高等教育自学考试全国统一命题考试
历年试卷完全详解

高等数学（二）

朝 华 出 版 社

梯田自考真题解析系列

高等教育自学考试全国统一命题考试

历年试卷完全详解

高等数学（二）

主　编　朱文举
尹　剑
李其霖

朝华出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等教育自学考试全国统一命题考试高等数学(二)历年试卷完全详解/朱文举,尹剑,李其霖主编.—北京:朝华出版社,2003.11

ISBN 7-5054-0846-1

Ⅰ.高… Ⅱ.①朱…②尹…③李… Ⅲ.高等数学—高等教育—自学考试—解题 Ⅳ.013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 082197 号

高等数学(二)

主　　编　朱文举　尹　剑　李其霖
责任编辑　王　磊　凌舒昉
特约编辑　吴伶芝
封面设计　朱　珊
责任印制　赵　岭
出版发行　朝华出版社
社　　址　北京市车公庄西路 35 号　　邮政编码　100044
电　　话　(010)68433166
　　　　　(010)68413840/68433213(发行部)
传　　真　(010)88415285
印　　刷　化学工业出版社印刷厂
经　　销　全国新华书店
开　　本　16 开　　字　数　150 千字
印　　数　0—10000　　印　张　6.5
版　　次　2003 年 11 月第 1 版第 1 次印刷
装　　别　平
书　　号　ISBN 7-5054-0846-1/G.0282
定　　价　12.00 元

Introduction 说 明

梯田品牌自考系列丛书，由于其独具的特点和卓越的品质深得全国各省、市教委、学校和广大自考师生的好评和认可，全国每年约有800万人次的考生使用本品牌，销量居全国同类书之榜首，被誉为最受欢迎的自考辅导丛书。

梯田自考真题解析系列——《历年试卷完全详解》丛书涉及公共课程共13门，每门课程汇集了从新教材启用时的全国统考试卷，并对每套试卷加以详尽的分析和解答。

本丛书的宗旨是：在临考冲刺阶段内，考生通过对历届试卷的大量强化训练提高自己的解题技巧、实战应试能力，同时强化已经学过的知识要点、考核重点，从而在最短的时间内取得理想的成绩。

本丛书具有如下特点：

1. 以每年统考的时间为序进行编写，对于每套试卷不仅给出了参考答案，而且提供了每道试题的详细分析及解题思路，解析过程精炼、针对性强，以攻克难点、突出考点为主，从而帮助考生全面掌握考试重点。

2. 以考题为线索，在解析过程中对重要知识点及考点进行了归纳总结，重在培养考生掌握和灵活运用考核知识点的能力。

3. 解答过程详细，并对每道试题探索多种解法，重在提高考生解题能力，拓宽解题思路。

4. 考生在临考阶段使用本书，可较好地进行自我考核、自我评估以及自我调整复习的方向，有利于提高考生的自信心与实战应试能力，从而成功地通过全国自学统一考试。

5. 人性化处理模式。精心进行了版式设计，采用国际流行开本，同时采用双色印刷，利于考生翻阅学习。

本套丛书的编者都是长期从事高等教育自学考试的一线教学工作的权威专家，具有丰富的自考辅导经验，所辅导的学生的单科通过率均在90%以上，受到广大考生的赞誉和推崇。我们相信本丛书的出版发行会对广大考生顺利通过考试起到积极的推动作用。我们预祝每一位考生在考试中取得理想的成绩。

编 者

2003 年 11 月

CONTENTS 目 录

2000年上半年高等教育自学考试全国统一命题考试

高等数学(二) 试卷

第一部分　选择题(共40分)

一、单项选择题(本大题共20小题,每小题2分,共40分)在每小题列出的四个选项中只有一个是符合题目要求的,请将正确选项前的字母填在题后的括号内。

1. 行列式$\begin{vmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{vmatrix}=$

A. 12　　B. -6

C. -12　　D. 0　　【　】

2. 设A是n阶方阵,且$|A|=5$,则$|(5A^T)^{-1}|=$

A. 5^{n+1}　　B. 5^{n-1}

C. 5^{-n-1}　　D. 5^{-n}　　【　】

3. 设A、B是n阶方阵,下列等式正确的是

A. $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$

B. $(A-B)(A+B)=A^2-B^2$

C. $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$

D. $(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2$　　【　】

4. 设A、B是同阶对称矩阵,则AB是

A. 对称矩阵　　B. 非对称矩阵

C. 反对称矩阵　　D. 不一定是对称矩阵　　【　】

5. 设$e_1=(1,0,0)$,$e_2=(0,1,0)$,$e_3=(0,0,1)$,则

A. $(5,7,-1)$可由e_1,e_2,e_3线性表示

B. $(5,7,-1)$不能由e_1,e_2,e_3线性表示

C. $(0,0,0)$不能由e_1,e_2,e_3线性表示

D. $(10,17,11)$不能由e_1,e_2,e_3线性表示　　【　】

6. n元齐次线性方程组系数阵的秩$r<n$,则方程组

A. 有r个解向量线性无关

B. 的基解系由r个解向量组成

C. 的任意r个线性无关的解向量是它的基解系

D. 必有非零解　　【　】

7. 以下说法不正确的是

A. 正交向量组必定线性无关

B. 正交向量组不含零向量

C. 线性无关向量组必定正交

D. 线性无关向量组不含零向量　　【　】

1

8. 当矩阵 A 满足 $A^2=A$ 时，则 A 的特征值为

A. 0 或 1　　B. ±1

C. 都是 0　　D. 都是 1　　【　】

9. 设有观察值 2,4,5,4,2,4,6，则 4 不是这组观察值的

A. 平均数　　B. 中位数

C. 众数　　D. 极差　　【　】

10. 已知事件 A 与 B 互不相容，$P(A)>0$，$P(B)>0$，则

A. $P(A\cup B)=1$　　B. $P(AB)=P(A)P(B)$

C. $P(AB)=0$　　D. $P(AB)>0$　　【　】

11. 若事件 B、A 满足 $B-A=B$，则一定有

A. $A=\varnothing$　　B. $AB=\varnothing$

C. $A\overline{B}=\varnothing$　　D. $B=\overline{A}$　　【　】

12. 某工人生产了三个零件，以 A_i 表示"他生产的第 i 个零件是合格品"$(i=1,2,3)$，以下事件的表示式中错误的是

A. $A_1A_2A_3$ 表示"没有一个零件是废品"

B. $\overline{A_1}\cup\overline{A_2}\cup\overline{A_3}$ 表示"至少有一个零件是废品"

C. $\overline{A_1}A_2A_3\cup A_1\overline{A_2}A_3\cup A_1A_2\overline{A_3}$ 表示"仅有一个零件是废品"

D. $\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3\cup\overline{A_1}A_2\overline{A_3}\cup A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}$ 表示"至少有二个零件是废品"　　【　】

13. 甲、乙、丙三人各自独立地向一目标射击一次，三人的命中率分别是 0.5,0.6,0.7，则目标被击中的概率为

A. 0.94　　B. 0.92

C. 0.95　　D. 0.90　　【　】

14. $\xi\sim N(-1,\sigma^2)$ 且 $P\{-3\leqslant\xi\leqslant-1\}=0.4$，则 $P\{\xi\geqslant1\}=$

A. 0.1　　B. 0.2

C. 0.3　　D. 0.5　　【　】

15. 设随机变量 ξ_1，ξ_2 相互独立，且 $\xi_1\sim P(\lambda)$，$(i=1,2)$，则 $\xi_1+\xi_2$ 与 $2\xi_1$ 的关系是

A. 有相同的分布　　B. 数学期望相等

C. 方差相等　　D. 以上均不成立　　【　】

16. 随机变量 ξ 取非负整数 k 为值，且 $P\{X=k\}=\dfrac{1}{\mathrm{e}k!}$ 则 ξ 的数学期望 $E\xi=$

A. -1　　B. 0

C. 1　　D. 2　　【　】

17. 若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 $N(0,1)$ 的一个样本，则统计量 $\dfrac{X_2{}^2+X_3{}^2+\cdots+X_n{}^2}{(n-1)X_1{}^2}\sim$

A. $\chi^2(n-1)$　　B. $\chi^2(n)$

C. $F(n-1,1)$　　D. $F(n,1)$　　【　】

18. 设正态总体 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 与正态总体 $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，中其，$\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2$ 均为未知参数，而 $X_1,X_2,\cdots,X_{n_1}$，与 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2}$ 分别为总体 X,Y 相互独立的样本，记 $\overline{X}=\dfrac{1}{n_1}\sum\limits_{i=1}^{n_1}X_i$，

$S_1^2=\frac{1}{n_1-1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2,\overline{Y}=\frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2}Y_i,S_2^2=\frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\overline{Y})^2$，则$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的置信水平为0.95的置信区间是

A. $\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{f_{0.05}(n_1-1,n_2-1)},\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{f_{0.95}(n_1-1,n_2-1)}\right)$

B. $\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{f_{0.025}(n_1-1,n_2-1)},\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{f_{0.975}(n_1-1,n_2-1)}\right)$

C. $\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{f_{0.05}(n_1,n_2)},\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{f_{0.95}(n_1,n_2)}\right)$

D. $\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{f_{0.025}(n_1,n_2)},\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{f_{0.975}(n_1,n_2)}\right)$ 【 】

19. 设某钢珠直径X服从正态分布$N(\mu,1)$，(单位：mm)，其中μ为未知参数，从刚生产出的一大堆钢珠中随机抽出 9 个，求得样本均值$\overline{x}=\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}x_i=31.06$，样本方差$S_n^2=\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}(x_i-\overline{x})^2=0.98^2$，则$\mu$的极大似然估计值为

A. 31.06 B. (31.06 − 0.98, 31.06 + 0.98)

C. 0.98 D. 9 × 31.06 【 】

20. 下列结论中正确的是

A. 假设检验是以小概率原理为依据

B. 由一组样本值就能得出零假设是否真正正确

C. 假设检验的结果总是正确的

D. 对同一总体，用不同的样本，对同一统计假设进行检验，其结果是完全相同的 【 】

第二部分 非选择题(共 60 分)

二、简答题(本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分)

1. 当A,B均为n阶非奇异矩阵时，$A+B$和AB是否也必为非奇异矩阵？为什么？

2. a为何值时，方程组$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\-2x_1+x_3=-1\\x_1+3x_2+4x_3=a\end{cases}$有解？

3. 一批产品 70% 的一级品，进行重复抽样检查，共取 5 件样品，求：

(1) 取出 5 件样品恰有 2 件一级品的概率p_1；

(2) 取出 5 件样品中至少有 2 件一级品的概率p_2.

4. 设正态总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，其中σ^2已知，$X_1,X_2,\cdots,X_n$为样本，记$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，在给定$n,\sigma^2$的条件下，$\mu$的置信水平为$1-\alpha$的置信区间$\left(\overline{X}-Z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+Z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$的长度是$\alpha$的减函数，对吗？

3

三、计算题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

1. t 为何值时，$\alpha_1=(1,1,0)$，$\alpha_2=(1,3,-1)$，$\alpha_3=(5,3,t)$ 线性相关?线性无关?

2. 两台车床加工同样的零件，第一台出现废品的概率是 0.03，第二台出现废品的概率是 0.02，加工出来的零件放在一起，并且已知第一台加工的零件比第二台加工的零件多一倍，(1) 求任意取出一个零件是合格品的概率；(2) 如取出的是废品，求它是由第二台车床加工的概率.

3. 规定有强烈作用的药片平均重量为 0.5 毫克. 抽取 121 片来检查，测得其平均重量 0.53 毫克. 根据制药厂提供的药片重量，经反复试验，确信药片重量服从标准方差 $\sigma=\sigma_0=0.11$ 毫克的正态分布. 试在 $\alpha=0.01$ 下，检验 $H_0:\mu=0.5$ 对 $H_1:\mu\neq0.5$($Z_{0.99}=2.32$，$Z_{0.995}=2.58$).

4. 随机抽访一联谊社会员，得四对夫妻的年龄(x_i,y_i)($i=1,2,3,4$，x_i 表妻子年龄，y_i 表丈夫年龄)：(41,47)，(41,48)，(42,46)，(44,43). 试求 x 对 y 的线性回归方程.

四、证明题（本大题共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分）

1. 设 A,B 都是同阶正交矩阵，证明 AB 也是正交矩阵.

2. 设正态总体 $X\sim N(\mu_1,\sigma^2)$ 与正态总体 $Y\sim N(\mu_2,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_{n_1}$ 与 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2}$ 分别为总体 X,Y 的相互独立的样本，记 $\overline{X}=\dfrac{1}{n_1}\sum\limits_{i=1}^{n_1}X_i$，$S_1^2=\dfrac{1}{n_1-1}\sum\limits_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2$，$\overline{Y}=\dfrac{1}{n_2}\sum\limits_{i=1}^{n_2}Y_i$，$S_2^2=\dfrac{1}{n_2-1}\sum\limits_{i=1}^{n_2}(Y_i-\overline{Y})^2$，试证对任意常数 $a,b(a+b=1)$，$Z=aS_1^2+bS_2^2$ 都是 σ^2 的无偏估计.

五、综合应用题（本大题共 2 小题，每小题 7 分，共 14 分）

1. 已知二次型的矩阵为 $A=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&a&0\\0&0&a^2\end{bmatrix}$，写出 A 对应的二次型，并判别 a 满足什么条件时，该二次型是正定的.

2. 设连续型随机变量 ξ 的分布函数为 $F(x)=A+B\arctan x$，$-\infty<x<+\infty$，求：

(1) 常数 A 和 B；

(2) 落入$(-1,1)$ 的概率；

(3) ξ 的密度函数 $p(x)$.

2000年上半年高等教育自学考试全国统一命题考试

高等数学(二)试卷完全详解

一、单项选择题

1.【解析】 $\begin{vmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{vmatrix} \overset{(-1)}{=} \begin{vmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{vmatrix} \overset{(\frac{2}{3})}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0$，故选 D.

【答案】 选 D.

2.【解析】 因为 $|A| = 5$，所以 $|A^{-1}| = \frac{1}{5}$.

$$|(5A^T)^{-1}| = \left|\frac{1}{5}(A^T)^{-1}\right| = \frac{1}{5^n}|(A^T)^{-1}| = \frac{1}{5^n}|(A^{-1})^T|$$

$$= \frac{1}{5^n}|A^{-1}| = \frac{1}{5^n}\cdot\frac{1}{5} = 5^{-n-1}.$$

【答案】 选 C.

3.【解析】 因为 $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$

而 $(A-B)(A+B) = A^2 + AB - BA - B^2$

注　矩阵的乘法不满足交换律.

【答案】 选 D.

4.【解析】 因为 A,B 为对称矩阵，即 $A^T = A, B^T = B$.

又　$(AB)^T = B^T A^T = BA$，

若 A 与 B 乘积可交换，即 $AB = BA$，则

$(AB)^T = BA = AB$，即 AB 为对称矩阵，

例如　$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{bmatrix}$ 为对称矩阵，

显然 $AB = \begin{bmatrix} a_1b_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2b_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3b_3 \end{bmatrix}$ 是对称矩阵，由于矩阵乘法不满足交换律，所以 AB 与 BA 不一定相等，所以 AB 不一定是对称矩阵.

【答案】 选 D.

5.【解析】 因为 $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$ 是 R^3 标准基，故 R^3 的任何一个向量都可由这组基线性表示，所以 B,C,D 都是错误的，而 A 是正确的.

【答案】 选 A.

6.【解析】 由教材中定理 3.6－1，若 n 元齐次线性方程组系数矩阵的秩 $r < n$，则该方程组有非零解，且存在基础解系，基础解系解向量的个数为 $n-r$，故 A,B,C 都不正确，只有 D 正确.

【答案】 选 D.

7.【解析】 线性无关的向量组不一定是正交向量组.

【答案】 选 C.

8.【解析】 设 λ 是 A 的特征值，X 是 A 关于 λ 的特征向量，由定义 $AX=\lambda X$

从而 $A(AX)=A(\lambda X)$ 即 $A^2X=\lambda AX=\lambda\cdot\lambda X=\lambda^2 X$

因 $A^2=A$，所以 $A^2X=AX$，即 $\lambda^2X=\lambda X$，$(\lambda^2-\lambda)X=0$，又 $X\neq 0$ 所以

$\lambda^2-\lambda=0$ 解得 $\lambda=0$ 或 $\lambda=1$.

【答案】 选 A.

9.【解析】 由定义，4 是这组数的中位数也是众数和极差，但不是这组数的平均数，因为这组数的平均数为 $\frac{27}{7}$

【答案】 选 A.

10.【解析】 因为 A 与 B 互不相容，所以 $AB=\varnothing$，从而 $P(AB)=0$，故选 C. 事实上若 A 与 B 为对立事件，则 $A\cup B=\Omega$ 从而 $P(A\cup B)=1$；而当 A 与 B 相互独立时，$P(AB)=P(A)\cdot P(B)$.

注 初学者应注意三者的区别.

【答案】 选 C.

11.【解析】 因为 $B-A=B$，即 $B\overline{A}=B$，而 $B\overline{A}=B-AB$，所以 $AB=\varnothing$.

【答案】 选 B.

12.【解析】 "至少有两个零件是废品"即指有两个废品或 3 个都是废品，所以应表示为 $\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3\cup\overline{A_1}A_2\overline{A_3}\cup A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}\cup\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$（或 $\overline{A_1}\,\overline{A_2}+\overline{A_1}\,\overline{A_3}+\overline{A_2}\,\overline{A_3}$），故 D 是错误的.

【答案】 选 D.

6

13.【解析】 甲、乙、丙有一个人击中则目标被击中，若用 A_1,A_2,A_3 分别表示甲、乙、丙击中目标，B 表示目标被击中，则 $B=A_1+A_2+A_3$.

〈方法 1〉

$$\begin{aligned}P(B)&=P(A_1+A_2+A_3)\\&=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3)\\&=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1)P(A_2)-P(A_1)P(A_3)-P(A_2)P(A_3)+\\&\quad P(A_1)P(A_2)P(A_3)\\&=0.5+0.6+0.7-0.5\times0.6-0.5\times0.7-0.6\times0.7+0.5\times0.6\times0.7\\&=0.94\end{aligned}$$

〈方法 2〉

$$\begin{aligned}P(\overline{B})&=P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3})=P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})\\&=[1-P(A_1)][1-P(A_2)][1-P(A_3)]\\&=(1-0.5)(1-0.6)(1-0.7)\\&=0.5\times0.4\times0.3=0.06\end{aligned}$$

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-0.06=0.94$$

【答案】 选 A.

14.【解析】 若 $\xi\sim N(\mu,\sigma^2)$ 则 $P(x_1<\xi<x_2)=\Phi\left(\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right)$，要求 $P(\xi\geqslant 1)$，因为 $P(\xi\geqslant1)=1-P(\xi<1)=1-\Phi\left(\frac{1-(-1)}{\sigma}\right)=1-\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right)$，故只需求 $\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right)$.

因为 $\xi\sim N(-1,\sigma^2)$，且 $P(-3\leqslant\xi\leqslant-1)=0.4$，

又 $P(-3\leqslant\xi\leqslant-1)=\Phi\left(\frac{-1-(-1)}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{-3-(-1)}{\sigma}\right)$

$$=\Phi(0)-\Phi\left(-\frac{2}{\sigma}\right)=\Phi(0)-\left[1-\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right)\right]=\Phi(0)-1+\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right)$$

$$=0.5-1+\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right)-0.5$$

所以 $\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right)-0.5=0.4,\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right)=0.9.$

故 $P(\xi\geqslant 1)=1-P(\xi<1)=1-\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right)=1-0.9=0.1.$

【答案】 选 A.

15.【解析】 因为 $\xi_i\sim P(\lambda),i=1,2$,从而 $E\xi_i=\lambda(i=1,2)$

$$E(\xi_1+\xi_2)=E\xi_1+E\xi_2=\lambda+\lambda=2\lambda,$$

$$E(2\xi_1)=2E\xi_1=2\lambda,$$

故 $\xi_1+\xi_2$ 与 $2\xi_1$ 的数学期望相同.

【答案】 选 B.

16.【解析】 $E\xi=\sum\limits_{k=1}^{\infty}k\frac{1}{\mathrm{e}k!}=\frac{1}{\mathrm{e}}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k-1)!}\xlongequal{令 k-1=m}\frac{1}{\mathrm{e}}\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}=\frac{1}{\mathrm{e}}\cdot\mathrm{e}=1.$

【答案】 选 C.

17.【解析】 因为 $X_i\sim N(0,1)$ 且相互独立($i=1,2,\cdots,n$). 则 $X_2^2+X_3^2+\cdots+X_n^2$ 和 X_1^2 分别服从自由度为 $n-1$ 和 1 的 χ^2 分布.

又 $$\frac{X_2^2+X_3^2+\cdots+X_n^2}{(n-1)X_1^2}=\frac{\frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=2}^{n}X_i^2}{X_1^2}\sim F(n-1,1)$$(见教材第 145 ～ 146 页).

【答案】 选 C.

18.**【答案】** 选 B.

19.【解析】 似然函数为

$$L=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2}}=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{-\frac{n}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2},\quad \ln L=-\frac{n}{2}\ln 2\pi-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

令 $$\frac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}\mu}=-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}2(x_i-\mu)\cdot(-1)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)=0$$

即 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i-n\mu=0$,所以 $\hat{\mu}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=\overline{x}.$

注 本题也可以直接利用已有的结论:

若总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,则样本均值 $\overline{X}$ 即是 μ 的矩估计也是极大似然估计.

【答案】 选 A.

20.**【答案】** 选 A.

二、简答题

1.【解析】 判断矩阵 A 为非奇异矩阵,只需证明 $|A|\neq 0$ 即可.

【答案】 $A+B$ 未必是非奇异矩阵,AB 必为非奇异矩阵.

设 A 为非奇异矩阵,若取 $B=-A$,则 B 也是非奇异矩阵,但 $A+B=0$ 是奇异矩阵,即 $A+B$ 未必是非奇异矩阵.

7

若 A、B 是同阶非奇异阵，则 $|A|\neq 0$，$|B|\neq 0$，从而 $|AB|=|A|\cdot|B|\neq 0$ 所以 AB 必为非奇异矩阵.

2.【解析】 当 $r(\widetilde{A})=r(A)$ 时方程组有解，故只需求 a 值使 $r(\widetilde{A})=r(A)$.

【答案】

$$\widetilde{A}=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\-2&0&1&-1\\1&3&4&a\end{bmatrix}\xrightarrow{(2)(-1)}\begin{bmatrix}1&1&1&0\\0&2&3&-1\\0&2&3&a\end{bmatrix}\xrightarrow{(-1)}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&1&0\\0&2&3&-1\\0&0&0&a+1\end{bmatrix}$$

故当 $a+1=0$ 即 $a=-1$ 时，$r(\widetilde{A})=r(A)$，从而方程组有解.

3.【解析】 这是 n 重贝努里试验，其中 $n=5$.

【答案】

$$(1)p_1=b(2;5,0.7)=C_5^2\cdot\left(\frac{7}{10}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{10}\right)^3=0.1323.$$

$$(2)p_2=1-C_5^0\left(\frac{7}{10}\right)^0\left(\frac{3}{10}\right)^5-C_5^1\left(\frac{7}{10}\right)^1\cdot\left(\frac{3}{10}\right)^4=0.96922.$$

4.【答案】 对.

因为置信区间长度为 $L=2Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

当 α 增大时，$Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ 减小，从而 L 减小，故置信区间的长度是 α 的减函数.

8

三、计算题

1.【解析】 由于该向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是三个三维向量组，所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关的充分必要条件是以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为列(或行)构成的行列式 $D=0$，或该向量组的秩 <3，故只需求 t 值使 $D=0$ 或使秩$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)<3$.

【答案】

〈方法 1〉 以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为列作行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&1&5\\1&3&3\\0&-1&t\end{vmatrix}\xrightarrow{(-1)}=\begin{vmatrix}1&1&5\\0&2&-2\\0&-1&t\end{vmatrix}=2t-2$$

令 $D=0$ 得 $2t-2=0$，$t=1$，即当 $t=1$ 时该向量组线性相关.

〈方法 2〉 以 α_1、α_2、α_3 为列作矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1&1&5\\1&3&3\\0&-1&t\end{bmatrix}\xrightarrow{(-1)}\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&5\\0&2&-2\\0&-1&t\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&5\\0&-1&t\\0&2&-2\end{bmatrix}\xrightarrow{(2)}\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&5\\0&-1&t\\0&0&2t-2\end{bmatrix}$$

当 $2t-2=0$ 即 $t=1$ 时，$r(A)=2<3$ 即向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的秩 <3，从而该向量组线性相关.

2.【解析】 只需使用全概率公式和贝叶斯公式

设 A_i 表示“第 i 台车床加工的产品”$(i=1,2)$，B 表示“取得合格品”

则 $P(A_1)=\dfrac{2}{3}$，$P(A_2)=\dfrac{1}{3}$.

$P(\overline{B}/A_1)=0.03$ ，$P(\overline{B}/A_2)=0.02$.

【答案】

(1) 由全概率公式

$$P(B)=P(A_1)P(B/A_1)+P(A_2)P(B/A_2)$$
$$=\frac{2}{3}\times(1-0.03)+\frac{1}{3}\times(1-0.02)=0.9733$$

即任取一个零件是合格品的概率为 0.9733.

(2) 由贝叶斯公式

$$P(A_2/\overline{B})=\frac{P(A_2)P(\overline{B}/A_2)}{P(\overline{B})}=\frac{\frac{1}{3}\times 0.02}{1-0.9733}=0.2497.$$

即如果取得废品，则它是由第二台加工的概率为 0.2497.

3.**【答案】**

(1) 提出零假设 $H_0:\mu=\mu_0=0.5$，对 $H_1:\mu\neq\mu_0=0.5$

(2) 检验法：$Z-$检验法

(3) 统计量：$Z=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_0}\sqrt{n}$

(4) 拒绝域：$|Z|>Z_{1-\frac{\alpha}{2}}=Z_{0.995}=2.58$

(5) 判断：统计量的样本值 $Z=\dfrac{0.53-0.50}{0.11}\times\sqrt{121}=3$

因为 $|Z|=3>2.58$，所以拒绝 H_0，接受 H_1.

4.**【答案】**

$$\overline{x}=\frac{1}{4}(41+41+42+44)=42,$$

$$\overline{y}=\frac{1}{4}(47+48+46+43)=46,$$

$$l_{yy}=\sum_{i=1}^{4}(y_i-\overline{y})^2=(47-46)^2+(48-46)^2+(46-46)^2+(43-46)^2$$
$$=1^2+2^2+0^2+(-3)^2=14,$$

$$l_{xy}=\sum_{i=1}^{4}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})$$
$$=(41-42)(47-46)+(41-42)(48-46)+(42-42)(46-46)+(44-42)(43-46)$$
$$=-1-2+0-6=-9,$$

$$\hat{b}=\frac{l_{xy}}{l_{yy}}=\frac{-9}{14}=-0.643,$$

$$\hat{a}=\overline{x}-\hat{b}\,\overline{y}=42+0.643\times 46=71.578.$$

故 x 对 y 的线性回归方程为

$$\hat{x}=\hat{a}+\hat{b}y=71.578-0.643y.$$

9

四、证明题

1.【解析】 要证明 AB 是正交矩阵，只需证明

$$(AB)(AB)' = I.$$

【证明】 因为 A,B 是正交矩阵，所以 $AA' = I, BB' = I$.

从而 $(AB)(AB)' = ABB'A' = A(BB')A' = AIA' = AA' = I$

所以 AB 为正交矩阵.

2.【解析】 要证明 $Z = aS_1^2 + bS_2^2$ 是 σ^2 的无偏估计只需证明 $E[Z] = \sigma^2$.

【证明】 因为 $E[S_1^2] = \sigma^2, E[S_2^2] = \sigma^2$

所以 $E[Z] = E[aS_1^2 + bS_2^2] = aE[S_1^2] + bE[S_2^2]$

$= a\sigma^2 + b\sigma^2 = (a+b)\sigma^2 = \sigma^2 (\because \quad a+b=1)$

故 $Z = aS_1^2 + bS_2^2$ 是 σ^2 的无偏估计.

五、综合应用题

1.【解析】 要判断该二次型是正定的，只需证明矩阵 A 为正定矩阵，即确定 a 的值，使 A 的各阶顺序主子式都大于零.

【答案】 由于 A 是三阶对称矩阵，故 A 对应的二次型为三元二次型，即

$$f(x_1,x_2,x_3) = (x_1,x_2,x_3)\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2 \\ x_3\end{bmatrix} = x_1^2 + 2x_1x_2 + ax_2^2 + a^2x_3^2.$$

注 也可由 A 直接写，即 A 的主对角线上的元素为二次项系数，$a_{ij} = a_{ji}$ 为 x_ix_j 的系数的一半，于是 $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + ax_2^2 + a^2x_3^2 + 2x_1x_2$

因为 f 为正定二次型的充分必要条件是 A 的各阶顺序主子式都大于 0，即

$$\Delta_1 = 1 > 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix}1 & 1 \\ 1 & a\end{vmatrix} = a - 1 > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix}1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a^2\end{vmatrix} = a^2\begin{vmatrix}1 & 1 \\ 1 & a\end{vmatrix} = a^2(a-1) > 0,\ \text{得 } a > 1$$

故当 $a > 1$ 时，该二次型为正定二次型.

2.**【答案】**

(1) 由 $F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1$ 得

$$\lim_{x\to-\infty}(A + B\arctan x) = A - \frac{\pi}{2}B = 0,\ \lim_{x\to+\infty}(A + B\arctan x) = A + \frac{\pi}{2}B = 1$$

解得 $A = \frac{1}{2}, B = \frac{1}{\pi}$，故 $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan x$.

$$(2)\ P(-1 < \xi < 1) = F(1) - F(-1) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan 1\right) - \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan(-1)\right]$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

(3) ξ 的密度函数为

$$p(x) = F'(x) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan x\right)' = \frac{1}{\pi(1+x^2)},(-\infty < x < +\infty)$$

2000年下半年高等教育自学考试全国统一命题考试

高等数学(二)试卷

第一部分　选择题(共40分)

一、单项选择题(本大题共20小题,每小题2分,共40分)在每小题列出的四个选项中只有一个是符合题目要求的,请将正确选项前的字母填在题后的括号内。

1. 三阶行列式 $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 503 & 201 & 298 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}=$

A. 63　　B. 70　　C. -70　　D. 82　　【　】

2. $|A|\neq 0$ 是矩阵 A 可逆的

A. 充分条件　　B. 必要条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也非必要的条件　　【　】

3. 设 A 为 n 阶方阵,则方阵____为对称矩阵.

A. $A-A'$,A' 表 A 的转置　　B. CAC',C 为任意 n 阶方阵

C. AA'　　D. $(AA')B$,B 为 n 阶对称方阵　　【　】

4. 设 A、B、C 是 n 阶方阵,下列结论正确的是

A. $AB=BC$　　B. 若 $A^2=0$,则 $A=0$

C. $A+B=B+A$　　D. 若 $AB=AC$,则 $B=C$　　【　】

5. 实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X'AX$ 为正定的充分必要条件是

A. f 的秩为 n　　B. f 的正惯性指数等于 f 的秩

C. f 的正惯性指数为 n　　D. f 的负惯性指数为零　　【　】

6. 矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 是下列二次型中____的矩阵.

A. $f(x_1,x_2)=x_1^2-2x_1x_2+3x_2^2$

B. $f(x_1,x_2)=x_1^2-x_1x_2+3x_2^2$

C. $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_1x_2+3x_2^2$

D. $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_1x_2-x_2x_3+3x_2^2$　　【　】

7. $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 是 n 维向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 的极大无关组,则

A. $r\leqslant n$　　B. $r<n$　　C. $r<m$　　D. $r\geqslant m$　　【　】

8. $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_8$ 是6维向量组,则

A. $\alpha_1,\cdots,\alpha_8$ 线性无关

B. $\alpha_1,\cdots,\alpha_8$ 中至少有2个向量可由其余向量线性表出

C. $\alpha_1,\cdots,\alpha_8$ 中至少有4个向量可由其余向量线性表出

D. $\alpha_1,\cdots,\alpha_8$ 中只有1个向量可由其余向量线性表出　　【　】

9. 如果所得的数据是连续型随机变量的观测值,则累积频率函数图是____的近似曲线.

A. 密度函数　　B. 分布函数　　C. 数据　　D. 方差　　【　】

10. A、B 为两事件，则 $A-B$ 不等于

A. $\overline{A}B$　　B. $A\overline{B}$　　C. $A-AB$　　D. $(A\cup B)-B$　　【　】

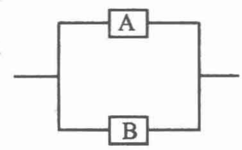
11. 已知事件 A 与 B 相互独立，$P(\overline{A})=0.5$，$P(\overline{B})=0.6$，则 $P(A\cup B)$ 等于

A. 0.9　　B. 0.7　　C. 0.1　　D. 0.2　　【　】

12. 甲、乙、丙三人独立地译一密码，他们每人译出此密码的概率都是 0.25，则密码被译出的概率为

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{64}$　　C. $\frac{37}{64}$　　D. $\frac{63}{64}$　　【　】

13. 设线路由 A、B 两元件并联组成（如右图），A、B 元件独立工作，A 正常工作的概率为 p，而 B 正常工作的概率为 q，则此线路工作正常的概率为



A. pq　　B. $p+q$

C. $p+q-pq$　　D. $1-pq$　　【　】

14. 极大似然估计必然是

A. 矩估计　　B. 似然函数的极值点

C. 似然方程的根　　D. 无偏估计　　【　】

15. 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，其中 σ^2 未知，随机抽样得到的样本方差为 100. 若要对其均值 μ 进行检验，则采用

12

A. Z— 检验法　　B. χ^2— 检验法

C. F— 检验法　　D. t— 检验法　　【　】

16. 设随机变量 ξ 的分布列为

ξ	1	2	4
概率	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	α

则常数 $\alpha=$

A. $\frac{1}{8}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{2}$　　【　】

17. 在相同条件下，相互独立地进行 5 次射击，每次射击时命中目标的概率为 0.6，则击中目标的次数 ξ 的概率分布为

A. 二项分布 $B(5,0.6)$　　B. 普阿松分布 $P(2)$

C. 均匀分布 $U[0.6,3]$　　D. 正态分布 $N(3,5^2)$　　【　】

18. 设 ξ 服从普阿松分布 $P(3)$，则有 $\frac{D\xi}{E\xi}=$

A. $\frac{1}{9}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. 1　　D. 3　　【　】

19. 已知随机变量 $\xi\sim B(6,0.4)$，则 $E\xi$，$D\xi$ 的值为

A. $E\xi=2.4$，$D\xi=1.44$　　B. $E\xi=2.4$，$D\xi=0.96$

C. $E\xi=3.6$，$D\xi=1.44$　　D. $E\xi=3.6$，$D\xi=2.16$　　【　】

20. 两个相互独立的随机变量 ξ 和 η 的方差分别为 4 和 2，则随机变量 $3\xi-2\eta$ 的方差是

A. 8　　B. 16　　C. 28　　D. 44　　【　】