HIT

数学·统计学系列

The Methods and Techniques of Mathematical Olympiad Inequalities

数学奥林匹克不等式证明方法和技巧 上

蔡玉书 编著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

数学·统计学系列

数学奥林匹克不等式证明方法和技巧

The Methods and Techniques of Mathematical Olympiad Inequalities

上

蔡玉书 编著

HITP
哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容提要

本册共包括十三章:第一章比较法证明不等式,第二章二元、三元均值不等式的应用,第三章均值不等式的应用技巧,第四章柯西不等式及其应用技巧,第五章联用均值不等式和柯西不等式证明不等式,第六章柯西不等式的推广、赫德尔不等式及其应用,第七章不等式 $a^{m+n}+b^{m+n}\geqslant a^m b^n+a^n b^m$ 及其推广——米尔黑德定理的应用,第八章舒尔不等式的应用,第九章排序不等式与切比雪夫不等式及其应用,第十章琴生不等式及其应用,第十一章放缩法证明不等式,第十二章反证法证明不等式,第十三章调整法与磨光变换法证明不等式。

本书适合于数学奥林匹克竞赛选手、教练员参考使用,也可作为高等师范院校、教育学院、教师进修学院数学专业开设的“竞赛数学”课程教材及不等式研究爱好者参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

数学奥林匹克不等式证明方法和技巧. 全2册/蔡玉书编著. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2011.5

ISBN 978-7-5603-3182-9

Ⅰ.①数… Ⅱ.①蔡… Ⅲ.①不等式-中学-教学参考资料 Ⅳ.①G634.623

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第090033号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　李广鑫　翟新烨
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街10号　邮编150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16　总印张 77.75　总字数 1436 千字
版　　次　2011年8月第1版　2011年8月第1次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-3182-9
定　　价　158.00 元(上、下)

⊙ 序

不等式在数学中占有重要的地位。自 1934 年哈代、李特伍德、波利亚的名著《不等式》(越民义译,科学出版社,1965)问世以来,有关不等式问题的研究层出不穷,文章、著作也很多。如 Beckenbach, Bellman *Inequalities*; Mitrinovic *Analytic Inequalities*; Mitrinovic, Pecaric and Volenec *Recent Advances in Geometric Inequalities*。我国的研究者更是非常之多,宁波大学的陈计先生就是其中最突出的一位;匡继昌先生的《常用不等式》对不等式作了详细的总结;杨路先生给出了不等式的机器证明,他发明的软件 Bottema 可以在几秒钟内完成一个不等式的证明。

数学奥林匹克中不等式的题目甚多,几乎每届 IMO 与 CMO 都有一道不等式。在我国高中联赛中,不等式也是屡见不鲜。为什么不等式受到命题者的青睐呢?至少有以下理由:

首先,不等式的题多如牛毛,每一年都有大量的新不等式出现,可供选用。

其次,不等式的题有各种难度,可以较好地区分出选手的水平。

最后,或许是最重要的一点,不等式最能反映出选手的创造能力。很多不等式无法搬用固定的方法,必须自出机杼,给出新颖的解法,这与平面几何颇为类似。现在,在竞赛中,不等式似乎已经可以与平面几何分庭抗礼了。

蔡玉书先生的这本《数学奥林匹克不等式的证明方法和技巧》，内容丰富，全书24章，共有例题200多道，练习题1 000多道，可见作者搜罗之勤。因此，这本书也可以作为一本题典使用。

这么多的题，读者想全部做完，不太现实，也没有必要。比较好的办法是从中选出一部分来做，必须自己独立做，不要先看解答。一遇题目就看解答，往往会束缚思想，不利于提高解题的能力。这本书的练习题都给出了解答，是一件大好事，不仅为教练员提供了资料，而且给勤勉的读者提供了锻炼能力的机会，自己做好后可以跟答案对照，甚至可以找到更好的解答。当然，初学者可以先选例题来做，实在做不出，可以看书上的解答。即使书上有现成的解答，也必须自己先做。在做的基础上再看解答，体会才会较深，收获才会较大。“金针线迹分明在，但把鸳鸯仔细看。”看解答，要仔细，不应只看到“绣好的鸳鸯”，更要看出绣鸳鸯的方法。掌握“金针”，才能融会贯通，举一反三。

24章的内容，请读者自己看书，我就不再饶舌了。

单 墫

2010年9月

前言

20多年前刚参加工作不久时，我就对竞赛中不等式的研究产生了浓厚的兴趣，曾经整理了许多不等式的试题及解法，足足写了两本厚厚的笔记. 随着时间的推移，笔者对不等式的研究兴趣有增无减，2005 年参加江苏省数学奥林匹克夏令营时开始着手把自己整理的不等式的有关材料写成一本书，即《数学奥林匹克不等式证明方法和技巧》. 经过近六年的辛勤劳动和刻苦努力，它终于和广大读者见面了.

纵观数学奥林匹克，无论是国际数学奥林匹克，还是中国和其他国家的数学奥林匹克，不等式的试题都会出现. 再加上不等式的证明试题具有很高的技巧性和挑战性，因在竞赛中备受命题组委会的青睐. 因此有一本详细的资料供人参考是很有必要的.

本书精选了近年来国内外各级各类数学奥林匹克试题 1 000多道，编成 24 个章，它几乎包括了常见的竞赛不等式的证法，它大大地节省了教师收集资料的时间，且大多数章节是作为教师的竞赛讲座材料给出的. 本书具有科学性、知识性、实用性、资料性和可读性强的特点，它是广大数学奥林匹克教练员研究竞赛不等式，指导学生参赛不可多得的参考文献，也适合不等式研究爱好者参考使用.

全书的例题的解答有些出自试题组委会提供的参考解答，

有些出自名家之手，有些是数学期刊的优雅解法，更多的是来自作者的辛勤劳动. 典型的如1996年伊朗的一道奥林匹克试题是在本人研究了对称不等式的SOS方法后将它圆满解决的. 2006年江苏省冬令营单墫教授给出了一种较为简洁的方法，本书一并把它介绍给读者，这便是出自名家之手的解答.

本书的习题，有1000多道，所有的习题都给出了证明过程，但我们希望读者尤其是准备参加各类竞赛的选手不要放弃每一个练习的机会，正如单墫教授所说的那样："只有动手做一做，才能体会试题的难度和解决问题的技巧和方法."

著名数学家、教育学家波利亚(G. Pólya，1897—1985)一直强调未来的中学数学教师应当学习解题，他尤其鼓励教师们解一些有挑战性的试题. 他曾经这样说过："一位好的数学老师和学生应努力保持解题的好胃口."要想熟练地掌握数学奥林匹克中不等式证明的方法和技巧，最好的方法莫过于经常动手解题. 本书中每个章节都给出了典型不等式赛题的优雅证明方法，章节后的类似的习题则要求读者自己去完成. 由于书中习题来自各国各地区的奥林匹克试题和集训队试题，难度之大可想而知，一时做不出来，不要灰心丧气，也不要急于查找现成的试题解答，可以与同学组成不等式研究小组一起探讨. 希望读者最好从各章节的相关的例题中汲取精华和营养，培养自己独立地闯过难关的能力，从而找到解题的乐趣.

本书的写作过程中得到了单墫、熊斌、余红兵、叶中豪教授和很多奥林匹克专家的大力支持和帮助，著名数学家、教育家、国家级奥林匹克教练、南京师范大学博士生导师单墫教授在百忙中认真地阅读了书稿，并为本书作了序. 对于一直支持本人工作的苏维宜、王肇西、冯惠愚、葛军、董林伟、祁建新、夏炎、陈兆华、潘洪亮、韩亚军等同志表示感谢，同时感谢武炳杰、赵斌等同学对本书的支持和关心.

由于我们的水平有限，疏漏与不足之处实难避免，望读者不吝赐教.

希望本书能给广大教师和学生一点帮助.

蔡玉书

2010年国庆节于苏州

目录

比较法证明不等式

第一章

比较法是证明不等式的常用的基本方法，一般有两种形式：

(1) 差值比较法. 欲证 $A \geqslant B$，只要证 $A - B \geqslant 0$.

(2) 商比较法. 若 $B > 0$，欲证 $A \geqslant B$，只要证 $\frac{A}{B} \geqslant 1$.

在用比较法证明不等式时，常常需要对所考虑的式子进行适当的代数变形，如配方、因式分解、拆项、并项等.

本书的全部例题和习题选自国内外数学竞赛试题，有些例题可能在书中多次出现，所以每节中该例题的解法是优秀的，但不一定是最简单的.

例题讲解

一、作差比较后拆项配方或分解因式

例 1 已知 a,b,c 是正实数，试证：对任意实数 x,y,z，有

$$x^2 + y^2 + z^2 \geqslant 2\sqrt{\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}}\left(\sqrt{\frac{a+b}{c}}xy + \sqrt{\frac{b+c}{a}}yz + \sqrt{\frac{c+a}{b}}zx\right)$$

并指出等号成立的充要条件.

证明 上式左边 - 右边 =

$$\left(\frac{b}{b+c}x^2+\frac{a}{c+a}y^2-2\sqrt{\frac{ab}{(b+c)(c+a)}}xy\right)+$$

$$\left(\frac{c}{c+a}y^2+\frac{b}{a+b}z^2-2\sqrt{\frac{bc}{(c+a)(a+b)}}yz\right)+$$

$$\left(\frac{c}{b+c}x^2+\frac{a}{a+b}z^2-2\sqrt{\frac{ca}{(b+c)(a+b)}}xz\right)=$$

$$\left(\sqrt{\frac{b}{b+c}}x-\sqrt{\frac{a}{c+a}}y\right)^2+\left(\sqrt{\frac{c}{c+a}}y-\sqrt{\frac{b}{a+b}}z\right)^2+$$

$$\left(\sqrt{\frac{c}{b+c}}x-\sqrt{\frac{a}{a+b}}z\right)^2\geqslant 0$$

所以原不等式成立.

等号成立的充要条件是 $x:y:z=\sqrt{a(b+c)}:\sqrt{b(c+a)}:\sqrt{c(a+b)}$.

例 2 设 a,b,c 是三角形的三边,求证:$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\leqslant 3abc$.(第 6 届 IMO 试题)

证明 不妨设 $a\geqslant b\geqslant c>0$,将不等式右边与左边之差变形为

$$3abc-[a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)]=$$

$$a^3+b^3+c^3+3abc-a^2b-b^2a-a^2c-c^2a-bc^2-b^2c=$$

$$a^2(a-b)+b^2(b-a)+c(2ab-a^2-b^2)+c(c^2-bc+ab-ac)=$$

$$(a-b)^2(a+b-c)+c(b-c)(a-c)$$

因为 $a+b>c,b\geqslant c,a\geqslant c,c>0$,所以 $(a-b)^2(a+b-c)+c(b-c)\cdot(a-c)\geqslant 0$. 所以原不等式成立.

注 由证法二,也可知道只要 a,b,c 是正数,不等式就可以成立了. 这是 1971 年奥地利数学奥林匹克试题.

二、对称不等式的处理可以先将字母排序,再作比较

例 3 设 $0\leqslant a,b,c\leqslant 1$,证明:$\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{c+a+1}+\frac{c}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(1-c)\leqslant 1$.(第 9 届美国数学奥林匹克试题)

证明 如果直接通分,问题就会变得非常复杂,不失一般性,可设 $0\leqslant a\leqslant b\leqslant c\leqslant 1$,于是有

$$\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{c+a+1}+\frac{c}{a+b+1}\leqslant\frac{a+b+c}{a+b+1}$$

因此,可尝试证明较简单的不等式

$$\frac{a+b+c}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(1-c)\leqslant 1 \qquad ①$$

因①式的左边 $=\frac{a+b+1}{a+b+1}+\frac{c-1}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(1-c)=1-\frac{1-c}{a+b+1}[1-(1+a+b)(1-a)(1-b)]$,再注意到

$$(1+a+b)(1-a)(1-b)\leqslant(1+a+b+ab)(1-a)(1-b)=$$
$$(1+a)(1+b)(1-a)(1-b)=(1-a^2)(1-b^2)\leqslant 1$$

故不等式①成立,从而原不等式成立.

例4 已知 a,b,c 是正数,证明:

(1) $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}$.(1963 年莫斯科数学奥林匹克试题)

(2) $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geqslant\frac{a+b+c}{2}$.(第2届世界友谊杯数学竞赛试题)

证法一 (1) 因为

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}-\frac{3}{2}=$$
$$\left(\frac{a}{b+c}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{b}{c+a}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{c}{a+b}-\frac{1}{2}\right)=$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{a-b}{b+c}+\frac{a-c}{b+c}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{b-c}{c+a}+\frac{b-a}{c+a}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{c-a}{a+b}+\frac{c-b}{a+b}\right)=$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{a-b}{b+c}+\frac{b-a}{c+a}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{b-c}{c+a}+\frac{c-b}{a+b}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{a-c}{b+c}+\frac{c-a}{a+b}\right)=$$
$$\frac{1}{2}\left[\frac{(a-b)^2}{(b+c)(c+a)}+\frac{(b-c)^2}{(c+a)(a+b)}+\frac{(c-a)^2}{(b+c)(a+b)}\right]\geqslant 0$$

所以
$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}$$

(2) $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}-\frac{a+b+c}{2}=a\left(\frac{a}{b+c}-\frac{1}{2}\right)+b\left(\frac{b}{c+a}-\frac{1}{2}\right)+c\left(\frac{c}{a+b}-\frac{1}{2}\right)=$

$$\frac{a}{2}\left(\frac{a-b}{b+c}+\frac{a-c}{b+c}\right)+\frac{b}{2}\left(\frac{b-c}{c+a}+\frac{b-a}{c+a}\right)+\frac{c}{2}\left(\frac{c-a}{a+b}+\frac{c-b}{a+b}\right)=\left(\frac{a}{2}\cdot\frac{a-b}{b+c}+\frac{b}{2}\cdot\frac{b-a}{c+a}\right)+$$
$$\left(\frac{a}{2}\cdot\frac{a-c}{b+c}+\frac{c}{2}\cdot\frac{c-a}{a+b}\right)+\left(\frac{b}{2}\cdot\frac{b-c}{c+a}+\frac{c}{2}\cdot\frac{c-b}{a+b}\right)=$$
$$\frac{(a+b+c)(a-b)^2}{2(b+c)(c+a)}+\frac{(a+b+c)(a-c)^2}{2(b+c)(a+b)}+$$

$$\frac{(a+b+c)(b-c)^2}{2(c+a)(a+b)} \geqslant 0$$

所以
$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b} \geqslant \frac{a+b+c}{2}$$

证法二 (1) 因为

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}-\frac{3}{2}=$$

$$\frac{2a(a+b)(c+a)+2b(a+b)(b+c)+2c(b+c)(c+a)-3(a+b)(b+c)(c+a)}{2(a+b)(b+c)(c+a)}=$$

$$\frac{2(a^3+b^3+c^3)-(a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2)}{2(a+b)(b+c)(c+a)}=$$

$$\frac{a^3+b^3-(a^2b+ab^2)+b^3+c^3-(b^2c+bc^2)+b^3+c^3-(c^2a+ca^2)}{2(a+b)(b+c)(c+a)}=$$

$$\frac{(a+b)(a-b)^2+(b+c)(b-c)^2+(c+a)(c-a)^2}{2(a+b)(b+c)(c+a)} \geqslant 0$$

所以
$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}$$

(2) 不难证明$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}=(a+b+c)\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)-(a+b+c)$,利用这个恒等式得到不等式$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}$和$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b} \geqslant \frac{a+b+c}{2}$等价.

证法三 下面用对称化的方法证明这两个不等式:

不妨设 $a \geqslant b \geqslant c$,

(1) $$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}-\frac{3}{2}=\frac{2a-b-c}{2(b+c)}+\frac{2b-a-c}{2(c+a)}+\frac{2c-a-b}{2(a+b)} \geqslant$$
$$\frac{2a-b-c}{2(a+c)}+\frac{2b-a-c}{2(c+a)}+\frac{2c-a-b}{2(a+b)}=\frac{a+b-2c}{2(c+a)}+\frac{2c-a-b}{2(a+b)} \geqslant$$
$$\frac{a+b-2c}{2(a+b)}+\frac{2c-a-b}{2(a+b)}=0$$

(2) $$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}-\frac{a+b+c}{2}=\frac{a(2a-b-c)}{2(b+c)}+\frac{b(2b-a-c)}{2(c+a)}+$$
$$\frac{c(2c-a-b)}{2(a+b)} \geqslant \frac{b(2a-b-c)}{2(a+c)}+\frac{b(2b-a-c)}{2(c+a)}+\frac{c(2c-a-b)}{2(a+b)}=$$
$$\frac{b(a+b-2c)}{2(c+a)}+\frac{c(2c-a-b)}{2(a+b)} \geqslant \frac{c(a+b-2c)}{2(a+b)}+\frac{c(2c-a-b)}{2(a+b)}=0$$

这里增加了一个补充假设,给论证带来了方便,这在三元对称不等式的证

明中,起到举足轻重的作用. 但其中用到了放缩的技巧,这一技巧将在后面专门讨论. 不等式的证明离不开放缩.

由例 4 可解决下列问题(令 $A=\frac{1}{a},B=\frac{1}{b},C=\frac{1}{c}$,并对 A,B,C 用例 4 中条件及结论)

设 a,b,c 为正实数,且满足 $abc=1$,试证:$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geqslant\frac{3}{2}$.(第 36 届 IMO 试题)

三、作商比较是解决含指数问题的有效方法

例 5 设 $x_i\in\mathbf{R}^+$ $(i=1,2,\cdots,n)$,求证:

$$x_1^{x_1}x_2^{x_2}\cdots x_n^{x_n}\geqslant(x_1x_2\cdots x_n)^{\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)}$$

证明 即证

$$x_1^{nx_1}x_2^{nx_2}\cdots x_n^{nx_n}\geqslant(x_1x_2\cdots x_n)^{x_1+x_2+\cdots+x_n}\qquad①$$

由对称性可设 $x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_n>0$,于是当 $i<j$ 时,$x_i-x_j\geqslant0,\frac{x_i}{x_j}\geqslant1$,故 ① 式的左边与右边之比等于

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{x_1-x_2}\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^{x_1-x_3}\cdots\left(\frac{x_1}{x_n}\right)^{x_1-x_n}\left(\frac{x_2}{x_3}\right)^{x_2-x_3}\left(\frac{x_2}{x_4}\right)^{x_2-x_4}\cdots\left(\frac{x_2}{x_n}\right)^{x_2-x_n}\cdots\left(\frac{x_{n-1}}{x_n}\right)^{x_{n-1}-x_n}\geqslant1$$

不等式得证.

取 $n=3$,有以下 3 道竞赛试题:

(1)a,b,c 是正数,则 $a^{2a}b^{2b}c^{2c}\geqslant a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b}$.(1979 年上海市数学竞赛试题)

(2)a,b,c 是正数,则 $a^ab^bc^c\geqslant(abc)^{\frac{1}{3}(a+b+c)}$.(1974 年美国数学奥林匹克试题)

(3)a,b,c 是正数,且 $abc=1$,则 $a^ab^bc^c\geqslant1$.(2001 年印度数学奥林匹克试题)

四、对结构半对称的问题可以先配对,再比较

例 6 设 x,y,z 是正数,则 $\frac{y^2-x^2}{z+x}+\frac{z^2-y^2}{x+y}+\frac{x^2-z^2}{y+z}\geqslant0$.(W. Janous 猜想)

证明 设 $u=\frac{y^2-x^2}{z+x}+\frac{z^2-y^2}{x+y}+\frac{x^2-z^2}{y+z},v=\frac{y^2-z^2}{z+x}+\frac{z^2-x^2}{x+y}+\frac{x^2-y^2}{y+z}$,则

$$u-v=\frac{z^2-x^2}{z+x}+\frac{x^2-y^2}{x+y}+\frac{y^2-z^2}{y+z}=z-x+x-y+y-z=0$$

又

$$u+v=(x^2-y^2)\left(\frac{1}{y+z}-\frac{1}{z+x}\right)+$$
$$(y^2-z^2)\left(\frac{1}{z+x}-\frac{1}{x+y}\right)+(z^2-x^2)\left(\frac{1}{x+y}-\frac{1}{y+z}\right)=$$
$$(x^2-y^2)\frac{x-y}{(y+z)(z+x)}+(y^2-z^2)\frac{y-z}{(z+x)(x+y)}+$$
$$(z^2-x^2)\frac{z-x}{(x+y)(y+z)}=$$
$$\frac{(x+y)(x-y)^2}{(y+z)(z+x)}+\frac{(y+z)(y-z)^2}{(z+x)(x+y)}+\frac{(z+x)(z-x)^2}{(x+y)(y+z)}\geqslant 0$$

所以,$u=v\geqslant 0$,从而

$$\frac{y^2-x^2}{z+x}+\frac{z^2-y^2}{x+y}+\frac{x^2-z^2}{y+z}\geqslant 0$$

W. Janous 猜想有如下 3 个推广(见《数学通讯》2000 年第 3 期)

(1) 设 x,y,z 是正数,$m\in\mathbf{N}^*$,则$\dfrac{y^m-x^m}{z+x}+\dfrac{z^m-y^m}{x+y}+\dfrac{x^m-z^m}{y+z}\geqslant 0$.

(2) 设 x,y,z 是正数,$m,n\in\mathbf{N}^*$,则$\dfrac{y^m-x^m}{z^n+x^n}+\dfrac{z^m-y^m}{x^n+y^n}+\dfrac{x^m-z^m}{y^n+z^n}\geqslant 0$.

(3) 设 x,y,z 是正数,$m,n\in\mathbf{R}$,且 $mn>0$,则$\dfrac{y^m-x^m}{(z+x)^n}+\dfrac{z^m-y^m}{(x+y)^n}+\dfrac{x^m-z^m}{(y+z)^n}\geqslant 0$.

五、对称不等式和循环不等式的 SOS 方法

例 7 正实数 x,y,z 满足 $xyz\geqslant 1$,证明:$\dfrac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}+\dfrac{y^5-y^2}{y^5+z^2+x^2}+\dfrac{z^5-z^2}{z^5+x^2+y^2}\geqslant 0$.(第 46 届 IMO 试题)

证明 因为 $xyz\geqslant 1$,所以

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}\geqslant\frac{x^5-x^2\cdot xyz}{x^5+(y^2+z^2)\cdot xyz}=\frac{x^4-x^2yz}{x^4+yz(y^2+z^2)}\geqslant$$
$$\frac{2x^4-x^2(y^2+z^2)}{2x^4+(y^2+z^2)^2}$$

类似地,可得

$$\frac{y^5-y^2}{y^5+z^2+x^2}\geqslant\frac{2y^4-y^2(z^2+x^2)}{2y^4+(z^2+x^2)^2}$$
$$\frac{z^5-z^2}{z^5+x^2+y^2}\geqslant\frac{2z^4-z^2(x^2+y^2)}{2z^4+(x^2+y^2)^2}$$

令 $a=x^2,b=y^2,c=z^2$,原不等式化为证明

$$\frac{2a^2-a(b+c)}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{2b^2-b(c+a)}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{2c^2-c(a+b)}{2c^2+(a+b)^2}\geqslant 0\Leftrightarrow$$

$$\frac{a(a-b)+a(a-c)}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{b(b-c)+b(b-a)}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{c(c-a)+c(c-b)}{2c^2+(a+b)^2}\geqslant 0\Leftrightarrow$$

$$\sum_{cyc}(a-b)\left(\frac{1}{2a^2+(b+c)^2}-\frac{1}{2b^2+(c+a)^2}\right)\geqslant 0\Leftrightarrow$$

$$\sum_{cyc}(a-b)^2\left(\frac{c^2+c(a+b)+a^2-ab+b^2}{(2a^2+(b+c)^2)(2b^2+(c+a)^2)}\right)\geqslant 0$$

而此不等式显然成立.

例 8 设 x,y,z 是正实数,求证:$(xy+yz+zx)\left[\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{1}{(y+z)^2}+\frac{1}{(z+x)^2}\right]\geqslant\frac{9}{4}$.(1996 年伊朗数学奥林匹克试题)

证明 不妨设 $x\geqslant y\geqslant z>0$,那么

$$(xy+yz+zx)\left[\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{1}{(y+z)^2}+\frac{1}{(z+x)^2}\right]-\frac{9}{4}=$$

$$\frac{xy+z(x+y)}{(x+y)^2}+\frac{yz+x(y+z)}{(y+z)^2}+\frac{zx+y(z+x)}{(z+x)^2}-\frac{9}{4}=$$

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}-\frac{3}{2}+\frac{xy}{(x+y)^2}-$$

$$\frac{1}{4}+\frac{yz}{(y+z)^2}-\frac{1}{4}+\frac{zx}{(z+x)^2}-\frac{1}{4}=$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{(x-y)^2}{(y+z)(z+x)}+\frac{(z-x)^2}{(x+y)(y+z)}+\frac{(y-z)^2}{(x+y)(z+x)}\right]-$$

$$\left[\frac{(x-y)^2}{4(x+y)^2}+\frac{(y-z)^2}{4(y+z)^2}+\frac{(z-x)^2}{4(z+x)^2}\right]=$$

$$\frac{1}{4}\left\{\left[\frac{2}{(y+z)(z+x)}-\frac{1}{(x+y)^2}\right](x-y)^2+\left[\frac{2}{(x+y)(z+x)}-\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{1}{(y+z)^2}\right](y-z)^2+\left[\frac{2}{(x+y)(y+z)}-\frac{1}{(z+x)^2}\right](z-x)^2\right]\right\}=$$

$$\frac{1}{4}\left[S_z(x-y)^2+S_x(y-z)^2+S_y(z-x)^2\right] \qquad ①$$

其中 $S_z=\frac{2}{(y+z)(z+x)}-\frac{1}{(x+y)^2}$,$S_x=\frac{2}{(x+y)(z+x)}-\frac{1}{(y+z)^2}$,$S_y=\frac{2}{(x+y)(y+z)}-\frac{1}{(z+x)^2}$.

因为 $x\geqslant y\geqslant z>0$,所以 $2(x+y)^2>(x+y)^2>(y+z)(z+x)$,即 $S_z>$