数学·统计学系列

Methods of Partition, Decreasing Dimension, Decreasing Degree and Readable Proof to Inequalities

不等式的分拆降维降幂方法与可读证明

陈胜利 著

哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

数学·统计学系列

不等式的分拆降维降幂方法与可读证明

Methods of Partition, Decreasing Dimension, Decreasing Degree and Readable Proof to Inequalities

陈胜利 著

HITP
哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书系统总结了作者及其合作者近十年来在不等式数学机械化领域的一系列研究成果及其软件(SCHUR01)实现. SCHUR01 是基于作者提出的"分拆-降维-降幂-综合"等算法原理而开发的具有自动发现功能的新颖的不等式证明软件,适用于一般代数式乃至任意维数、任意次数的多项式的半正定判定及最优化问题. SCHUR01 对于对称式尤为高效,并且从整体上是可读的. 把本书与 SCHUR01 结合起来阅读使用可使读者对于不等式的机器证明过程及其理论依据有更为深入的理解.

图书在版编目(CIP)数据

不等式的分拆降维降幂方法与可读证明/陈胜利著.
—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2016.1
ISBN 978 - 7 - 5603 - 5797 3

Ⅰ.①不… Ⅱ.①陈… Ⅲ.①不等式-计算机辅助计算 Ⅳ.①O178

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 003950 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 李 欣
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451 - 86414749
网 址 http://hitpress. hit. edu. cn
印 刷 哈尔滨市工大节能印刷厂
开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 30 字数 689 千字
版 次 2016 年 1 月第 1 版 2016 年 1 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978 - 7 - 5603 - 5797 - 3
定 价 68.00 元

Abstract

This book aims to systematically introduce a series of works by the author and his collaborators in the field of inequality-proving mechanization during the past ten years. Realization of these ideas in a self-developed software SCHUR01 is also demonstrated. SCHUR01 is built upon the principle and algorithm of "partition–decreasing-dimension–decreasing-degree–synthesis" as proposed by the author and has the ability of automatic discovery. It is applicable for determining the positive semi-definiteness of a general algebraic expression, even polynomials with arbitrary dimension and arbitrary degree, as well as optimization problems. It can be implemented with great efficiency and speed especially for symmetric inequalities and the proving processes are in general readable. Reading the book combined with the software SCHUR01 can significantly improve the readers' understanding of the mechanical proving processes of inequalities and the underlying theoretical basis.

前　言

恩格斯曾经指出,枪炮的出现消除了体力上的差别,使中世纪的骑士阶级从此销声匿迹,为欧洲从封建时代进入到资本主义时代准备了条件.近年有些计算机科学家指出,个人用计算机的出现，其冲击作用可与枪炮的出现相比.枪炮使人们在体力上难分强弱,而个人用计算机将使人们在智力上难分聪明愚鲁.又有人对数学的未来提出看法,认为计算机的出现,将使数学现在一张纸一只笔的方法,在历史的长河中,无异于石器时代的手工方法.今天的数学家们,不得不面对计算机的挑战,但是,也不必妄自菲薄.大量繁复的事情交给计算机去做了,人脑将仍然从事富有创造性的劳动.

——摘自吴文俊《数学机械化》一书

谨以此书献给我国著名的计算机科学家,不等式机械化证明的开拓者,高效通用的**BOTTEMA**机器证明软件的研创者杨路教授.是他的谆谆教诲和殷切期望使一个中学教师有勇气踏入吴文俊院士开创的数学机械化这个神圣的科学殿堂，并在杨路老师及其众多弟子(在册与不在册的学生及学生的学生们如姚勇先生,黄方剑、徐嘉、陈良育、吴文渊、李轶、季建议、陈长波、陈经纬博士,张矩、冯勇研究员, 冷岗松、郁文生、张晗方教授,杨学枝、吴欲东老师)的宝贵帮助下，日积月累，最终写完了这一拙劣之作.感谢曾广兴教授对第一章第六节提出了宝贵的修改意见.感谢中科院成都计算机应用研究所,中科院重庆绿色智能技术研究院,华东师范大学软件学院,上海大学数学系等单位在我合作访问期间所给予的热情款待.尤其要感谢哈尔滨工业大学出版社的刘培杰副社长及张永芹和李欣编辑老师的鼎力支持,是他们卓有成效的辛勤劳动使此书得以在如此短的时间内与不等式及其机器证明爱好者见面,并希望能在自己的有生之年通过读者之声及时修正书中一定存在着的诸多错误与bug.

陈胜利

2015年11月14日

目　录(Contents)

第1章 预备知识

先给出几个常用记号:$\mathbb{N}_+$是正整数集;$\mathbb{N}$ 是非负整数集;$\mathbb{Z}$是整数集;$\mathbb{C}$是复数集;$\mathbb{R}$ 是实数集,$\mathbb{R}_+$是非负实数集;$\mathbb{R}_{++}$是正实数集; $\mathbb{X}^n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的一个非空子集.若$\mathbb{A}$为一个集合,则$|\mathbb{A}|$表示$\mathbb{A}$中元素的个数.

1.1 型与多项式

下面我们记

$$\Lambda_{n,m} = \{\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, \cdots, p_n) \in \mathbb{N}^n : p_1 + p_2 + \cdots + p_n = m\}$$

定义1.1.1(型) 称函数$h : \mathbb{X}^n \to \mathbb{R}$是($\mathbb{X}^n$上的)实系数$n$元$m$次型,如果

$$h(\boldsymbol{x}) = \sum_{p \in \Lambda_{n,m}} \boldsymbol{a}_p \boldsymbol{x}^p$$

其中$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{X}^n$ 而$\boldsymbol{a}_p \in \mathbb{R}$是单项式$\boldsymbol{x}^p = x_1^{p_1} x_2^{p_2} \cdots x_n^{p_n}$的系数.

又记

$$\aleph_{n,m} = \{h : \mathbb{X}^n \to \mathbb{R} : h(\boldsymbol{x}) = \sum_{p \in \Lambda_{n,m}} \boldsymbol{a}_p \boldsymbol{x}^p\}$$

定义1.1.2(多项式) 称函数$f : \mathbb{X}^n \to \mathbb{R}$是($\mathbb{X}^n$上的)实系数$n$元$m$次多项式,如果

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=0}^{m} h_i(\boldsymbol{x})$$

其中$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{X}^n$而$h_i \in \aleph_{n,i}, i = 0, 1, \cdots, m$.

可见,多项式是若干个型之和,而型是多项式的特例.因此,型也叫作齐次多项式.注意到$\Lambda_{n,m}$ 中元素的个数为

$$\rho(n, m) = \binom{n+m-1}{m}$$

于是有下面的:

命题1.1.1(型的表示) 对任意的$h \in \aleph_{n,m}$,必存在$\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}^{\rho(n,m)}, \boldsymbol{g} \in \mathbb{R}^{\rho(n,m)}$, 使得

$$h(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{g}'\boldsymbol{x}$$

这里$\boldsymbol{g}'$是$\boldsymbol{g}$的转置向量.

1.2 对称多项式及其表示

定义1.2.1(对称性) 称$\mathbb{X}^n$上的多项式$f(\boldsymbol{x})$为对称的,如果

$$f(\sigma(\boldsymbol{x}))=f(\boldsymbol{x})(\forall\sigma\in S_n)$$

这里S_n是n个文字的全体对称置换群(下同).

对称的齐次多项式简称为**对称型**.实系数n元m次对称型的全体所成的集合记为$S_{n,m}$.在通常的加法与数乘下$S_{n,m}$形成实向量空间,其维数记为$\dim(S_{n,m})$.

记

$$[a_1,a_2,\cdots,a_n]=\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_n^{a_n}$$

$(a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbb{N}$,下同),式中的求和号取遍$S_n$中的所有置换.由对称性不妨设

$$a_1\geq a_2\geq\cdots\geq a_n$$

于是存在$t_1,t_2,\cdots,t_n\in\mathbb{N}$,使得

$$\begin{cases}a_1=t_1+t_2+\cdots+t_n\\ a_2=t_2+t_3+\cdots+t_n\\ \qquad\vdots\\ a_n=t_n\end{cases}$$

若记不定方程

$$t_1+2t_2+\cdots+nt_n=m$$

的非负整数解集为$\Omega_{n,m}$,则满足

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=m,a_1\geq a_2\geq\cdots\geq a_n$$

的单项式$x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_m^{a_m}$的数目恰为$|\Omega_{n,m}|$.于是有

定理1.2.1 实向量空间$S_{n,m}$的一组基为

$$B_{n,m}=\{[a_1,a_2,\cdots,a_n]|a_1+a_2+\cdots+a_n=m,a_1\geq a_2\geq\cdots\geq a_n\}$$

其维数

$$\dim(S_{n,m})=|\Omega_{n,m}|$$

我们已经看到$\dim(S_{n,m})$等于整数m分拆为n个非负整数的无序分拆数,可以用如下的生成函数来计算

$$\sum_{m=0}^{+\infty}\dim(S_{n,m})x^m=\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^n)}$$

(这里规定$\dim(S_{n,0})=1$).

例1.2.1 (1)键入

$> f := n- > 1/product(1-x^i, i=1..n); > taylor(f(3), x=0..11);$

输出

$1+1*x+2*x^2+3*x^3+4*x^4+5*x^5+7*x^6+8*x^7+10*x^8+12*x^9+14*x^{10}+O(x^{11})$

从而可知$\dim(S_{3,1}),\dim(S_{3,2}),\cdots,\dim(S_{3,10})$分别为$1,2,\cdots,14$.

(2)键入

$> d := m- > 1/72*(6*m^2+36*m+47+9*(-1)^m+16*\cos(2*m*pi/3)):$

$> simplify(subs(\cos(2/3*pi)=-1/2, sum(d(m)*x^m, m=0..infinity))$

$-1/product(1-x^i, i=1..3));$

输出0.从而可知

$$\dim(S_{3,m})=\frac{6m^2+36m+47+9(-1)^m+16\cos\frac{2m\pi}{3}}{72}$$

.

利用上面的方法容易得到

表 1: $\dim(S_{n,m})$的部分值

n/m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6
3	1	2	3	4	5	7	8	10	12	14
4	1	2	3	5	6	9	11	15	18	23
5	1	2	3	5	7	10	13	18	23	30
6	1	2	3	5	7	11	14	20	26	35
7	1	2	3	5	7	11	15	21	28	38
8	1	2	3	5	7	11	15	22	29	40
9	1	2	3	5	7	11	15	22	30	41
10	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42

定义1.2.2(Newton幂和) 对 $k\in\mathbb{N}, \boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ 的 k 次Newton幂和(又称等幂和)定义为

$$S_k=S_k(n)=S_k(x_1,\cdots,x_n)=\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^k, k\neq 0\\ n, k=0\end{cases}$$

定理1.2.2(对称型基本定理) 对称型$f \in S_{n,m}(n,m \in \mathbb{N}_+$,下同)可唯一的表示为Newton幂和

$$S_1(n), S_2(n), \cdots, S_d(n)$$

的多项式,这里$d=\min\{n,m\}$,并且$S_1(n), S_2(n), \cdots, S_d(n)$是代数无关的,即不存在非零多项式$g$,使得$g(S_1(n), S_2(n), \cdots, S_d(n))=0$.

定理1.2.3 集合$B_{n,m}=\{S_1(n)^{\lambda_1}S_2(n)^{\lambda_2}\cdots S_d(n)^{\lambda_d} | (\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_d)\in\Omega_{n,m}\}$是向量空间$S_{n,m}$的一组基,其中$d=\min\{m,n\}$.

例1.2.2 (1)向量空间$S_{n,4}(n\ge 2)$的一组基

$$\begin{aligned}
&B_{2,4}=\{S_4(2), S_3(2)S_1(2), S_2(2)^2\}, n=2\\
&B_{3,4}=\{S_4(3), S_3(3)S_1(3), S_2(3)^2, S_2(3)S_1(3)^2\}, n=3\\
&B_{n,4}=\{S_4(n), S_3(n)S_1(n), S_2(n)^2, S_2(n)S_1(n)^2, S_1(n)^4\}, n\ge 4
\end{aligned}$$

(2)向量空间$S_{n,5}(n\ge 2)$的一组基

$$\begin{aligned}
&B_{2,5}=\{S_5(2), S_4(2)S_1(2), S_3(2)S_2(2)\}, n=2\\
&B_{3,5}=\{S_5(3), S_4(3)S_1(3), S_3(3)S_2(3), S_3(3)S_1(3)^2, S_2(3)^2S_1(3)\}, n=3\\
&B_{4,5}=\{S_5(4), S_4(4)S_1(4), S_3(4)S_2(4), S_3(4)S_1(4)^2, S_2(4)^2S_1(4), S_2(4)S_1(4)^3\},\\
&\qquad n=4\\
&B_{n,5}=\{S_5, S_4S_1, S_3S_2, S_3S_1^2, S_2^2S_1, S_2S_1^3, S_1^5\}, n\ge 5
\end{aligned}$$

定义1.2.3(初等对称多项式) 记

$$\sigma_k=\sigma_k(n)=\sum_{1\le j_1<j_2<\cdots<j_k\le n} x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_k}$$

并称之为k阶初等对称多项式.显然有$1\le k\le n$.

定理1.2.4(对称多项式基本定理) 任意n元对称多项式都可唯一的表示为n个初等对称多项式$\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n$ 的多项式.

定理1.2.5(Newton公式) Newton幂和$S_1,S_2,\cdots,S_k$与初等对称多项式$\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n$之间有如下关系式(Newton公式)

$$\begin{aligned}
&S_k-S_{k-1}\sigma_1+S_{k-2}\sigma_2-\cdots+(-1)^{k-1}S_1\sigma_{k-1}+(-1)^k k\sigma_k=0, k\le n\\
&S_k-S_{k-1}\sigma_1+S_{k-2}\sigma_2-\cdots+(-1)^n S_{k-n}\sigma_n=0, k>n
\end{aligned}$$

定理1.2.6(多项式定理) 对任意的$n,m\in\mathbb{N}_+$, 有

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)^m=\sum_{i_1+i_2+\cdots+i_n=m}\frac{m!}{i_1!i_2!\cdots i_n!}x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n}$$

定义1.2.4(判别点集[50]) 如果$f, g \in R[x_1, x_2, \cdots, x_n]$之间有关系$f \Diamond g$当且仅当在点集$\Phi \subseteq R^n$上$f \Diamond g$成立,则称$\Phi$是$f, g$之间具有关系$f \Diamond g$的判别点集.其中$\Diamond \in \{>, <, \geq, \leq, \neq, \equiv\}$.

命题1.2.1 n元3次对称型$f, g (n \geq 3)$在$\mathbb{R}^n$上恒等(即$f \equiv g$)的一个判别点集是

$$\Phi_{n,3} = \{t_0 = (1, 1, \cdots, 1), t_1 = (1, 0, \cdots, 0), t_2 = (1, 1, \cdots, 1, 0)\}$$

证 充分性:据定理1.2.3知,具有零点t_0的$n(n \geq 3)$元3次对称型常可表为$n^2 S_3(n) - S_1(n)^3, nS_3(n) - S_1(n)S_2(n)$的线性组合,于是由$f(t_0) - g(t_0) = 0$可令

$$f - g = a_1(n^2 S_3(n) - S_1(n)^3) + a_2(nS_3(n) - S_1(n)S_2(n)), a_1, a_2 \in \mathbb{R}$$

则有

$$\begin{pmatrix} n^2 - 1 & n - 1 \\ 2n^2 - 3n + 1 & n - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t_1) - g(t_1) \\ f(t_2) - g(t_2) \end{pmatrix}$$

其中$f(t_1) - g(t_1) = f(t_2) - g(t_2) = 0$,且

$$\begin{vmatrix} n^2 - 1 & n - 1 \\ 2n^2 - 3n + 1 & n - 1 \end{vmatrix} = -(n-2)(n-1)^2 \neq 0$$

可见$a_1 = a_2 = 0$,即$f = g$.充分性得证.必要性显然.

命题1.2.2 记$\Phi_{n,m}$为n元m次$(n \geq m)$对称型f, g在$\mathbb{R}^n$上恒等的一个判别点集,则可取

$$\begin{aligned}
&\Phi_{n,4} = \{t_0 = (1, 1, \cdots, 1), t_1 = (1, 0, \cdots, 0), t_2 = (1, 1, 0, \cdots, 0), \\
&t_3 = (1, \cdots, 1, 0), t_4 = (2, 1, 0, \cdots, 0)\}; \\
&\Phi_{n,5} = \{t_0 = (1, 1, \cdots, 1), t_1 = (1, 0, \cdots, 0), t_2 = (1, 1, 0, \cdots, 0), \\
&t_3 = (1, 1, 1, 0, \cdots, 0), t_4 = (1, \cdots, 1, 0), t_5 = (2, 1, 0, \cdots, 0), \\
&t_6 = (2, 1, 1, 0, \cdots, 0)\}; \\
&\Phi_{n,6} = \{t_0 = (1, 1, \cdots, 1), t_1 = (1, 0, \cdots, 0), t_2 = (1, 1, 0, \cdots, 0), \\
&t_3 = (1, 1, 1, 0, \cdots, 0), t_4 = (1, \cdots, 1, 0), t_5 = (2, 1, 0, \cdots, 0), \\
&t_6 = (2, 1, 1, 0, \cdots, 0), t_7 = (2, 1, 1, 1, 0, \cdots, 0), t_8 = (2, 1, 1, 1, 1, 0, \cdots, 0), \\
&t_9 = (3, 1, 0, \cdots, 0), t_{10} = (3, 1, 1, 0, \cdots, 0)\}; \\
&\Phi_{n,7} = \{t_0 = (1, 1, \cdots, 1), t_1 = (1, 0, \cdots, 0), t_2 = (1, 1, 0, \cdots, 0), \\
&t_3 = (1, 1, 1, 0, \cdots, 0), t_4 = (1, 1, 1, 1, 0, \cdots, 0), t_5 = (1, \cdots, 1, 0), \\
&t_6 = (2, 1, 0, \cdots, 0), t_7 = (2, 1, 1, 0, \cdots, 0), t_8 = (2, 1, 1, 1, 0, \cdots, 0), \\
&t_9 = (2, 1, 1, 1, 1, 0, \cdots, 0), t_{10} = (2, 1, 1, 1, 1, 1, 0, \cdots, 0), \\
&t_{11} = (3, 1, 0, \cdots, 0), t_{12} = (3, 1, 1, 0, \cdots, 0), \\
&t_{13} = (3, 1, 1, 1, 0, \cdots, 0), t_{14} = (4, 1, 1, 0, \cdots, 0)\};
\end{aligned}$$

$\Phi_{n,8} = \{t_0 = (1,1,\cdots,1), t_1 = (1,0,\cdots,0), t_2 = (1,1,0,\cdots,0),$

$t_3 = (1,1,1,0,\cdots,0), t_4 = (1,1,1,1,0,\cdots,0), t_5 = (1,\cdots,1,0),$

$t_6 = (2,1,0,\cdots,0), t_7 = (2,1,1,0,\cdots,0), t_8 = (2,1,1,1,0,\cdots,0),$

$t_9 = (2,1,1,1,1,0,\cdots,0), t_{10} = (2,1,1,1,1,1,0,\cdots,0),$

$t_{11} = (2,1,1,1,1,1,1,0,\cdots,0), t_{12} = (2,1,1,1,1,1,1,1,0,\cdots,0),$

$t_{13} = (3,1,0,\cdots,0), t_{14} = (3,1,1,0,\cdots,0), t_{15} = (3,1,1,1,0,\cdots,0),$

$t_{16} = (4,1,1,0,\cdots,0), t_{17} = (4,1,1,1,0,\cdots,0),$

$t_{18} = (5,1,0,\cdots,0), t_{19} = (5,1,1,0,\cdots,0),$

$t_{20} = (3,2,1,1,0,\cdots,0), t_{21} = (3,2,1,1,1,0,\cdots,0)\};$

$\Phi_{n,9} = \{t_0 = (1,1,\cdots,1), t_1 = (1,0,\cdots,0), t_2 = (1,1,0,\cdots,0),$

$t_3 = (1,1,1,0,\cdots,0), t_4 = (1,1,1,1,0,\cdots,0), t_5 = (1,1,1,1,1,0,\cdots,0),$

$t_6 = (1,\cdots,1,0), t_7 = (2,1,0,\cdots,0)\}, t_8 = (2,1,1,0,\cdots,0),$

$t_9 = (2,1,1,1,0,\cdots,0), t_{10} = (2,1,1,1,1,0,\cdots,0),$

$t_{11} = (2,1,1,1,1,1,0,\cdots,0), t_{12} = (2,1,1,1,1,1,1,0,\cdots,0),$

$t_{13} = (2,1,1,1,1,1,1,1,0,\cdots,0), t_{14} = (2,1,1,1,1,1,1,1,0,\cdots,0),$

$t_{15} = (3,1,0,\cdots,0), t_{16} = (3,1,1,0,\cdots,0), t_{17} = (3,1,1,1,0,\cdots,0),$

$t_{18} = (3,1,1,1,1,0,\cdots,0), t_{19} = (3,1,1,1,1,1,0,\cdots,0),$

$t_{20} = (4,1,1,0,\cdots,0), t_{21} = (4,1,1,1,0,\cdots,0),$

$t_{22} = (4,1,1,1,1,0,\cdots,0), t_{23} = (5,1,0,\cdots,0), t_{24} = (5,1,1,0,\cdots,0),$

$t_{25} = (5,1,1,1,0,\cdots,0), t_{26} = (3,2,1,0,\cdots,0), t_{27} = (3,2,1,1,0,\cdots,0),$

$t_{28} = (3,2,1,1,1,0,\cdots,0), t_{29} = (4,3,2,1,1,0,\cdots,0)\};$

$\Phi_{n,10} = \{t_0 = (1,1,\cdots,1), t_1 = (1,0,\cdots,0), t_2 = (1,1,0,\cdots,0),$

$t_3 = (1,1,1,0,\cdots,0), t_4 = (1,1,1,1,0,\cdots,0), t_5 = (1,1,1,1,1,0,\cdots,0),$

$t_6 = (1,\cdots,1,0), t_7 = (2,1,0,\cdots,0)\}, t_8 = (2,1,1,0,\cdots,0),$

$t_9 = (2,1,1,1,0,\cdots,0), t_{10} = (2,1,1,1,1,0,\cdots,0), t_{11} = (2,1,1,1,1,1,0,\cdots,0),$

$t_{12} = (2,1,1,1,1,1,1,0,\cdots,0), t_{13} = (2,1,1,1,1,1,1,1,0,\cdots,0),$

$t_{14} = (2,1,1,1,1,1,1,1,1,0,\cdots,0), t_{15} = (2,1,1,1,1,1,1,1,1,1,0,\cdots,0),$

$t_{16} = (3,1,0,\cdots,0), t_{17} = (3,1,1,0,\cdots,0), t_{18} = (3,1,1,1,0,\cdots,0),$

$t_{19} = (3,1,1,1,1,0,\cdots,0), t_{20} = (3,1,1,1,1,1,0,\cdots,0),$

$t_{21} = (3,1,1,1,1,1,1,0,\cdots,0), t_{22} = (3,1,1,1,1,1,1,1,0,\cdots,0),$

$t_{23} = (4,1,0,\cdots,0), t_{24} = (4,1,1,0,\cdots,0), t_{25} = (4,1,1,1,0,\cdots,0),$

$t_{26} = (4,1,1,1,1,0,\cdots,0), t_{27} = (4,1,1,1,1,1,0,\cdots,0), t_{28} = (5,1,1,0,\cdots,0),$

$t_{29} = (5,1,1,1,0,\cdots,0), t_{30} = (6,1,0,\cdots,0), t_{31} = (6,1,1,0,\cdots,0),$

$t_{32} = (6,1,1,1,0,\cdots,0)$, $t_{33} = (6,1,1,1,1,0,\cdots,0)$, $t_{34} = (3,2,1,0,\cdots,0)$,

$t_{35} = (3,2,1,1,0,\cdots,0)$, $t_{36} = (3,2,1,1,1,0,\cdots,0)$, $t_{37} = (3,2,1,1,1,1,0,\cdots,0)$,

$t_{38} = (4,3,2,1,0,\cdots,0)$, $t_{39} = (4,3,2,1,1,0,\cdots,0)$,

$t_{40} = (5,4,3,2,0,\cdots,0)$, $t_{41} = (5,4,3,2,1,0,\cdots,0)\}$

注 1.2.1 以上命题可按命题1.2.1的方法类似地加以证明.另外,在**Schur**程序包里,指令**dispoints** 可以求出n元m次($n \geq m, m = 3,4,\cdots,10$)对称型$f,g$在$\mathbb{R}^n$上恒等的一个判别点集.例如键入

$> dispoints(4)$; 或$> dispoints(mdisp(4),4)$;
即输出n元4次型的一个判别点集

$\Phi[n,4] = [[1,0,0,0,0..0],[1,1,0,0,0..0],[2,1,0,0,0..0],[1,1..1],[1,1..1,0]]$

顺便指出,若输入

$> dispoints([[1,0,0,0],[1,1,0,0],[1,1,1,0]],4)$;
便输出n元4次型的另一个判别点集

$\Phi[n,4] = [[1,0,0,0,0..0],[1,1,0,0,0..0],[1,1,1,0,0..0],[1,1..1],[1,1..1,0]]$

但输入

$> dispoints([[1,2,0,0],[2,1,0,0],[1,1,1,0]],4)$;
则输出**0**.这里0的意义是

$$[[1,2,0,0,0..0],[2,1,0,0,0..0],[1,1,1,0,0..0],[1,1..1],[1,1..1,0]]$$

并不是n元4次型的一个判别点集.

例1.2.3 证明:

$$(1)24x_1x_2x_3x_4 = 3S_1(4)^4 - 6S_2(4)S_1(4)^2 + 8S_3(4)S_1(4) + S_2(4)^2 - 6S_4(4)$$

$$(2)\sum_{1\leq i<j\leq n}(x_i-x_j)^4 = nS_4(n) - 4S_1(n)S_3(n) + 3S_2(n)^2 (n\geq 2)$$

$$(3)n(S_2(n)S_4(n) - S_3(n)^2) - S_1(n)^2S_4(n) + 2S_1(n)S_2(n)S_3(n) - S_2(n)^3 = \sum_{1\leq i<j<k\leq n}(x_i-x_j)^2(x_j-x_k)^2(x_k-x_i)^2 (n\geq 3)$$

证 经计算知:当(x_1,x_2,x_3,x_4)依次取$\Phi_{4,4}$中的点,即

$$(x_1,x_2,x_3,x_4) = (1,1,1,1),(1,0,0,0),(1,1,0,0),(1,1,1,0),(2,1,0,0)$$