伪标识(由10位ID和6位PW组成),凭此ID和PW可登录双博士网校(www.bbdd.cc),免费获得30积分,享受相对应的黄金会员权限。凭此ID和PW还可以登录无敌学习网(www.5d.study.com),免费获得价值20元的充值金额。

考生在使用双博士系列丛书过程中遇到问题可登录双博士网校 www.bbdd.cc/bbs/ 我爱双博士下面留言提问,有问必答。

2. 全国有三分之一的大学生和考研考生正在使用双博士图书,本品牌图书已成为全国最大的大学教辅图书品牌及知名考研图书品牌。以上举措为双博士对全国大学生和考研学生的真情奉献!



来自北京大学研究生会的感谢信

双博士:

您好!

首先感谢您对北京大学“十佳教师”评选活动的热情支持和无私帮助!师恩难忘,北京大学“十佳教师”评选活动是北京大学研究生会的品牌活动之一,是北京大学所有在校研究生和本科生对恩师情谊的最朴素表达。双博士作为大学教学辅导及考研领域全国最大的图书品牌之一,不忘北大莘莘学子和传道授业的老师,其行为将永久的被北大师生感怀和铭记。

作为考研漫漫征途上的过来人,双博士曾陪伴我们度过无数个考研岁月的日日夜夜,曾带给我们无数个明示和启发,当然也带给我们今天的成功。

特致此信,向双博士表达我们内心长久以来的感激之情,并祝愿双博士事业蒸蒸日上。

北京大学研究生会

二零零二年十二月

目 录

第一章 随机事件及其概率	(1)
§ 1.1 事件的关系和运算	(1)
§ 1.2 事件的概率	(8)
§ 1.3 概率的计算	(15)
本章知识网络图	(29)
历届考研真题评析	(31)
同步自测题	(35)
同步自测题参考答案	(37)
第二章 随机变量及其分布	(51)
§ 2.1 随机变量的分布	(51)
§ 2.2 随机变量函数的分布	(75)
§ 2.3 几种重要的分布	(90)
本章知识网络图	(111)
历届考研真题评析	(112)
同步自测题	(121)
同步自测题参考答案	(125)
第三章 随机变量的数字特征	(142)
§ 3.1 随机变量的期望与方差	(142)
§ 3.2 随机变量函数的期望与方差	(167)
本章知识网络图	(180)
历届考研真题评析	(180)
同步自测题	(188)
同步自测题参考答案	(192)
第四章 多维随机变量	(204)
§ 4.1 多维随机变量及其函数的概率分布	(204)
§ 4.2 多维随机变量的数字特征	(243)
本章知识网络图	(264)
历届考研真题评析	(265)
同步自测题	(277)
同步自测题参考答案	(281)
第五章 大数定律和中心极限定理	(298)
§ 5.1 几种收敛性	(298)

目 录

§ 5.2 大数定律	(306)
§ 5.3 中心极限定理	(310)
本章知识网络图	(322)
历届考研真题评析	(322)
同步自测题	(325)
同步自测题参考答案	(328)
第六章 抽样分布	(337)
§ 6.1 样本均值的分布	(338)
§ 6.2 χ^2 -分布	(344)
§ 6.3 t -分布	(350)
§ 6.4 F -分布	(354)
本章知识网络图	(360)
历届考研真题评析	(361)
同步自测题	(365)
同步自测题参考答案	(367)
第七章 参数估计	(374)
§ 7.1 点估计	(374)
§ 7.2 区间估计	(384)
本章知识网络图	(395)
历届考研真题评析	(395)
同步自测题	(402)
同步自测题参考答案	(404)
第八章 假设检验	(412)
§ 8.1 正态总体参数的假设检验	(412)
§ 8.2 非参数检验	(425)
本章知识网络图	(435)
历届考研真题评析	(436)
同步自测题	(438)
同步自测题参考答案	(441)
第九章 回归分析	(451)
同步自测题	(477)
同步自测题参考答案	(481)

目 录

第十章 方差分析	(495)
本章知识网络图	(507)
同步自测题	(507)
同步自测题参考答案	(510)
附录一:浙大三版《概率论与数理统计》配套习题参考答案	(517)
第一章 概率论的基本概念	(517)
第二章 随机变量及其分布	(518)
第三章 多维随机变量及其分布	(520)
第四章 随机变量的数字特征	(525)
第五章 大数定律及中心极限定理	(526)
第六章 样本及抽样分布	(526)
第七章 参数估计	(526)
第八章 假设检验	(527)
第九章 方差分析及回归分析	(528)
第十章 随机过程的基本知识	(528)
第十一章 马尔可夫链	(529)
第十二章 平稳随机过程	(530)
附录二:2003 年硕士研究生入学考试理工数学(一)真题及参考答案	(535)
附录三:数学一适用专业、常考知识点、考试要求及考点分布	(555)
附录四:数学三适用专业、常考知识点、考试要求及考点分布	(560)
附录五:数学四适用专业、常考知识点、考试要求及考点分布	(565)

第一章

随机事件及其概率

在这一章里,我们首先复习随机事件及其概率,事件的关系和运算等基本概念,然后介绍几种常用的概率:古典概率、几何概率、条件概率和伯努利概型,最后学习一些计算概率的常用方法.通过复习,应掌握如何判别事件的概率的概型及如何利用概率的性质和有关公式来计算概率.

§ 1.1 事件的关系和运算

1.1.1 考试内容及理解记忆方法

1. 事件及几个基本概念的定义

事件及几个基本概念的定义见表 1-1

表 1-1 事件及几个基本概念的定义

名称	定 义	举例
随机试验	可以在相同的条件下重复进行,并且每次试验的结果事先不可预知的试验	掷一颗均匀的骰子,观察出现的点数是一个随机试验.试验的结果“点数是 3”是一个随机事件.而事件 $w_1 =$ “点数 1”, $w_2 =$ “点数 2”, $\dots$, $w_6 =$ “点数 6”是 6 个基本事件,事件 $B =$ “点数为奇数”是一个复合事件.“点数为 1 到 6 中的某一个”为必然事件;“点数为 7”是不可能事件
随机事件	在随机试验中,可能发生也可能不發生的事件,也简称为事件	
基本事件	仅含有一个样本点的随机事件(随机试验中每一种可能的试验结果称为一个样本点)	
复合事件	含两个或两个以上样本点的随机事件	
必然事件	必然会发生的事件	
不可能事件	试验中不可能发生的事件	

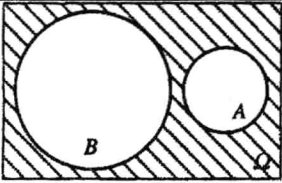
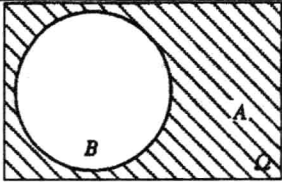
2. 事件的关系和运算

事件的关系和运算见表 1 - 2.

表 1 - 2 事件的关系和运算

名称	意义	文氏图	备注
事件的包含	如果事件 A 发生, 则事件 B 一定发生, 称事件 B 包含事件 A . 用 $B \supset A$ 或 $A \subset B$ 表示		注: $\emptyset \subset A \subset \Omega$ 总是成立的
事件的相等	如果 $A \subset B$ 且 $B \subset A$, 则称事件 A 与 B 相等. 用 $A = B$ 表示		
事件的和	“事件 A 与 B 中至少有一个发生”是一个事件, 称为事件 A 与 B 的和, 记为 $A + B$ 或 $A \cup B$		注: 事件 $A + B$ 发生是指仅 A 发生或者仅 B 发生或者 A 与 B 同时发生
事件的积	“事件 A 、 B 同时发生”是一个事件, 称为 A 与 B 的积. 记为 AB 或 $A \cap B$		注: 事件 AB 发生是指 A 发生且 B 也发生
事件的差	“事件 A 发生而 B 不发生”是一个事件. 称为 A 与 B 的差, 记作 $A - B$		注: $A - B$ 与 $B - A$ 是两个不同的事件

(续)

名称	意义	文氏图	备注
事件的互不相容(互斥)	如果事件 A 与 B 不能同时发生, 即 $AB = \emptyset$. 称 A 与 B 互不相容(或互斥)		注: A 与 B 互不相容只表示这两个事件不能同时发生, 但却允许它们同时都不发生
事件的对立	事件 A 与 B 不能同时发生, 但必须有一个发生, 即 A, B 满足 $AB = \emptyset$ 且 $A + B = \Omega$, 称 A 与 B 是对立的(或互逆的)事件, 记为 $\bar{A} = B$ 或 $\bar{B} = A$		注: 当 A 与 B 对立时, A 与 B 既不能同时发生, 但也不能同时不发生, 即 A 发生时, B 一定不发生, 而 A 不发生时, B 一定发生
完备事件组	如果事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 两两互不相容, 且 $A_1 + A_2 + \dots + A_n = \Omega$, 则称 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 构成一个完备事件组		

3. 同样记号在概率论与集合论中的对照

同种记号在概率论与集合论中的对照见表 1-3.

表 1-3 同种记号在概率论与集合论中的对照

记号	概率论	集合论
Ω	样本空间, 必然事件	全集
$\emptyset$	不可能事件	空集
ω	基本事件	元素
A	事件	子集
$A \subseteq B$	事件 A 发生, 则 B 一定发生	A 是 B 的子集
$A = B$	事件 A 和事件 B 是同一个事件	A 与 B 相等
$A \cup B (A + B)$	事件 A 与 B 中至少有一个发生	A 与 B 的并集(和集)
$A \cap B (AB)$	事件 A 与 B 同时发生	A 与 B 的交集
$A - B$	事件 A 发生, 而 B 不发生	A 与 B 的差集
$AB = \emptyset$	事件 A 与 B 不相容	A 与 B 的交集为空
$\bar{A}$	A 的对立事件	A 的补集

4. 关系运算的推广

关系运算的推广见表 1-4.

表 1-4 关系运算的推广

分配律: $A(B + C) = AB + AC$	交换律: $A + B = B + A, AB = BA$
摩根律(对偶律): $\overline{A + B} = \bar{A}\bar{B}, \overline{AB} = \bar{A} + \bar{B}$	结合律: $(A + B) + C = A + (B + C), (AB)C = A(BC)$
补元律: $A\bar{A} = \emptyset, A + \bar{A} = \Omega$	还原律: $\bar{\bar{A}} = A$
吸收律: 若 $A \subset B$, 则 $AB = A$, 且 $A + B = B$	分解律: 若 $A \subset B$, 则 $B = A + \bar{A}B$
蕴涵律: 若 $AB = \emptyset$, 则 $A \subset \bar{B}, B \subset \bar{A}$	排中律: $A \cup \bar{A} = \Omega$
矛盾律: $A \cap \bar{A} = \emptyset$	差积转换律: $A - B = A \cap \bar{B} = A - (A \cap B)$

1.1.2 典型例题解析

例1 设袋内有10个编号为1~10的球,从中任取一个,观察其号码

(1) 写出这个试验的样本空间.

(2) 若 A 表示“取得的球的号码是奇数”, B 表示“取得的球的号码是偶数”, C 表示“取得的球的号码小于5”,则

① $A+B$, ② AB , ③ $\bar{C}$, ④ $\overline{AC}$,

⑤ $\overline{B+C}$, ⑥ $\overline{BC}$, ⑦ $A-C$ 各表示什么事件?

(3) 事件 A 与 B 是否互不相容?

(4) AC 与 $\bar{AC}$ 是否互不相容?是否对立?

解 (1) 若用 w_i 表示“取得的球的号码为 i ”($i=1,2,\dots,10$),则这个试验的样本空间为 $\Omega = \{w_1, w_2, \dots, w_{10}\}$.

(2) ① $A+B$ 表示“取得的球的号码或者是奇数,或者是偶数”,它是必然事件,即 $A+B=\Omega$.

② AB 表示“取得的球的号码既是奇数又是偶数”,它是不可能事件,即 $AB=\emptyset$.

③ $\bar{C}$ 表示“取得的球的号码大于等于5”,即 $\bar{C} = \{w_5, w_6, \dots, w_{10}\}$.

④ $\overline{AC}$ 表示“取得的球的号码是大于5的偶数”,即 $\overline{AC} = \{w_6, w_8, w_{10}\}$.

⑤ $\overline{B+C}$ 表示“取得的球的号码不是偶数也不小于5”,也就是“取得的球的号码是大于等于5的奇数”,即 $\overline{B+C} = \overline{BC} = \{w_5, w_7, w_9\}$.

⑥ $\overline{BC}$ 表示“取得的球的号码不是小于5的偶数”,也就是“取得的球的号码是奇数或者大于等于5”,即 $\overline{BC} = \bar{B} + \bar{C} = \{w_1, w_3, w_5, w_6, w_7, w_8, w_9, w_{10}\}$.

⑦ $A-C$ 表示“取得的球的号码是奇数但不小于5”,也就是“取得的球的号码是大于等于5的奇数”,即 $A-C = \{w_5, w_7, w_9\}$.

(3) A 与 B 互不相容,因为取得的球的号码不会既是奇数又是偶数,即 $AB=\emptyset$.同时, $A+B=\Omega$,所以 A 与 B 是对立事件.

(4) 因为 $AC = \{w_1, w_3\}$, $\overline{AC} = \{w_6, w_8, w_{10}\}$ 所以 $(AC)(\overline{AC}) = \emptyset$,但 $AC + \overline{AC} = \{w_1, w_3, w_6, w_8, w_{10}\} \neq \Omega$,因而 AC 与 $\overline{AC}$ 互不相容,但不对立.

事件的包含、相等、互斥、对立等关系以及和、差、积等运算

例2 在计算机系学生中任选一名学生,设事件

A = “选出的学生是男生”;

B = “选出的学生是三年级学生”;

C = “选出的学生是科普队的”.

- (1) 叙述事件 ABC 的含义.
- (2) 在什么条件下, $ABC = C$ 成立?
- (3) 什么时候关系 $C \subseteq B$ 成立?

解 (1) 事件 AB 的含义是“选出的学生是三年级的男生”, 而事件 $\bar{C}$ 的含义是选出的学生不是科普队的, 所以 ABC 的含义是“选出的学生是三年级的男生不是科普队员”.

(2) 由于 $ABC \subseteq C$, 故 $ABC = C$ 的条件是: 当且仅当 $C \subseteq ABC$. 即当且仅当 $C \subseteq AB$, 即“科普队员都是三年级的男生”.

(3) 当科普队员全是三年级学生时, C 是 B 的子事件, 即 $C \subseteq B$ 成立.

例 3 用已知事件表达有关的其他事件

(1) “ A 发生, 而 B 与 C 都不发生” 可表为 $\overline{ABC}$ 或 $A(\overline{B \cup C})$;

(2) “ A, B, C 中恰有一个发生” 可表为 $\overline{ABC} \cup \overline{ABC} \cup \overline{ABC}$;

(3) “ A, B, C 中恰有两个发生” 可表为 $\overline{ABC} \cup \overline{ABC} \cup \overline{ABC}$ 或 $AB \cup BC \cup CA - ABC$;

(4) “ A, B, C 中不多于一个发生” 可表为 $\overline{ABC} \cup \overline{ABC} \cup \overline{ABC} \cup \overline{ABC}$ 或 $\overline{AB \cup BC \cup CA}$.

[技巧总结] 上面的表示法是根据事件的关系与运算, 以及事件的运算律得到的. 比如(1), 单个看, 是 A 发生, B 不发生, C 也不发生, 所以就是 $\overline{ABC}$; 把“ B, C 都不发生”一起看, 它的逆事件是“ B, C 中至少一个发生”, 即 $B \cup C$, 于是“ B, C 都不发生”就是 $\overline{B \cup C}$, 所以结果可以写成 $A(\overline{B \cup C})$.

例 4 设 A, B, C 为随机事件, 试证明下列各式:

$$(1) (A - AB) \cup B = A \cup B;$$

$$(2) (A \cup B) - B = A - AB = \overline{AB};$$

$$(3) (A \cup B) - AB = \overline{AB} \cup \overline{AB};$$

$$(4) A \cup (B - AB) \cup (C - AC) = A \cup B \cup C.$$

证明 (1) 方法一: 设 $w \in A \cup B$, 则

$$\begin{cases} \text{或 } w \in \overline{AB} \Rightarrow w \in A \text{ 同时 } w \in \overline{B} \Rightarrow w \in (A - AB) \Rightarrow w \in (A - AB) \\ \text{或 } w \in \overline{AB} \Rightarrow w \in B \text{ 同时 } w \in \overline{A} \Rightarrow w \in B \\ \text{或 } w \in AB \Rightarrow w \in B \end{cases}$$

于是 $w \in (A - AB) \cup B$ 故

$$(A - AB) \cup B \supset A \cup B$$

另一方面, 有 $(A - AB) \subset A \subset A \cup B$. 于是

$$(A - AB) \cup B \subset A \cup B$$

$$(A - AB) \cup B = A \cup B$$

故

方法二: 设 $A \cup B$ 发生, 则 A, B 至少有一个发生, 那么有下面三种情况:

① A 发生而 B 不发生 $\Rightarrow A$ 发生而 AB 不发生 $\Rightarrow A - AB$ 发生 $\Rightarrow (A - AB) \cup B$ 发

根据分配律、交换律、结合律等, 同一事件组合可以有多种不同的表示方法

生;

② A 不发生而 B 发生 $\Rightarrow (A - AB) \cup B$ 发生;

③ A, B 都发生 $\Rightarrow (A - AB) \cup B$ 发生.

因此不论哪种情况,总有 $(A - AB) \cup B$ 发生,即有

$$(A - AB) \cup B \supset A \cup B$$

另一方面,由方法一知, $(A - AB) \cup B \subset A \cup B$, 由于“ $\subset$ ”及“ $\supset$ ”同时成立,故(1)得证.

方法三:注意到 $A - B = A\bar{B}$, 于是

$$\begin{aligned}(A - AB) \cup B &= (A\bar{A}\bar{B}) \cup B = [A(\bar{A} \cup \bar{B})] \cup B \\&= (A\bar{A} \cup A\bar{B}) \cup B \\&= (A\bar{B}) \cup B = A \cup B\end{aligned}$$

方法四:由于 $A - AB$ 表示 A 发生而 A, B 不同时发生,即 A 发生 B 不发生,故 $(A - AB) \cup B$ 表示 A 与 B 至少有一个发生,这等价于事件 $A \cup B$ 发生. 故 $(A - AB) \cup B = A \cup B$.

(2) 由于

$$\begin{aligned}(A \cup B) - B &= (A \cup B)\bar{B} = A\bar{B} \cup B\bar{B} = A\bar{B} \\A - AB &= A\bar{A}\bar{B} = A(\bar{A} \cup \bar{B}) = A\bar{A} \cup A\bar{B} = A\bar{B} \\(A \cup B) - B &= A - AB = A\bar{B}\end{aligned}$$

而
故

(3) 由于

$$\begin{aligned}(A \cup B) - AB &= (A \cup B)(\overline{AB}) = (A \cup B)(\bar{A} \cup \bar{B}) \\&= [(A \cup B)\bar{A}] \cup [(A \cup B)\bar{B}] = \bar{A}B \cup A\bar{B} \\(A \cup B) - AB &= \bar{A}B \cup A\bar{B}\end{aligned}$$

故

(4) 由于

$$\begin{aligned}A \cup (B - AB) \cup (C - AC) &= A \cup (B\bar{A}\bar{B}) \cup (C\bar{A}\bar{C}) \\&= A \cup [B(\bar{A} \cup \bar{B})] \cup [C(\bar{A} \cup \bar{C})] \\&= A \cup (B\bar{A}) \cup (C\bar{A}) = \underline{(A \cup B) \cup (C\bar{A})} \\&= \underline{[(A \cup B) \cup C] \cap [(A \cup B) \cup \bar{A}]} \\&= (A \cup B \cup C) \cap \Omega = A \cup B \cup C \\A \cup (B - AB) \cup (C - AC) &= A \cup B \cup C\end{aligned}$$

故

使用差积转换律

$$A - B = A\bar{B}$$

以及摩根律 $\overline{AB} = \bar{A} + \bar{B}$

1.1.3 小结

在本节中,我们详细给出了事件及其相关的概念,事件的关系和运算的定义和运算律.在例题中,给出了如何求试验的样本空间,如何用已知事件的关系来表

示其他事件,及事件之间关系的演算.

§ 1.2 事件的概率

1.2.1 考试内容及理解记忆方法

1. 概率的定义

(1) 概率的统计定义

如果在 n 次重复试验中事件 A 发生了 m 次,当 n 逐渐增大时,比值 $\frac{m}{n}$ 稳定地在某一常数 p 附近摆动,且 n 越大,摆动幅度越小. 则称此常数 p 为事件 A 的概率,记为 $P(A)$.

[技巧总结] 比值 $\frac{m}{n}$ 称作 n 次试验中 A 发生的频率,必须进行 n 次试验才能计算事件 A 发生的频率;而事件 A 的概率 $P(A)$ 是事件 A 在一次试验中发生的可能性的.

(2) 概率的古典定义

若试验结果一共有 n 个基本事件 $w_1, w_2, \dots, w_n$, 且每次试验中各基本事件出现的可能性完全相同,而事件 A 由其中 m 个事件 $w_{i_1}, w_{i_2}, \dots, w_{i_m} (m \leq n)$ 组成,则事件 A 的概率 $P(A) = \frac{m}{n}$.

[技巧总结] 概率的古典定义要求试验具有两个特点:试验的样本空间的样本点的有限性和每次试验中各基本事件 $w_1, w_2, \dots, w_n$ 出现的等可能性. 我们称具有上述两个特点的试验为古典试验,建立在古典试验上的数学模型为古典概型.

(3) 概率的公理化定义

设 E 是随机试验, Ω 是它的样本空间,对于 E 的每一事件 A 赋予一个实数,记作 $P(A)$,称为事件 A 的概率. 如果集合函数 $P(\cdot)$ 满足下列条件:

1° 非负性 对于每一个事件 A , 有 $P(A) \geq 0$;

2° 规范性 $P(\Omega) = 1$;

3° 可列可加性 设 $A_1, A_2, \dots$, 是两两互不相容的事件, 即 $i \neq j$ 时, $A_i A_j = \emptyset$, $i, j = 1, 2, \dots$, 则有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots$$

2. 概率的性质

给定概率空间 (Ω, P) , 可推出概率的下列性质:

(1) $P(\emptyset) = 0$ 即不可能事件的概率等于 0.

(2) 有限可加性 若 n 个事件 $A_1, \dots, A_n$ 满足 $A_i \cap A_j = \emptyset (i \neq j)$, 则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

(3) 逆事件的概率 $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

(4) 单调性 设 A, B 是两个事件, 且 $A \subset B$, 则 $P(A) \leq P(B)$, 且

$$P(B - A) = P(B) - P(A)$$

(5) 连续性 设事件列 $A_1, A_2, \dots$, 满足 $A_1 \supset A_2 \supset \dots$, 且 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P(A)$$

(6) 加法定理 若 A, B 是任意两个事件, 则

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

一般地, 设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是 n 个事件, 则

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &= \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i A_j A_k) + \dots + \\ &\quad (-1)^{s-1} \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_s \leq n} P(A_{j_1} A_{j_2} \dots A_{j_s}) + \dots \\ &\quad + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \dots A_n) \end{aligned}$$

1.2.2 典型例题解析

例1 掷二枚骰子, 求事件 A 为出现的点数之和等于3的概率.

解法一 掷两枚骰子出现的点数之和的可能数值为 $\{2, 3, 4, 5, \dots, 12\}$, 事件 A 的结果只有3, 故 $P(A) = \frac{1}{11}$.

解法二 掷两枚骰子可能出现的情况:

$(1, 1), (1, 2), \dots, (1, 6), (2, 1), (2, 2), \dots, (2, 6), \dots, (6, 1), (6, 2), \dots, (6, 6)$ 基本事件总数 $6 \times 6 = 36$. 在这些结果中, 事件 A 只有两种结果: $(1, 2), (2, 1)$, 故

$$P(A) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

在求古典概型的题目时, 关键在于数清样本空间中全部的样本点数, 不能多也不能少

从上述两种解法中, 不难发现解法一错误. 错因在于公式

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

仅当所述的试验结果是等可能性时才成立. 而取数值2和3不是等可能的, 2只有情况 $(1, 1)$ 才出现, 而3有两种情况 $(1, 2), (2, 1)$, 其他情况可以类推.

例2 某产品100件, 其中3件次品, 现从中抽取3件(不放回抽样), 求下列事件的概率: