自学进修参考用书

逻辑代数

王振灿 编

浙江教育学院

说　明

这本书围绕现行中学有关教材，主要介绍逻辑代数基本知识，附带介绍二进制记数法。为自学、进修和参考提供资料。内容力求深入浅出，通俗易懂，多举例子，便于自学。本书是参考有关资料和教学实践，在本校讲义的基础上编写成的，也从历届学员的结业文章中吸取了有益的见解。其中对某些问题的探讨，由于水平有限，错误和不妥之处，请批评指正。

杭州大学数学系计算数学教研室主任吴美朝讲师给以仔细审稿，並提出宝贵意见，在此表示感谢。

编　者

1983年5月

目　录

逻 辑 代 数

第五章　逻辑代数在逻辑设计上的应用

附、数的进位制

逻 辑 代 数

逻辑，在这里指的是思维的规律性。为了用数学运算的方法来描述思维规律，而把能够断定真假的语句看成命题，并给以记号，规定命题与命题之间关系的运算符号和法则，便将逻辑思考反映成命题运算。逻辑代数就是研究命题运算规律的代数学，研究的对象是命题，它在开关电路上的应用被称作开关代数。逻辑代数和开关代数、集合代数是同构的，都是布尔代数的具体模型，是电子计算机等自动装置的逻辑设计的数学工具。

第一章 逻辑运算及逻辑式的公式化简法

§1.1 基本逻辑运算的概念

1．命题和命题运算

【命题】具有判断性的语句叫做命题。一个命题或者成立，或者不成立，但不可能又成立，又不成立。成立的命题叫做真命题，不成立的命题叫做假命题。一个命题，在任何时刻，或真或假，必居其一，在同一时刻，或真或假，又只居其一，不真不假的句子不是命题；无所谓真假的句子也不是命题。在同一时刻又真又假的判断是逻辑不容许的，但此时此地为真，彼时彼地为假，则是允许的。

一个命题是真命题，我们就说这个命题的真假值（简称

真值）等于1；一个命题是假命题，我们就说这个命题的真值等于0。1和0称为命题常量，也称逻辑定元（简称定元）。这里的“1”和“0”不是数1和数0，而是两个对立的符号。例如

命题“$2+3=5$”成立，它是真命题，它的真值等于1；

命题“$2+3>5$”不成立，它是假命题，它的真值等于0。

含有未知数的命题，象“$x+3=5$”，当$x=2$时成立，这时，它是真命题，它的真值等于1；当$x\neq 2$时，不成立，这时，它是假命题，它的真值等于0。

命题用大写字母A、B、C，……来表示，这些字母称为命题变量，也称逻辑变元（简称变元）。例如，

A表示“对顶角相等”，则$A=1$；

B表示“负数有对数”，则$B=0$；

C表示“$\sin x>1$”，则$C=0$；

D表示“实数$x>0$”，则当x为正数时，$D=1$，

当x为0或者为负数时，$D=0$；

E表示“明天下雨”，若明天果真下雨，则$E=1$，

若明天没有下雨，则$E=0$。

又如“今天是星期一”，“这里从不下雪”，“我的身高1.8米”，这些句子也是命题，其真值要因时，因地，因人而定。

再如，“其他星球有比地球更先进的社会”，也是命题，但其真值，目前还不能决定，我们对这类问题不加讨论。疑问句，祈寿句，感叹句，命令句等都不是命题。如“你贵姓？”“请勿吸烟”，“起步走！”等，都不是命题。

只表示一个基本内容的命题叫做基本命题．用连接词把基本命题连接起来，构成的新命题叫做复合命题．如

M：“对顶角相等或负数有对数”，

N：“对顶角相等与负数有对数”，

P：“对顶角相等与负数有对数或$Sinx>1$”

等都是复合命题，一个命题冠以“非”，所构成的新命题，可看成复合命题，如“对顶角不相等”是“对顶角相等”的复合命题。

在研究复合命题时，我们只注意命题的真假，不关心复合命题的具体含义。复合命题的真假值，由构成它的命题的真假值来决定。一个复合命题P，如果不论构成它的命题为真或为假，P总是真的，那么称P为永真命题，永真命题用1表示；如果P总是假的，那么称P为永假命题，永假命题用0表示。如“明天下雨或不下雨”是永真命题，“2＞3与（且）3＞2”是永假命题，具有确定的真、假值的命题也分别看成永真、永假命题。如“对顶角相等”是永真命题，“负数有对数”是永假命题。

由一个或者一个以上的基本命题可以构成许多复合命题，后面还将看到，由几个复杂的复合命题也可能构成一个简单的复合命题或基本命题。用数学运算的方法来表示这种构成的过程，就是对命题的运算。

【命题运算】由一个或多于一个命题构成新命题的运算，叫做命题运算。也叫做逻辑运算。

对命题变量的运算和按命题运算法则求命题真假值的运算，都是逻辑运算。

2．基本逻辑运算

电子计算机等自动装置用到的逻辑运算有“或”、“与”、“非”三种，我们把这三种运算称为基本逻辑运算。

（1）或运算（命题的加法，逻辑加）

【定义1】由二个命题A、B，构成新命题F：“A或B,”仅当A、B同时为假时，F才为假，当A、B中至少有一个为真时，F为真。这种命题运算叫做二个命题A、B的或运算，也叫命题的加法。

命题A、B间的或运算，记作$A \vee B$，读作“A或B”，也记作$A+B$，读作“A加B”，新命题F叫做命题A、B的逻辑和，记作$A \vee B=F$，或$F=A \vee B$，也记作$F=A+B$。

根据定义1，可以把A、B和$A+B$的真假情况列成一个表（1.1），这个表叫做$A+B$的真值表。表中说明仅当$A=0$、$B=0$时，才有$A+B=0$；否则，当A、B中至少有一个等于1时，$A+B=1$。

A	B	$A+B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

表1.1

从这个真值表得出二个命题的加法法则：

$$0+0=0 \quad 0+1=1$$

$$1+0=1 \quad 1+1=1$$

定义1及以后各命题运算的定义中的A、B，可以是给定的命题，即有具体内容的命题，也可以是命题变量。A、B的内容可以有联系，也可以没有联系。例如，

给定A表示命题“$4>3$”，B表示“乌龟会爬”，构成新命题$A+B$为“$4>3$或乌龟会爬”。这里A、B的内容没有联系，A、B的真假情况只有一种，即A真，B真。根据定义1，新命题F：$A+B$为真，即“$4>3$或乌龟会爬”为真命题。

给定A表示“$x>2$”，B表示“$x>3$”。构成新命题$A+B$为“$x>2$或$x>3$”。这里A、B的内容有联系，A、B的真假情况有三种：A假B假、A真B假、A真B真。对这三种情况，根据定义1，$A+B$分别为假、真、真。

给定A：“明天下雨”，B：“后天下雨”。构成新命题$A+B$：“明天或后天下雨”。这里A、B的真假情况有四种。

仅当$A=0$，$B=0$时，才有$A+B=0$，否则

当$A=0$，$B=1$，或者$A=1$，$B=0$，或者$A=1$ $B=1$时有$A+B=1$。

复合命题$A+B$的真假值可按命题的加法法则求得。如

“$4>3$或乌龟会爬”的真值$=1+1=1$

用前述字母表示，可写为

$$F=A+B=1+1=1$$

说明：1°定义1告诉我们：

A、B中至少有一个命题为真$\Longrightarrow$“$A+B$”为真。

“$A+B$”为真$\not\Longrightarrow$$A$、$B$都为真。

例如，因为“对顶角相等”为真，所以“对顶角相等或负数有对数”为真；但反之，不能由“对顶角相等或负数有对数”为真，推得“负数有对数”也为真。同样地，如

$lg(x-2)$的定义域，因为$x>2$时成立，所以对逻辑和来说，“$x>2$或$x=2$”时成立，但不能由逻辑和“$x>2$或$x=2$”时成立，推得$x=2$时也成立，从而得出数0有对数的错误结论。

2°这个定义还告诉我们：

“$A+B$”为假$\Longrightarrow$$A$和$B$都必为假；

A、B中有一个命题为假$\not\Rightarrow$"$A+B$"为假。

为了使逻辑运算更有普遍意义和应用范围，在命题运算的定义中，要求变元A、B可以一真一假，也可以同真同假，也就是说，命题变量的或运算是相容或。

逻辑加的运算与集合中的求并集的运算相当。因为如果A、B表示集合，a是一个元素，$A+B$表示集合A、B的并集，那么只有在$a\in A$不成立，$a\in B$不成立的情况下，$a\in A+B$才不成立；其他三种情况（$a\notin A$、$a\in B$；$a\in A$、$a\notin B$；$a\in A$、$a\in B$）下，$a\in A+B$都成立。

命题运算可以用文氏图来表示。图1.1中左圆内部表示命题A，右圆内部表示命题B，阴影部分表示命题$A+B$。

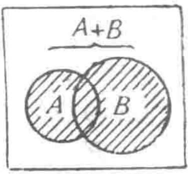


图 1.1

我们把"开关"看成一个命题，开关闭合时记为1，开关分离时记为0（灯亮为1，灯灭为0）。那么二个开关A、B的并联组合（图1.2）具有或运算的逻辑功能。

(a)　　图 1.2　　(a)

图1.2(a)可画成(b)。由图1.2可见，仅当$A=B=0$时，才有$F=0$；在A、B的其他离合状态下，都有$F=1$，因此$F=A+B$。$F=0$反映A、B的并联组合开关断，

$F=1$ 反映 A、B 的并联组合开关通。所以开关的并联，实际上成为一个开关，是一个复合开关。

（2）与运算（命题的乘法，逻辑乘）

【定义 2】 由二个命题A、B，构成新命题G："A与B"，仅当A、B同时为真时，G才为真，当A、B中至少有一个为假时，G为假，这种命题运算叫做二个命题A、B的**与运算**。也叫命题的乘法，或逻辑乘。

命题A、B间的与运算，记作$A\wedge B$，读作"A与B"，也记作$A\cdot B$，或AB，读作"A乘B"。新命题G叫做命题A、B的**逻辑积**，记作$A\wedge B=G$，也记作$A\cdot B=G$，或者$AB=G$，也记作$G=A\wedge B$，$G=A\cdot B$，$G=AB$。

例如，A：语文考满分，B：数学考满分，$A\cdot B$：语文与数学都考满分。

那么，$\begin{cases} \text{仅当}A=1,\ B=1\text{时，才有}A\cdot B=1\text{；否则} \\ \text{当}A=0,B=1\text{；或}A=1,B=0\text{；或}A=0, \end{cases}$

$B=0$时，有$AB=0$。

我们把A、B，$A\cdot B$的真假情况列成一个表(1.2)：

这个表叫做A、B的真值表，从这个表可以得出二个命题的乘法法则：

$0\cdot0=0$，$0\cdot1=0$，

$1\cdot0=0$，$1\cdot1=1$。

A	B	AB
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

表1.2

根据与运算定义，"对顶角相等与负数有对数"是假命题。用前述字母表示即

$$N=A\cdot B=1\cdot0=0。$$

如果A、B是两个集合，$A\cdot B$表示这两个集合的交集，a是一个元素，那么只有在$a\in A$，$a\in B$的情况下，$a\in A\cdot B$；

其他三种情况（$a\in A, a\notin B$；$a\notin A, a\in B, a\notin A, a\notin B$）下，都是$a\notin A\cdot B$（即$a\in A\cdot B$都不成立）。所以逻辑乘的运算同集合中求交集合的运算相当。

在图1.3的文氏图中，左圆内部表示命题A，右圆内部表示命题B，阴影部分表示命题$A\cdot B$。

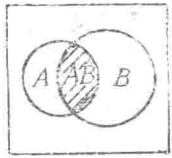
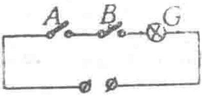


图 1.3

二个开关的串联组合（图1.4）具有“与”运算的逻辑功能。



(a)

(b)

图 1.4

图1.4的(a)可画成(b)。由图1.4可见，仅当$A=1$，$B=1$时，$G=1$；A、B的其他离合状态，都有$G=0$，因此$A\cdot B=G$。

以上逻辑加，逻辑乘，都是二个命题构成一个新命题的运算，可以用逐步相加（相乘）的方法把它们推广，求出多个命题的逻辑和（逻辑积）。

（3）非运算（命题的否定，逻辑非）

【定义3】 由一个给定的命题A，冠以“非”，构成新命题“非A”，若A为真，则“非A”为假；若A为假，则“非A”为真，这种命题运算，叫做命题的**非运算**。称“非A”是A的**反**。

A的非运算，记作$\overline{A}$，读作“A非”或者“非A”，我们还把不带非号的变元称为**原变元**，带非号的变元称为**反变元**，原变元和反变元统称为**变元**。

例如，A表示灯亮，$\overline{A}$表示灯灭。那么

当 $A=0$ 时，$\overline{A}=1$（灯亮为假时，灯灭为真）；

当 $A=1$ 时，$\overline{A}=0$（灯亮为真时，灯灭为假）。

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

表1.3

把 A，$\overline{A}$的真假情况列成一个表（1.3），这个表叫做$\overline{A}$的真值表，由这个表可以得出一个命题的非运算法则：

$$\overline{0}=1,\quad \overline{1}=0$$

由非运算定义可知$\overline{\overline{A}}=A$，$\overline{\overline{A}}$读作$A$非非。这时称$A$有双重反号。

如果集$\overline{A}$是集合A的补集，α是一个元素，那么当$\alpha\in A$为真，则$\alpha\in\overline{A}$为假，当$\alpha\in A$为假，则$\alpha\in\overline{A}$为真，所以逻辑非的运算同集合中求补集的运算相当。

在图1.5的文氏图中，圆的内部表示命题A，阴影部分表示命题$\overline{A}$。

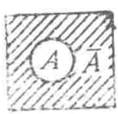
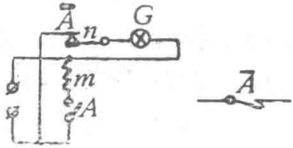


图 1.5



(a) (b)

图 1.6

常闭继电器（图1.6）具有非运算功能。图中$\overline{A}$为触点，n为弹性片，m为线圈。当A分离时，因n的弹力作用，使触点$\overline{A}$闭合；反之，当A接通时，线圈m因通电产生磁吸力，

吸力大于n的弹力，将$\overline{A}$吸离。形成

当$A=0$时，$\overline{A}=1$；

当$A=1$时，$\overline{A}=0$。

当A再分离时，$\overline{A}$又闭合。平常$\overline{A}$是闭合的，只有当A闭合时，$\overline{A}$才分离。即常用继电器具有非运算的功能。也称常闭继电器为反相器。

如果A,B表示集合：$A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{3,4,5,6\}$，设全集$\mathrm{I}=$自然数集$\{1,2,3,4,\cdots\cdots\}$，那么

$\overline{A}=$比4大的自然数全体构成的集$\{5,6,7,\cdots\cdots\}$

$A+B=\{1,2,3,4,5,6\}$，$AB=\{3,4\}$；

例1　如果A表示命题$x>2$，B表示命题$x>3$，那么$A+B$，AB，$\overline{A}$各表示什么命题？

解　$A+B$表示命题$x>2$或$x>3$，即命题$x>2$；

AB表示命题$x>2$且$x>3$，即命题$x>3$；

$\overline{A}$表示命题$x\not>2$即命题$x\leqslant 2$。

进行逻辑运算时，使用和普通代数一样的括号及相的仿运算顺序：规定先非，后与，再或；有括号时，括号最优先。有多重括号时，按先小括号后大括号再花括号进行，这个规定仅为省些括号。

例2　进行逻辑运算：$1\cdot[\overline{1}+(\overline{0}+1\cdot\overline{1})]$.

解　原式$=1\cdot[\overline{1}+(1+1\cdot 0)]=1\cdot[\overline{1}+(1+0)]$

$=1\cdot[\overline{1}+1]=1\cdot[0+1]=1\cdot 1=1$.

例3　给定开关A,B,C的离合状态如图1.7所示，试用逻辑运算求出F的真假值。

解 从图中看出，A和B串联，A、B和C并联。

于是有 $$F=AB+C$$

$\because$ 给定$A=1$，$B=0$，

$C=0$。

$\therefore F=1\cdot 0+0=0$（表明这时的组合开关离）。

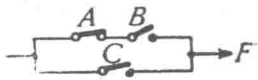


图 1.7

例 4 求下列命题P、Q的真假值：

（1）P：对顶角相等或负数有对数与$\sin x>1$；

（2）Q：（对顶角相等或负数有对数）与$\sin x>1$.

解 $P=1+0\cdot 0=1+0=1$；

$Q=(1+0)\cdot 0=1\cdot 0=0$。

§1.2逻辑式及逻辑函数

1 逻辑式的概念

【定义 1】 用逻辑变元，定元，逻辑运算符号，或兼用括号，来表示命题，或命题运算的式子，叫做逻辑式。

如，A，0，$A+1$，$A+B+C$，$A\bar{B}C$，$A(B+\bar{C}D)$，$\overline{A+B}+BC$，$\bar{A}A+B$，$\overline{XY}+Z$等，都是逻辑式。

任何一个逻辑式都可以用加以说明的字母来表示，如用“逻辑式F”来表示任意的逻辑式，当F表示某逻辑式如$A(B+\bar{C}D)$时，可写成

$$F=A(B+\bar{C}D).$$

为了叙述方便，对下面逻辑式各给以名称：

1° 只用乘号“$\cdot$”把变元（包括原变元及反变元）、定元、联结成的逻辑式，叫做与式，也叫逻辑单项式；在与式中，如果不出现互反的变元，那么这个与式称为

基本式。与式中的变元称为**因子**.

如AB，$\overline{A}B\overline{C}$，$A\cdot 1$都是与式；$\overline{AB}$，$(A+\overline{B})C$，我们不称与式.

2°只用加号"+"把变元联结成的逻辑式称为**或式**.

如，$A+B$，$A+\overline{B}+\overline{C}$都是或式；$\overline{A+B}$，$A+B\overline{C}$，不称或式.

单独一个变元或定元看成与式.

3°用与式来作"或"的逻辑式叫做**与—或式**，也称与—或标准形，或称折取标准形，也称多项式. 被用来作或的与式称为**与项**，也称**乘积项**。

如$A+BC$，$A\overline{B}+\overline{A}B$，$AB+\overline{C}DE$是与—或式，在$A+BC$中，$A$和$BC$都是与项，如$A+\overline{BC}$，$\overline{A+BC}$不是与—或式.

4°用或式来作"与"的逻辑式叫做**或—与式**，也称或—与标准形，或称合取标准形. 被用来作与的或式称为**因式**.

如$A(B+C)$，$(A+B)(B+\overline{C}+D)$是或—与式，$A(B+CD)$，$\overline{A+B}(C+D)$不是或—与式. A和$B+C$是$A(B+C)$的因式.

我们约定，如或式$A+B+C$，写为$A\cdot 1+B\cdot 1+C\cdot 1$后，看成与—或式. 与式$ABC$，写为$(A+0)(B+0)(C+0)$后看成或—与式.

【定义 2】 逻辑式中每个变元取定真假值后，进行逻辑运算得到的值叫做**逻辑式的值**。如

逻辑式$A+BC$，当取$A=1$，$B=0$，$C=1$时，$A+BC$的值$=1+\overline{0}\cdot1=1$

我们把$A=1$，$B=0$，$C=1$称为A,B,C的一个取值组。A,B,C的这一取值组记为$(1,0,1)$，或$(1\ 0\ 1)$；这时B,A,C的取值组记为$(0,1,1)$，或$(0\ 1\ 1)$，即变元的顺序对应其取值的顺序，这个记法称为**二进数表示**。将变元取值组代入逻辑式，所得的逻辑式的值，称为该取值组关于这个逻辑式的对应值。也说成该取值组使这个逻辑式得到的值。如

A,B,C的取值组$(1,0,0)$使$A\overline{B}C=0$，使$A\overline{B}=1$。

在一个逻辑式中，相同的字母和这个字母的非合计为一个变元。若某变元不在逻辑式中出现，则该变元的取值与该逻辑式的值无关。

二个逻辑式F、G，如果F含有m个变元，G含有n个变元，F,G中有k个变元相同，则称F和G含有$(m+n-k)$个变元。如$A+\overline{B}$和$B\overline{C}$含有A、B、C三个变元。

因为每一个变元取二个值，由排列知识知：

1个变元的取值组有2^1个；

2个变元的取值组有2^2个；

3个变元的取值组有2^3个；

n个变元的取值组有2^n个。

【定义3】 如果一个逻辑式含有n个变元，把2^n个取值组及逻辑式的对应值列成一个表，这个表叫做该逻辑式的**真值表**；如果二个逻辑式，对于它们变元的每一个取值组，所得