

—— — — — — — — — 经济转型与创新发展论丛

隐式多项式曲线 理论与应用

吴 刚 著



南京大学出版社

----- 经济转型与创新发展论丛

隐式多项式曲线 理论与应用

吴 刚 著



南京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

隐式多项式曲线的理论及应用 / 吴刚著. —南京:
南京大学出版社, 2011.12

ISBN 978 - 7 - 305 - 08902 - 2

I. ①隐… II. ①吴… III. ①多项式—曲线论
IV. ①0186.11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 198257 号

出版发行 南京大学出版社

社 址 南京市汉口路 22 号 邮 编 210093

网 址 <http://www.NjupCo.com>

出 版 人 左 健

丛 书 名 经济转型与创新发 展论丛

书 名 隐式多项式曲线的理论及应用

著 者 吴 刚

责任编辑 王日俊 梁 颖 编辑热线 025 - 83592193

照 排 南京紫藤制版印务中心

印 刷 南京大众新科技印刷有限公司

开 本 880×1230 1/32 印张 6.875 字数 220 千

版 次 2011 年 12 月第 1 版 2011 年 12 月第 1 次印刷

ISBN 978 - 7 - 305 - 08902 - 2

定 价 28.00 元

发行热线 025 - 83594756

电子邮箱 Press@NjupCo.com

Sales@NjupCo.com(市场部)

* 版权所有,侵权必究

* 凡购买南大版图书,如有印装质量问题,请与所购
图书销售部门联系调换

本书受江苏省基础 Research 计划（自然科学基金）项目（BK2009349）和江苏省普通高校自然科学研究项目（09KJB520005）、江苏高校优势学科建设工程资助项目和江苏现代服务业研究院专项科研基金项目的研究成果。

本书出版获得江苏高校优势学科建设工程资助项目支持。

前 言

隐式多项式曲线和曲面，特别是高次隐式多项式曲线和曲面用来作为物体的几何模型越来越受到重视。隐式多项式曲线对物体描述非常有效，与显式函数曲线、样条曲线以及其他形状描述方法相比具有许多优点，主要表现在：

通过用很少数目的参数就能够描述不规则形状的物体，物体的描述仅仅取决于其数据集合是否被隐式多项式曲线很好的拟合；拟合的隐式多项式曲线对物体边界数据集合的噪声和边界一些轻微变化不敏感；隐式多项式曲线的稳定性和其不变量的鲁棒性可用来快速有效的识别物体；很容易实现将实体空间的变换操作表达为隐式多项式曲线方程的代数运算，例如，两个物体的组合对应为它们相应的隐式多项式曲线方程的乘积；拟合含有噪声数据的封闭隐式多项式曲线算法复杂度较小，许多线性方法很容易实现，拟合的效果也非常好。

隐式多项式曲线和曲面还可以广泛的应用于商业数据处理，数据挖掘以及时间序列数据的相似性分析和预测中。

本书是作者在总结多年科研成果的基础上撰写的。全书系统的研究了隐式多项式曲线基本性质以及物体建模理论，主要包括隐式多项式曲线的封闭有界性理论；隐式多项式曲线的连通性理论；给出了一般隐式多项式曲线有效描述物体的数学理论基础，在此基础上研究了隐式多项式曲线对物体的拟合算法；提出了隐式多项式曲线次数确定理论，讨论了各种拟合算法的优缺点。基于隐式多项式曲线理论提出了隐式多项式曲线的几何不变量，并研究了这些不变量在物体识别中的应用，另外，借助隐式多项式曲线研究了物体对称性检测的几何以及代数检测方法。对于隐式多项式曲面也作了一些相应的研究。最后一章，借助椭圆，研究

物体的标定和三维重建问题。本书参考了一些国内外学者的研究成果，所有的引用都作了注明，并在参考文献中列出了详细的出处。

本书大多数算法都使用 Matlab 编程实现，初步形成了具有图像边缘轮廓的提取，平滑，标准化，隐式多项式曲线次数确定，曲线拟合，曲线精确性描述检验，不变量计算，一维和二维数据变换，数据相似度计算，物体识别以及对称性检测等一系列功能的应用软件。如果需要这些程序，可以发电子邮件 wu-gang69@gmail. com 索取。

本书研究成果在机器人、计算机视觉、计算机图形学、三维重建、虚拟现实以及模式识别、目标物体的跟踪，图像数据库检索和图像压缩以及时间序列数据处理，数据挖掘都有望得到应用。一些算法和程序可以为这些领域的科技人员参考。

由于学识和时间所限，许多结论或者实验可能存在疏漏、缺陷或者错误，希望同行专家、读者批评指正。

目 录

第一章 隐式多项式曲线基本理论	1
第一节 代数曲线理论	1
第二节 隐式多项式曲线几何含义	3
第三节 二次隐式多项式曲线性质以及应用	5
第四节 超二次隐式多项式曲线性质以及应用	7
第五节 隐式多项式曲线曲面代数性质	9
第六节 隐式多项式曲线描述的紧密性	15
第七节 隐式多项式曲线上点与系数的关系	22
第八节 隐式多项式曲面的性质	26
第九节 基于隐式多项式曲面的曲线连通性研究	27
第二章 隐式多项式曲线的物体描述	34
第一节 隐式多项式曲线的物体描述	34
第二节 隐式多项式曲线拟合概论	36
第三节 曲线拟合数据的预处理	39
第四节 隐式多项式曲线模型的确定	42
第五节 隐式多项式曲线拟合算法	54
第六节 隐式多项式曲面拟合算法及曲线误差分析	80
第七节 隐式多项式曲线的物体描述应用	83
第三章 隐式多项式曲线不变量理论	101
第一节 不变量进展	101
第二节 不变量理论	102
第三节 变换群的一些性质	107
第四节 二次和四次隐式多项式曲线代数不变量	108
第五节 隐式多项式分解的不变性理论	112
第六节 首二次因子积中二次因子的性质	115

第七节	隐式多项式曲线不变量的应用	115
第四章	隐式多项式曲线在物体识别中的应用	120
第一节	不变量在物体识别中的应用	120
第二节	隐式多项式曲线的欧氏不变量	122
第三节	隐式多项式曲线的仿射不变量	133
第四节	隐式多项式曲线的射影不变量	138
第五节	基于隐式多项式曲线不变量的物体识别	139
第五章	隐式多项式曲线在对称性检测中的应用	141
第一节	对称性检测进展	141
第二节	几种对称性的数学定义	142
第三节	对称性检测方法	144
第四节	基于隐式多项式曲线的对称性检测	147
第五节	描述物体的隐式多项式曲线对称性几何特征	155
第六节	隐式多项式曲线对称性检测的代数求解	158
第六章	隐式多项式曲线在图像理解中的应用	163
第一节	从二维图像重建三维物体的曲线和曲面	163
第二节	一元多项式曲线的重建	166
第三节	隐式多项式曲线的透视不变性	174
第四节	基于隐式多项式曲线的摄像机定标	175
第五节	单点透视下正交线段比	191
第六节	单点透视下物体重建应用	194
第七节	隐式多项式曲线的重建	196
参考文献		199

【第一章】

隐式多项式曲线基本理论

第一节 代数曲线理论

代数曲线是代数几何的一个分支，一般代数曲线讨论的是复射影平面上的代数曲线，将代数曲线或者代数曲面应用到实际物体描述的时候，要求它们的系数是实数。本节简要的介绍代数曲线的一些基本概念和性质。

一、代数曲线的定义

定义 1.1 代数曲线是一个平面曲线，在直角坐标系 $(O-XY)$ 中，曲线方程可表示为

$$f_n(x, y) = \sum_{i+j \leq n, i, j \geq 0} a_{ij} x^i y^j = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \cdots + a_{n0}x^n + a_{n-1}x^{n-1}y + \cdots + a_{0n}y^n = 0 \quad (1.1)$$

上式也可以写成向量的形式，这种写法在以后的曲线拟合中很有用。也就是将系数和变元项写成向量形式

$$\text{记 } A^T = (a_{00} \ a_{10} \cdots \ a_{1n-1} \ a_{0n}), \quad X^T = (1 \ x \ \cdots \ x^{n-1}y \ y^n) \text{ 那么}$$

$$f_n(x, y) = A^T X \quad (1.1a)$$

一般代数曲线讨论的是复射影平面上的代数曲线，也就是 (1.1) 式的系数 a_{ij} ($i, j=1 \cdots n$) 为复数。

将 (1.1) 式使用变量代换: $x = x'/z, y = y'/z$, 则式 (1.1) 可以写作

$$f_n(x', y', z) = h_n(x', y') + h_{n-1}(x', y')z + \cdots + h_0 z^n = 0, \text{ 将 } x', y' \text{ 使用 } x, y \text{ 代替, 则式 (1.1) 可以写作}$$

$$f_n(x, y, z) = h_n(x, y) + h_{n-1}(x, y)z + \cdots + h_0z^n = 0 \quad (1.2)$$

$h_k(x, y, z)$ 称为 k 次齐次多项式。称式 (1.2) 为代数曲线的齐次方程。

二、代数曲线的一些性质

以下定理 1.1—1.5 都是参考文献 [2] 介绍的内容, 为了以后的应用方便和文章的完整性, 对代数曲线的一些性质进行简单的描述, 省略了具体证明, 有兴趣的读者可以参考该文献相关章节的证明。

定理 1.1 对于任一个不可约复射影平面 (P^2C) 上的代数曲线, 存在一个紧 Riemann 面 $\tilde{C}$ 和一个全纯映射 $\sigma: \tilde{C} \rightarrow P^2C$, 使得 $\sigma(\tilde{C}) = C$, 并且 σ 在 C 的光滑点之上是一对一的。

定义 1.2 正则化: 定理 1.1 中的紧 Riemann 面和全纯映射一起成为代数曲线的正则化。这样同时也说明对代数曲线的研究可以转化为对 Riemann 面的研究。

关于 Riemann 曲面的一些知识可以参考文献 [118], 这是一本关于 Riemann 曲面的专著, 文献 [2] 的部分章节对 Riemann 曲面也作了简要的介绍。

定义 1.3 奇点: 对于式 (1.1), 使

$$\frac{\partial f_n(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial f_n(x, y)}{\partial y} = 0 \quad (1.3)$$

成立的点称为奇点。

定理 1.2 不可约平面代数曲线 C 至多只有有限多个奇点。

该定理保证了代数曲线奇点数目是可以计算出来的, 这将为以后的代数曲线的次数确定提供理论基础。

定理 1.3 (Bezout) 设平面代数曲线 C 和 E 无共同的曲线分支, 也就是 C 和 E 的方程的左端无公因式, 那么

$$(C \cdot E) = \sum_{p \in C \cap E} (C \cdot E)_p = \deg(C) \cdot \deg(E). \quad (1.4)$$

文献 [2] 对于 Bezout 定理的描述主要考虑的是复平面上的

情况。如果是在实平面上,则可以描述为:如果 n 次二元多项式和 m 次二元多项式没有公因子,则在坐标平面内,它们的零集合(分别记为 C_n 和 C_m)至多有 nm 个交点。

定理 1.4 设 $C \subset \mathbb{P}^2$ 是 d 次不可约代数曲线,它的 δ 个奇点都是通常二重点; $\sigma: \tilde{C} \rightarrow C$ 是其正则化, $\tilde{C}$ 的亏格为 g 。则有如下公式

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \delta \quad (1.5)$$

此处介绍的定理在代数几何中称为亏格公式,可以发现该公式将代数曲线的拓扑不变量 g , 代数曲线次数 d 以及奇点数目 δ 之间的关系表达出来,这对于根据拓扑不变量和奇点数目确定代数曲线次数十分有意义。我们将在第二章进一步介绍。

定理 1.5 设 C 是一个亏格为 g 的紧 Riemann 面, $D = \sum_{i=1}^k n_i p_i \in \text{Div}(C)$, $V(D) = \{f \in K(C) \mid (f) + D \geq 0\}$, $W(D) = \{\omega \in K^1(C) \mid (\omega) \geq D\}$, 令 $l(D)$ 表示 $V(D)$ 的维数, $i(D)$ 表示 $W(D)$ 的维数, d 为 D 的次数。则

$$l(D) = d - g + i(D) + 1 \quad (1.6)$$

定理 1.5 是著名的 Riemann-Roch 定理,根据这个定理,从亏格为 0, 1, 2, ... 紧 Riemann 曲面入手可以找到具体的紧 Riemann 曲面,这对分析研究代数曲线十分有意义。

第二节 隐式多项式曲线几何含义

隐式多项式曲线是一种特殊的代数曲线。这种代数曲线的研究有现实的基础背景,主要是用来对平面物体进行建模。对于一般的二维平面物体,其形状一般都是封闭的、有界的,同时也是互相连通的。显然必须用封闭的、有界的并且连通的代数曲线才能精确描述其形状。显然研究的这种代数曲线是在实数域而不是在复数域上。

对于实数域上的代数曲线,如果其几何形状是封闭的,同时

又是互相连通的，我们称隐式多项式曲线描述数据边界是有效的。隐式多项式曲线和代数曲线一个很重要的区别是代数曲线是代数曲面和坐标平面的交线，而隐式多项式曲线是一个二元函数曲线，同时，我们更关注隐式多项式曲线有界性，连通性和正则性。

上面给出的隐式多项式曲线描述数据的有效性仅仅从几何角度上作了分析说明，至于精确的代数定义和性质，将在后面给出详细的证明和论证。图 1.1 分别给出了一个心状物体边缘轮廓的四种隐式多项式曲线表达，是使用四次隐式多项式曲线拟合的结果，图 1.1 (a)，(b)，(c)，(d) 的四个隐式多项式分别为

$$\begin{aligned} f_1(x, y) = & x^4 + 0.02x^3y + 1.1751x^2y^2 - 0.0771xy^3 + 0.3175y^4 \\ & - 0.0143x^3 + 0.4624x^2y + 0.0391xy^2 - 0.2808y^3 \\ & - 1.9771x^2 + 0.0628xy - 0.4918y^2 - 0.0099x \\ & + 0.1555y - 0.0161 \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} f_2(x, y) = & x^4 - 0.229x^3y + 1.4423x^2y^2 - 1.1334xy^3 - 0.0221y^4 \\ & - 0.6435x^3 + 0.6394x^2y - 0.2396xy^2 + 0.4062y^3 \\ & - 1.0695x^2 + 1.1608xy + 0.5069y^2 + 1.3208x \\ & - 1.0568y - 1.9367 \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} f_3(x, y) = & x^4 - 0.1002x^3y + 0.6551x^2y^2 - 0.0694xy^3 + 0.076y^4 \\ & - 0.0793x^3 + 0.3466x^2y + 0.1444xy^2 - 0.0817y^3 \\ & - 1.9549x^2 + 0.0508xy + 0.0054y^2 - 0.016x \\ & - 0.0236y + 0.0538 \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} f_4(x, y) = & x^4 - 0.1215x^3y + 1.0961x^2y^2 + 0.0782xy^3 - 0.088y^4 \\ & - 0.1038x^3 + 0.5163x^2y + 0.0424xy^2 - 0.1365y^3 \\ & - 2.0385x^2 - 0.1329xy + 0.1059y^2 - 0.0426x \\ & + 0.0742y + 0.0775 \end{aligned} \quad (1.10)$$

图 1.1 (a) 和 (b) 中比较粗糙的线条是原始图像边缘轮廓，而光滑的曲线是四次隐式多项式曲线图形。很明显图 (a) 最好，也就是方程 $f_1(x, y) = 0$ 图形几乎和心状图图形的轮廓重合，因而 $f_1(x, y) = 0$ 曲线很好的描述了心状图形，可以观察到，该图形是封闭的，有界的，同时也是连通的。但是图形 1.1 (b) 是无界的，图 (c) 虽然有界但是不连通，图

(d) 不连通, 同时也无界。从这几幅图形分析可以观察到, 只有图 1.1 (a) 很好的描述了物体轮廓, 而其他 $f_2(x, y) = 0$, $f_3(x, y) = 0$ 和 $f_3(x, y) = 0$ 这三条隐式多项式曲线都不同时满足有界, 封闭和连通这三个条件。因而无法很好的描述物体轮廓。为了研究物体的隐式多项式曲线表达建模, 就必须研究隐式多项式曲线的代数特征以满足上面的三个条件。

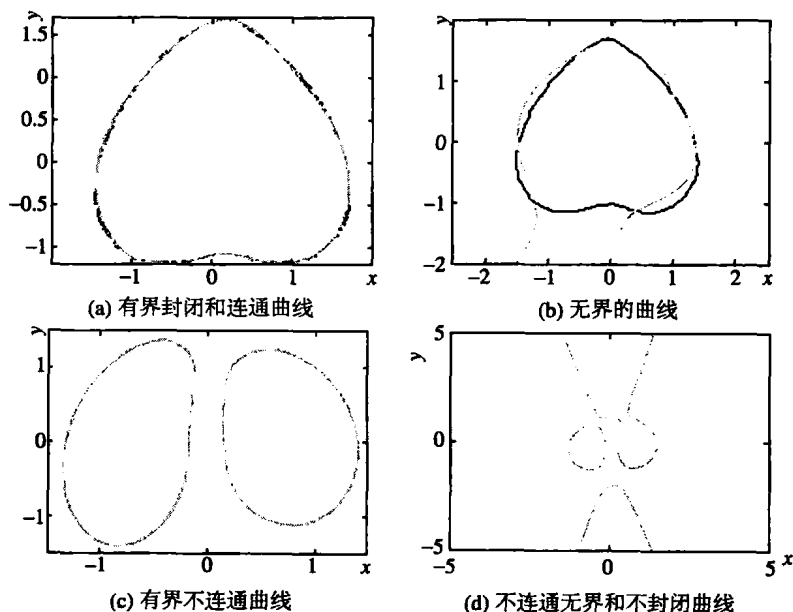


图 1.1 心状物体以及隐式多项式曲线描述

图 1.1 (a) 是封闭有界和连通的隐式多项式曲线, 在本章的第五节有详细的定理指出其充分必要条件, 这为隐式多项式曲线描述物体的有效性提供了依据。同时也为隐式多项式曲线的应用以及隐式多项式曲面的推广提供了理论基础。

第三节 二次隐式多项式曲线性质以及应用

二次曲线描述物体最常见的是圆, 对于用单位圆描述物体,

一个点 (x, y) 在圆内的充分必要条件是 $x^2 + y^2 - 1 < 0$ 。其他的物体也可以用二次曲线中的椭圆来描述，但是双曲线和抛物线不能用来描述边界封闭的物体，因为这两种曲线不是有界的。如果用一条隐式多项式 $f(x, y) = 0$ 曲线来描述一个边界集合为 B 的物体 O ，那么应满足下面的条件：

集合 $\{(x, y) \mid f(x, y) = 0\}$ 等于集合 B ；

点 $(x, y) \in O$ 当且仅当 $f(x, y) < 0$ 。

对于一个二元隐式多项式 $f(x, y)$ ，集合 $\{(x, y) \mid f(x, y) = 0\}$ 为多项式 $f(x, y)$ 的零集合，显然也是 $f(x, y) = 0$ 曲线上所有的点，例如二次多项式 $x^2 + y^2 - 1$ 的零集合是一个单位圆。

用二次曲线描述封闭有界的物体时，二次曲线必须满足一定的条件才能保证二次曲线是封闭有界的，事实上满足这个条件的二次曲线正是椭圆。

定理 1.6^[1] 一条二次曲线 $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ 为椭圆曲线的充分必要条件是 $ac - \frac{1}{4}b^2 > 0$ 。

该定理的证明可参考文献 [1]，将 $ax^2 + bxy + cy^2$ 写成如下形式：

$$X \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} X^T$$

其中 $X = (x, y)$ ，由 $ac - \frac{1}{4}b^2 > 0$ ，可知上面二次型正定，也就是对于任意的 x, y ，都有 $ax^2 + bxy + cy^2 > 0$ 恒成立。此处若 $a < 0$ ， $f(x, y) = 0$ 两边同乘 -1 即可。

在用二次曲线拟合物体边界时可以将此条件作为约束条件拟合出椭圆。文献 [93] 等给出了利用二次曲线描述识别物体应用例子，由于根据二次曲线很容易求出物体在各种变换下的不变量，尤其是二次曲线在射影变换下仍是二次曲线，因而对物体边界用二次曲线描述以后，很容易求出其不变量用以识别目标物体。

用一条二次曲线表示一个平面物体的复杂边缘曲线，很难体

现该边缘曲线的形状特征，文献 [29] 给出一个示例。图 1.2 (a) 所示的是一条较复杂的机械零件的封闭边缘曲线，用二次曲线表达如图 1.2 (b) 所示。显然，该二次曲线并没有充分表示原曲线的形状特点，很可能出现完全不同的物体，它们的二次曲线表达却是相同的。

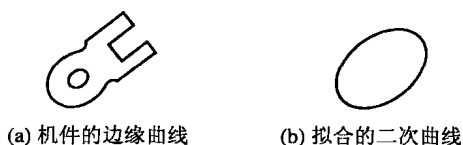


图 1.2 机件的二次曲线描述^[29]

事实上，完全可以使用更高次数的隐式多项式曲线来描述该物体，从而刻画出该物体的局部轮廓细节，次数越高，拟合精度越好，物体的细节表达的就越是清晰。分析图 1.1 和图 1.2 可以比较得出，图 1.1 的四次隐式多项式曲线就较好的刻画了心状图的下边的凸起，如果使用二次椭圆刻画就无法达到这种效果。

第四节 超二次隐式多项式曲线性质以及应用

为了能描述较为复杂的物体，如物体边缘曲线有较为尖锐的拐角点，曲线曲率变化复杂等情况，许多文献 [30] 用超二次曲线描述物体。超二次曲线实际上是一种非多项式曲线，它是椭圆型曲线的一种推广。在平面上，所有的超二次曲线都能够由扭曲圆的尺度变换、旋转变换和平移变换获得。超二次曲线方程所表示的点集合的标准形式为

$$C_{\lambda} = \{ (x, y) \mid x^{\lambda} + y^{\lambda} = 1 \}$$

其中 λ 为实数，当 $\lambda=2$ 时， C_{λ} 表示一个圆；当 $\lambda>2$ 时， C_{λ} 表示一个向外凸出的圆，随着 λ 的增大， C_{λ} 趋近一个单位正方形，如图 1.3 (c) 和 (d) 所示；当 $\lambda<2$ 时， C_{λ} 表示一个非凸的星状图，如图 1.3 (a) 和 (b) 所示；当 $\lambda=1$ 时， C_{λ} 即表示一条直线。

超二次曲线能够描述较为复杂的目标曲线，而其系数参数最

多只有 6 个，因而和二次曲线相比有更强的描述能力，但是它仍有很大的局限性：超二次曲线是一种对称图形，而事实上现实世界的大多数物体并非都是对称的，它只有四个拐角点，显然很难用来描述一般的物体曲线。

通过上面分析，可以发现超二次曲线是对称的，有四个拐角点的一种特殊的隐式多项式曲线，尤其当 $\lambda < 2$ 时，图形表现十分尖锐的拐角点，这是通常的隐式多项式曲线所不具备的。文献 [30] 等推广这种多项式曲线

$$C_\lambda = \{(x, y) \mid \sum_{0 < f(\lambda) < \pi} x^{f(\lambda)} y^{n-f(\lambda)} = 1\}$$

这种曲线就不一定是对称曲线，克服了超二次曲线的一些缺点，但是不容易控制，而且较为复杂，尤其是不能使用一些成熟的现代数学工具，而对于一般高次隐式多项式曲线，其每一项的次数都为整数，很容易应用代数几何尤其是代数曲线和微分几何的一些理论性质，同时也方便应用。

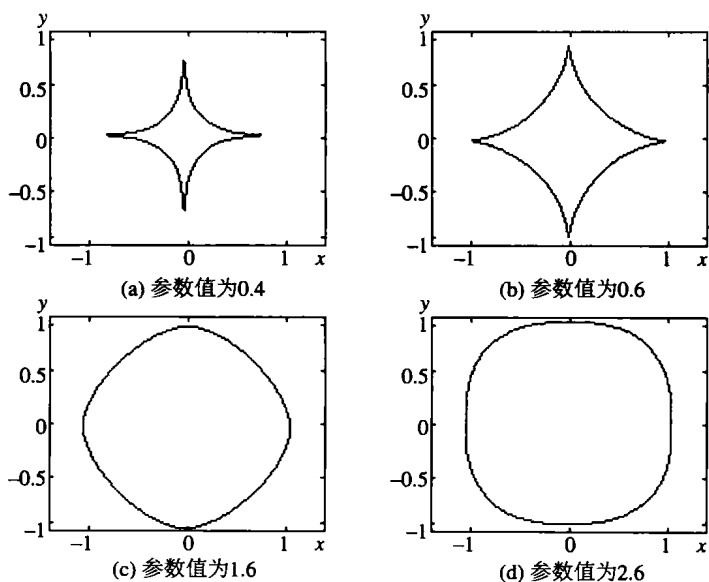


图 1.3 超二次曲线的目标描述^[30]

第五节 隐式多项式曲线曲面代数性质

隐式多项式曲线是一种平面曲线，也是一种特殊的代数曲线，本章第二节从几何含义上对其作了描述，下面给出隐式多项式曲线的首齐次项的定义。

定义 1.4 式 1.2 中的 $h_n(x, y)$ 称为 $f_n(x, y)$ 的首齐次项。

上面几节由于物体的边界形状都是封闭的、有界的，因而必须用满足一定条件的隐式多项式曲线方程才能较为精确的描述。

(一) 四次隐式多项式曲线的代数性质

用四次隐式多项式曲线描述物体有许多优点，因为它的系数较少，但是却能描述许多相对较为复杂的物体边缘曲线，其曲线方程的首齐次项可以用矩阵较为简洁的表达，这为曲线的拟合与根据四次隐式多项式曲线获得物体几何变换的不变量，以此用来识别目标物体带来方便。设四次隐式多项式曲线方程为

$$\begin{aligned} f_4(x, y) = & a_{40}x^4 + a_{31}x^3y + a_{22}x^2y^2 + a_{13}xy^3 + a_{04}y^4 \\ & + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 \\ & + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 \\ & + a_{10}x + a_{01}y \\ & + a_{00} = 0 \end{aligned} \quad (1.11)$$

其中 a_{ij} ($i, j=0, 1, \dots, 4$) 为实数。其首齐次项可写为矩阵的乘积，即： $h_4(x, y) = (x^2, xy, y^2) A (x^2, xy, y^2)^T$ ，其中 A 为一个 3×3 的矩阵。为了方便，对方程式 (1.11) 两边同时除以 a_{40} 整理成首一的方程，这并不影响方程所表示的曲线，下面讨论的隐式多项式曲线方程都是首一的方程。

定理 1.7^[46] 四次隐式多项式曲线 $f_4(x, y) = 0$ 在坐标平面内封闭有界的充分必要条件是存在一个对称正定矩阵 A ，使得 $h_4(x, y) = (x^2, xy, y^2) A (x^2, xy, y^2)^T$ 。其中 $h_4(x, y)$ 是首齐次项。

证明：文献 [46] 已经给出了证明，但是相当繁琐，这里给