



文登教育集团课堂用书
聚骄公司全心专业设计



《考研数学复习指南》之 100问专题串讲

陈文灯 审订

徐博 张驰 著

常见问题细分类
——解决有创新
纵向贯穿知识点
构建专题新模型
易错易混难应对
自有方法解析精

2008版
(经济类)

全面系统地解答了从考生学习中搜集上来的问题!

世界图书出版公司

图书在版编目(CIP)数据

《考研数学复习指南》之100问专题串讲. 经济类 / 张弛, 徐博等编著.
—北京: 世界图书出版公司北京公司, 2007. 1
ISBN 978-7-5062-8165-2

I. 考... II. ①张... ②徐... III. 高等数学-研究生-人
学考试-自学参考资料 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 019509 号

《考研数学复习指南》之100问专题串讲(经济类)

主 编: 张 弛 徐 博

审 订: 陈文灯

责任编辑: 世 华

封面设计: 耕者工作室

出 版: 世界图书出版公司北京公司

发 行: 世界图书出版公司北京公司

(北京朝内大街 137 号 电话 88861708 邮编 100089)

销 售: 各地新华书店

印 刷: 廊坊人民印刷厂

开 本: 787 × 1092 毫米 1/16

印 张: 16

字 数: 307 千字

版 次: 2007 年 2 月第 1 版 2007 年 2 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5062-8165-2/G · 247

定价: 21.80 元

服务热线: 010 - 88861708

得数学者得天下

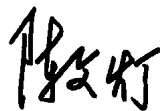
本书是一本“源于学生,但又高于学生”的优秀考研数学辅导书。本书的特点是:

从学生自己的角度出发,将考生在阅读《数学复习指南》之后产生的疑问归纳总结出来,以专题的形式对疑问进行了解答。同时每个专题又不仅仅局限于解答问题,还对考研数学整体内容进行了纵向贯穿,知识点综合,内容整理及易混问题的对比。相信站在学生角度的讲述更能使考生容易理解和接受。

本书作为《数学复习指南》的配套用书,首次采用有问有答的独特篇章结构,目的是为了帮助考生在阅读《数学复习指南》时经常出现的问题,使考生更全面、更透彻地理解《数学复习指南》上的知识点,更好、更有效地利用《数学复习指南》备考。

在这里,我也殷切地希望有更多的考生能够像本书的两位作者一样,在学习知识的时候不只是一味地接受老师的灌输,而是学会去思考。通过考研,希望每一位考生都能够找到一套适合自己的学习方法。

甚感欣慰,特作此序。



2007年2月

想说的话

我们是天津大学 06 级硕士研究生,和全国成千上万的莘莘学子一样经历了考研这场没有硝烟的战争。在备考的日子里,我们也曾遇到过困难,想到过退缩,但是对知识的渴望及家长、老师的期望使我们坚持下来并最终取得了成功。现在回想考研的那段日子,我们感觉收获的不仅是知识,而更多的是对意志的挑战和磨练,是各方面能力的提高。

最初想写点东西的想法萌发于备考那一年的 10 月底,那个时候对数学的第二遍复习已经接近尾声。经过两遍的复习,我们还是发现了很多薄弱环节,比如:对知识的整体性把握比较差,虽然每个知识点都弄清楚了,但是各个知识点之间的联系还没有找到,这就导致了在面对综合题时不知如何下手;没有找到很多解题方法的本质,如果题目稍微变化一下,就会乱了阵脚;很多相关概念总是混淆等等。

发现这些薄弱环节以后,我们就有针对性的和其他的备考同学进行了讨论,发现大家的薄弱之处竟然是那么相似。于是,从那时候起,我们就把这些问题记录下来,这些被记录的问题应该算是本书的雏形吧。

考研结束后,我们潜心研究当初遇到的问题,同时也对两届考生考研复习数学过程中产生的疑问进行了统计,概括出本书“问题荟萃”中的一百多个问题和正文中的 35 个专题。经过多次的修改、补充与删节,终成此书。

本书还把我们的原创的且经过严密论证的巧妙解题技巧奉献给读者,同时还统计了广大考生在做题时容易犯的错误,并对其进行了专门的标注。真心希望这些能够给读者提供帮助。

本书在编写过程中得到了陈文灯教授的大力支持,在这里我们对陈文灯教授能在百忙之中抽出时间审阅我们的稿件,并提出中肯的建议表示衷心的感谢。同时感谢北京聚骄文化发展有限公司对本书出版的支持;感谢我们的家人朋友的支持和帮助;感谢我们的母校天津大学的培养。

由于作者水平有限,书中难免存在一些不当之处,殷切期望广大读者批评指正。

天津大学 张驰 徐博

2007 年 2 月

使用说明

本书的内容源自广大考生学习《数学复习指南》后提出的问题,着重从学生自己的角度提出并解决了《数学复习指南》上“看不懂”或“想不通”的地方。但本书并不局限于此,它还对整个考研数学中相关、易混以及整体性的知识点进行了深化、对比和总结;从学生角度提出了需要注意的细节;提出了许多巧妙的解题方法。读者读过本书后会发现,横向的《数学复习指南》和纵向的本书相结合就像织成了一张知识网,原来看似孤立的知识点被这张知识网编织交融,浑然一体。

本书的内容决定了它是一本常伴《数学复习指南》的参考书。建议考生先复习一遍本科时使用过的高等数学、线性代数和概率统计的教材,然后再学习《数学复习指南》,在看《数学复习指南》的同时或之后再阅读本书。本书没有练习,不是一本练习册,而是一本指导性书籍,相信读者阅读本书时会感觉到很顺手的。

一、本书的内容分布:

1.《数学复习指南》问题荟萃

书的开篇总结了考生学习《数学复习指南》后提出的问题,这些问题是很有代表性的,是经过对大量使用《数学复习指南》的考生的疑问作统计后得到的,这些问题不是就题论题,是具有高度概括性的,一道题往往引发一系列需要注意的内容甚至一个知识块。相信读者看后也会发现自己在阅读中出现的问题。这些问题在后面的35个专题中有详尽的回答。

2. 35个专题

这35个专题是本书的核心,共分为四篇:“微积分”、“线性代数”、“概率统计”以及“综合”。为了更有条理,还将“微积分”篇分章。

第一:它们对前面“《数学复习指南》问题荟萃”中所有问题进行了回答,一个专题可能不仅仅回答一个问题。

第二:它们对《数学复习指南》上的一些问题进行了补充和深化。

第三:它们对考研数学整体内容进行了纵向贯穿,知识点综合,内容整理及易混问题的对比。

第四:它们对考生易犯各种错误进行了强调说明,这是以各个专题中框出来的“说明”和“注意”的形式提出的。

第五:它们提出了一些新的解题方法与技巧,或对一些已有的解题方法进行了深化。

3. 考研数学题型及思维方法总框架

这一部份内容从考研题型及对应思维方法上提出了考研数学的总框架,这是一个纵向的“方法”框架,与《数学复习指南》上横向的“知识点”框架是不同的。二者相互补充,

共同成为一个整体。

二、本书的用法

对于本书,读者既可以通篇阅读,又可以有选择地根据需要进行阅读。按专题阅读连贯性好,按前面问题查阅针对性强。

本书内容自成体系,各章节大体上相互独立,且很多章节相互引用,引用之处用“<>”说明,读者可以翻找查阅。

目 录

《考研数学复习指南》问题荟萃	(1)
----------------------	-----

第一篇 微积分

第一章 函数与极限	(8)
专题 1. 分段复合函数的求法	(8)
专题 2. 部分分式展开法	(10)
专题 3. “抓大头”、“抓小头”	(14)
专题 4. 定式与未定式	(20)
第二章 一元函数的微分与积分	(24)
专题 5. 一元函数可导的充分与必要条件	(24)
专题 6. 变限积分	(27)
第三章 级数 *	(47)
专题 7. 后求收敛域法	(47)
专题 8. 和式问题与敛散性问题	(50)
专题 9. 函数展开成幂级数与幂级数求和	(56)
第四章 多元函数微分学	(62)
专题 10. 多元函数一些概念间的关系	(62)
专题 11. 多元函数的微分法	(64)
第五章 二重积分	(71)
专题 12. 化二重积分为累次积分	(71)

第二篇 线性代数

专题 13. 用待定系数法求抽象矩阵的逆矩阵	(77)
专题 14. 用观察法求线性方程组的全部解	(78)
专题 15. 秩为 1 的矩阵	(83)
专题 16. 行变换、列变换	(89)
专题 17. 数量组变换与向量组变换	(94)

第三篇 概率统计

专题 18. 文氏图法	(97)
专题 19. 右连续	(102)

专题 20. 分布函数法	(107)
专题 21. 二维条件分布的范围问题	(110)
专题 22. 独立性与相关性	(114)
专题 23. 切比雪夫不等式、大数定律与中心极限定理	(127)
专题 24. 矩估计问题 *	(133)
专题 25. 区间估计与假设检验 *	(136)

第四篇 综合部分

专题 26. “ $\leq$ ”和“ $<$ ”, “ $\geq$ ”和“ $>$ ”	(145)
专题 27. 放缩法	(152)
专题 28. 相等与恒等(“ $=$ ”与“ $\equiv$ ”)	(165)
专题 29. 极值、最值与凹凸性问题	(167)
专题 30. 转移变量	(180)
专题 31. 隐含条件问题	(184)
专题 32. 近似问题	(190)
专题 33. 对称性问题	(193)
专题 34. 图示法	(206)
专题 35. 常用概念的对比	(224)
考研数学题型及思维方法总框架	(235)

带“*”的内容数四考生不作要求

《数学复习指南》问题荟萃

第一篇 微积分

第一章 函数与极限

1. 分段复合函数的求法

【问题 1】在处理分段复合函数问题的时候，看《数学复习指南》上的解答都能明白，但为什么自己动手一做就没有头绪了呢？怎样讨论才能既全面而又不疏漏呢？

2. 部分分式展开法

【问题 2】有理真分式怎样拆成部分分式之和呢？是用待定系数法么？有没有其它快速的解决方法呢？如： $\frac{x+4}{x^3+3x^2+2x}$ 应该可以拆成 $\frac{k_1}{x} + \frac{k_2}{x+1} + \frac{k_3}{x+2}$ ，但怎样快速确定 k_1, k_2, k_3 呢？

【问题 3】对 $\frac{1}{x}$ 求不定积分时，得到的结果到底写成 $\ln x + C$ 还是写成 $\ln|x| + C$ ？对之求定积分又怎样？

3. 抓大头、抓小头

【问题 4】形如 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(30x^4 + x - 5)}{\ln(5x^7 + 3x + 7)}$ 的极限式能用《数学复习指南》上提到的“抓大头”的方法来处理么？

【问题 5】《数学复习指南》第 20 页提到：求 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式的极限可以用“抓大头”的方法。那么是否也类似地有“抓小头”的方法呢？

4. 定式与未定式

【问题 6】 $0 \cdot \infty$ 到底是 0 还是未定式啊？《数学复习指南》上分明有 $0 \cdot \infty$ 型未定式，可为什么我看到一道题目中上却出现 $0 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = 0$ 呢？ $\lim_{n \rightarrow \infty} 1^n = 1$ 对吗？

【问题 7】无穷小量和 0 有什么区别？无穷大量和无穷大有什么区别？

第二章 一元函数的微分与积分

5. 一元函数可导的充分与必要条件

【问题 8】设函数 $f(0)=0$ ，若极限 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x^2} f(\Delta x - \sin \Delta x)$ 存在，则一定有函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导吗？

设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某个邻域内有定义，若极限 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a+2\Delta x) - f(a+\Delta x)}{\Delta x}$ 存在，则一定有函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导吗？对这种题目我根本不知从何下手，能不能讲讲应该怎么做？

【问题 9】若函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x^2} f(\Delta x - \sin \Delta x)$ 如何求呢？

6. 变限积分

【问题 10】什么是定积分对积分变量的无关性？它有什么用处呢？

【问题 11】对变限积分求导时，积分变量与求导变量相同与不相同，求导变量出现或不出现在被积函数以及积分限中，对应的计算的方法和结果有很大不同，很容易搞混，能不能系统地总结一下各种情况？

【问题 12】积分和求导这两个互逆的数学过程是否可以交换运算顺序？

【问题 13】当积分限含有某变量时，是否可以对这个变量作变量代换？

【问题 14】变限积分是积分限中的变量的函数，因此有些题目要根据题意对积分限变量的范围进行讨论，有的时候我就是不知道应该怎样讨论，能不能总结一下都有哪些情况需要讨论积分限变量？怎样来讨论呢？

【问题 15】幂级数的展开与求和运算中涉及到积分均指变限积分 $\int f(x)dx$ 吗？

【问题 16】解微分方程中经常提到的“对等式两边积分”是指做不定积分吧？既然变限积分与不定积分有关系，那么上面提到的“对等式两边积分”可以做变限积分吗？

【问题 17】概率统计部分有关数学期望的应用题是一种很典型的问题，但我不是很清楚比如第 583 页例 3.38 中 Q 的范围是怎么讨论出来的。为什么一拿到题目就知道要用 N 来表示 Q 的范围，而不是用 Q 来表示 N 的范围呢？是不是跟要求的结果有关啊？能不能讲讲拿到这类题目之后是怎样一个思考过程？

第三章 级数*

7. 后求收敛域法

8. 和式问题与敛散性问题

【问题 18】级数部分经常遇到含求和号 $\sum$ 的式子，这些式子在运算过程中，有时候下标有变化，有时候通式又变了，能不能系统地讲一讲都有哪些运算方式啊？

【问题 19】级数敛散性的判定方法很多,遇到题目首先应选用什么方法呢?如果解决不了,再用什么方法呢?这些方法有什么使用顺序吗?

【问题 20】《数学复习指南》第 196 页例 8.11 中“当 n 充分大时”可以证明级数收敛,那么当 n 不是充分大时就不用考虑了吗?这是利用了级数的什么性质啊?

9. 函数展开成幂级数与幂级数求和

【问题 21】在处理将函数展开成幂级数或幂级数求和的题目时,为什么有时对一个式子先积分后又求导,有时则先求导后又积分,它们都在算什么啊?遇到问题时什么时候用哪个算啊?

【问题 22】在处理将函数展开成幂级数或幂级数求和的题目时,为什么有时会把收敛域中的一些点除去呢?

第四章 多元函数微分学

10. 多元函数一些概念间的关系

【问题 23】我对多元函数的一些概念(如:可微、偏导数存在、偏导数连续、函数连续、函数极限存在)间相互推出推不出的各种情况有点混,能不能全面地总结一下?有哪些在考试中经常出现呢?

11. 多元函数的微分法

【问题 24】在处理多元函数求导的题目时,总是出现很多变量,我总是分不清谁是自变量,谁是中间变量,谁是最后的函数?

【问题 25】在处理多元函数求导的题目时,到底何时用全导,何时用偏导呢?

【问题 26】《数学复习指南》第 163 页“多元隐函数的偏导及微分”中的那些公式都是怎样推出的呢?用不用记啊?

第五章 二重积分

12. 化二重积分为累次积分

【问题 27】将二重积分化为累次积分时,我总是手忙脚乱,怎样有条理地解题呢?

【问题 28】我知道将二重积分化为累次积分求解时,根据积分域和被积函数形式的不同,可以通过恰当地选取坐标系来简化运算,能否总结一下怎样根据积分域和被积函数的形式选取坐标系?在选择不同的坐标系后都需要做什么样的变量代换呢?

【问题 29】我知道《数学复习指南》第 175 页的“定限口诀”,但是有的时候一遇到具体的问题就无从下手,具体问题中都是怎么“划线”的啊?“限内划条线”划的是直线吗?极坐标系下怎么划线呢?能否全面总结一下?

【问题 30】极坐标系下怎么更改积分次序?

【问题 31】定义域不是 $[0, \pi]$ 的正弦函数,定义域不是 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 的余弦函数,它们的反函数都是怎么求的呢?比如《数学复习指南》第 433 页例 2.24 中的“ $2\pi - \arccos \frac{x}{R}$ ”是怎么求出的呢?

第二篇 线性代数

13. 用待定系数法解抽象矩阵的逆矩阵

【问题 32】《数学复习指南》第 293 页例 2.16 和例 2.17 的解法是很巧妙，但是我自己做题时怎么也想不到，凑不出来，有没有什么其他的万能解法呢？

14. 用观察法求线性方程组的全部解

15. 秩为 1 的矩阵

【问题 33】秩为 1 的矩阵是很特殊的矩阵，它有许多特殊的性质广泛应用在解题当中，这些性质在《数学复习指南》中分布得比较隐蔽和分散，是否能全面地总结一下？

16. 行变换、列变换

【问题 34】我发现线性代数中经常要做“初等行变换”，有没有什么时候会作“初等列变换”呢？能否总结一下需要做初等行、列变换的各种情况？

17. 数量组变换与向量组变换

【问题 35】我发现线性代数中有基变换、坐标变换和正交变换三种变换形式。但为什么有的变换中是变换矩阵右乘，有的却是变换矩阵左乘呢？这三种变换都有什么区别和联系呢？

第三篇 概率统计

18. 文氏图法

【问题 36】在高中时运用文氏图分析集合关系方便又快捷，概率统计部分好像也有一些可以用文氏图来求解的问题，请系统地讲一讲如何在概率统计中使用文氏图。

【问题 37】《数学复习指南》第 407 页例 1.5，我用文氏图法求解时得到了两个正确选项(B)和(D)，这是怎么回事啊，是不是题目出错了？

19. 右连续

【问题 38】为什么分布函数中的各段定义域总是 $a \leq x < b$ 的形式，而不是 $a < x \leq b$ 的形式呢？

【问题 39】离散型随机变量的分布函数的自变量为什么能取连续的值？离散性体现在哪里了呢？

20. 分布函数法

【问题 40】求随机变量的函数的分布函数和概率密度时，我总是不知从何入手。教科书上给出过求函数 $Z = X + Y$ 的分布的公式，但这个公式好像解决不了其他形式的函数分布的求解问题。有什么通用的方法来解决求随机变量的函数分布的问题吗？

21. 二维条件分布的范围问题

【问题 41】二维条件分布的概率密度、分布函数到底是哪个自变量的函数？应该怎样规范地书写它们的定义域呢？

22. 独立性与相关性

【问题 42】我觉得独立性与相关性这两个概念很容易混淆，能不能系统地对比总结一下它们的定义、性质、判定方法等内容？

【问题 43】若 X, Y 为两个服从正态分布的随机变量，则其线性组合 $aX + bY$ 是否也服从正态分布？ (X, Y) 是否服从二维正态分布？有关二维及多维正态分布的许多命题我总是拿不准，能否全面地总结一下？

【问题 44】《数学复习指南》第 499 页例 5.8 的解题过程中说：“且易验证 $X_1 + X_2$ 与 $X_1 - X_2$ 相互独立”，应该怎么验证啊？

【问题 45】若两个随机变量 X, Y 均服从一维均匀分布，那么它们的联合分布 (X, Y) 一定服从二维均匀分布吗？

【问题 46】在解数理统计部分的题目时，我经常忽视三个抽样分布中对随机变量独立性的要求，能否强调一下究竟哪些时候需要注意说明独立性条件？

23. 切比雪夫不等式、大数定律与中心极限定理

【问题 47】对于某些问题，用切比雪夫不等式可以估计出一个区间范围，用参数估计也可以估计出一个区间范围，那么哪一个正确呢？

【问题 48】大数定律和中心极限定理中有很多公式看上去很像，它们之间是否有共同点，如何更充分地理解这部分内容呢？怎样更容易地去记忆这些公式呢？

【问题 49】《数学复习指南》第 492 页“注”中提到：不能将 $P(10 < X)$ 写成 $P(10 < X \leq n)$ ，否则会造成较大的误差。凡是 $X \leq n$ 这样的条件都不能写出吗？有没有其他情况？

24. 矩估计问题*

【问题 50】《数学复习指南》有些题目中的样本用大写的 X_i 来表示，有些又用小写的 x_i 来表示，是书上印错了还是它们的确有什么区别呢？

【问题 51】根据《数学复习指南》上对矩估计的讲解，两个参数的矩估计应该用 $E(X)$ 和 $E(X^2)$ 表示参数，再用 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ 和 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ 将它们代换，但为什么题目中却常常用 $E(X)$ 和 $D(X)$ 表示参数，而用 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ 和样本的二阶中心矩 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 将它们代换呢？能不能全面系统地讲解一下矩估计问题的解法？

25. 区间估计与假设检验*

【问题 52】有的参考书上对分位点的定义好像和我学过的不一样，这是怎么回事啊？

【问题 53】区间估计与假设检验这两部分内容的公式和方法好乱啊，它们有没有什么内在联系呢？有哪些内容需要记呢？能否有条理地梳理一下计算方法？

第四篇 综合部分

26. “ $\leq$ ”和“ $<$ ”，“ $\geq$ ”和“ $>$ ”

【问题 54】夹逼定理求极限、不等式证明等问题中经常遇到使用不等号的情况，不等号“ $\leq$ ”和“ $<$ ”，“ $\geq$ ”和“ $>$ ”之间有什么区别？为什么有的时候明明是“ $<$ ”，书上却写成了“ $\leq$ ”呢？

27. 放缩法

【问题 55】遇到利用不等式将式子放大或缩小的题目我就犯憊，能否总结一下考研数学中哪些情况下会出现这类“放缩法”问题？有什么技巧和规律可寻吗？

【问题 56】许多常用的不等式我都记不清楚了，《数学复习指南》上提到的一些比如柯西不等式我也不太清楚，能不能对考研数学所能涉及到的不等式做一个全面系统的总结？最好再能讲讲它们都是怎么用在“放缩法”中的。

28. 极值、最值与凹凸性问题

【问题 57】一元函数有取极值的充分条件和必要条件，求驻点、嫌疑点以及极值点的判定，还有根据极值求最值；二元及多元函数也有取极值的充分条件和必要条件，求驻点以及极值点的判定，根据极值求最值，极值又分为条件极值和无条件极值。一元函数与二元函数的这些内容很容易混淆，能不能全面地总结和对比一下呢？

【问题 58】如果条件多于一个时应该怎样使用拉格朗日乘数法？

【问题 59】有的实际问题只求出了一个或两个驻点，就直接将驻点代入函数式得到要求的最大或最小值，这是怎么回事啊？

【问题 60】对于求解整式或分式函数的极值点、拐点的问题，画表格来分析似乎很麻烦，有没有什么简单快速的解法？

29. 相等与恒等（“ $=$ ”与“ $\equiv$ ”）

【问题 61】“ $=$ ”与“ $\equiv$ ”到底有什么区别？何时要注意区分？

30. 转移变量

【问题 62】陈文灯老师说过：“见到复合函数一定要进行变量代换”，但是发现经常使用变量代换的情况远远不止这个，还有哪些情况要考虑用变量代换？

【问题 63】学习《数学复习指南》的时候发现在求解或者证明过程中经常“将对一个函数式的分析转移为对另一个函数式的分析”。能否总结一下用这一思想解决问题的情况都有哪些？

31. 隐含条件问题

【问题 64】我发现有些题目看《数学复习指南》上的解答过程能够看懂，但是一旦自己动手去做，就做不出来，对比一下发现是我自己没有找到题目中隐含的条件。能否全面总结一下考研数学中究竟在哪些情况下常出现隐含条件，什么时候需要去发掘隐含条件呢？

32. 近似问题

【问题 65】利用定积分的定义求极限是怎么回事？能否系统地讲述一下泊松近似的问题？考研数学中还有哪些需要注意的近似问题呢？

33. 对称性问题

【问题 66】对称性在考研数学中经常用到，能否全面总结一下？

34. 图示法

【问题 67】画出图形往往可以直观地解决许多问题，也可以帮助记忆许多公式，能否总结一下考研数学中究竟有哪些使用“图示法”的情况？

35. 常用概念对比

【问题 68】表格法与分部积分公式有什么区别？定积分能使用表格法吗？

【问题 69】收敛域、收敛区间和收敛半径有什么区别？

【问题 70】极值点与拐点都是指函数定义域中的点么？

【问题 71】 $(a_1, a_2, \dots, a_n)^T$ 与 $(a_1, a_2, \dots, a_n)^T$ 有什么区别？

【问题 72】等价、相似和合同三个概念及性质能否作一下对比？

【问题 73】泊松分布与泊松近似有什么联系？

【问题 74】估计量与估计值有什么区别？

【问题 75】随机变量与统计量有什么关系？

【问题 76】我发现概率统计部分的字母有时用大写有时又用小写，是不是随机变量就用大写，随机变量取值用小写呢？能否系统地总结一下？

第一篇 微积分

第一章 函数与极限

专题 1 分段复合函数的求法

求解分段复合函数之所以成为令人头痛的问题之一，主要是因为许多读者不知如何进行讨论才能既全面又不疏漏。解决分段复合函数通常采用的方法是分析法。下面以两个函数的复合为例，阐述分析法的具体步骤。

求 $f[g(x)]$ 的表达式，其中 $g(x)$ 和 $f(x)$ 均为分段函数，用分析法：

将 $g(x)$ 的各段表达式逐个代入 $f(x)$ 的每段定义域中，将每次解出的 x 范围与 $g(x)$ 在该段的定义域取交集，如果交集不为 $\emptyset$ （空集），则此交集即为复合函数定义域的一段，对应的函数为用 $g(x)$ 在该段的表达式替换 $f(x)$ 中“ x ”的位置进行复合。这种方法叫做分析法。

用分析法求解分段复合函数问题可以做到既不重复又不疏漏。结合下面例题可以更好地掌握分析法的步骤。

【例 1】 研究 $f[g(x)]$ 的连续性，其中 $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \leq 1 \\ x+1, & x > 1 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ x+4, & x > 1 \end{cases}$ 。

【分析】 因为 $f(x)$ 分为两段，所以将 $g(x)$ 代入 $f(x)$ 的两段定义域要进行两次讨论，称为外层讨论；又因为 $g(x)$ 也分为两段，所以将 $g(x)$ 的表达式代入 $f(x)$ 每段定义域时也要进行两次讨论，称为内层讨论。因此共要做 $2 \times 2 = 4$ 次讨论。

【解】 (1) $g(x) \leq 1$ ：

由 $x \leq 1$ 与 $x \leq 1$ 取交集得 $x \leq 1$ ，这时 $f[g(x)] = x^3$ ；

由 $x+4 \leq 1$ 与 $x > 1$ 取交集得 $\emptyset$ ，这时无复合解析表达式。

(2) $g(x) > 1$ ：

由 $x > 1$ 与 $x \leq 1$ 取交集得 $\emptyset$ ，这时无复合解析表达式；

由 $x+4 > 1$ 与 $x > 1$ 取交集得 $x > 1$ ，这时 $f[g(x)] = (x+4)+1 = x+5$ 。

$$\text{所以 } f[g(x)] = \begin{cases} x^3, & x \leq 1 \\ x+5, & x > 1 \end{cases}$$

由于 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f[g(x)] = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f[g(x)] = 6$, 故 $x=1$ 为 $f[g(x)]$ 的第一类间断点, $f[g(x)]$ 在其他点连续.

$$\text{【例 2】 } f(x) = \begin{cases} 4-x^2, & |x| \leq 2 \\ 3x, & |x| > 2 \end{cases}, \text{ 求 } f[f(x)].$$

【分析】将 $f(x)$ 代入 $f(x)$ 两段定义域做外层讨论, 将 $f(x)$ 的两段表达式分别代入 $f(x)$ 每段定义域做内层讨论.

【解】(1) $|f(x)| \leq 2$:

由 $|4-x^2| \leq 2$ 与 $|x| \leq 2$ 取交集得 $\sqrt{2} \leq |x| \leq 2$, 这时 $f[g(x)] = 4 - (4-x^2)^2$;

由 $|3x| \leq 2$ 与 $|x| > 2$ 取交集得 $\emptyset$, 这时无复合解析表达式.

(2) $|f(x)| > 2$:

由 $|4-x^2| > 2$ 与 $|x| \leq 2$ 取交集得 $|x| < \sqrt{2}$, 这时 $f[g(x)] = 3(4-x^2)$;

由 $|3x| > 2$ 与 $|x| > 2$ 取交集得 $|x| > 2$, 这时 $f[g(x)] = 3 \times 3x = 9x$.

$$\text{所以 } f[f(x)] = \begin{cases} 4 - (4-x^2)^2, & \sqrt{2} \leq |x| \leq 2 \\ 3(4-x^2), & |x| < \sqrt{2} \\ 9x, & |x| > 2 \end{cases}$$

$$\text{【例 3】 } f(x) = \frac{1}{3}(x+|x|), \quad g(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}, \text{ 求 } f[g(x)].$$

$$\text{【解】 去掉绝对值符号有: } f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

(1) $g(x) \geq 0$:

由 $e^{-x} \geq 0$ 恒成立与 $x < 0$ 取交集得 $x < 0$ 这时 $f[g(x)] = \frac{2}{3}e^{-x}$;

由 $x^2 \geq 0$ 恒成立与 $x \geq 0$ 取交集得 $x \geq 0$ 这时 $f[g(x)] = \frac{2}{3}x^2$.

(2) $g(x) < 0$:

由 $e^{-x} < 0$ 得 x 为 $\emptyset$ 这时无复合解析表达式;

由 $x^2 < 0$ 得 x 为 $\emptyset$ 这时无复合解析表达式.