Lebesgue测度与积分
——问题与方法

陈建仁　宋福陶　孙玉莉　编著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

Lebesgue 测度与积分

——问题与方法

陈建仁　宋福陶　孙玉莉　编著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书围绕 Lebesgue 测度与积分及其相关内容，总结和归纳了一些常用的解决问题的方法，并通过若干典型例题加以说明. 每一章后都配备了一定数量的习题，而且每题都有较为详细的解答，并尽量做到通俗易懂.

本书注重方法的讲解，因而对于初学者可以起到事半功倍的效果，对于备考研究生会有很大的帮助，也可以作为“实变函数”任课教师的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

Lebesgue 测度与积分：问题与方法/陈建仁，宋福陶，孙玉莉编著. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2011. 6

ISBN 978-7-5603-3314-4

Ⅰ. ①L… Ⅱ. ①陈…②宋…③孙… Ⅲ. ①实变函数 Ⅳ. ①O174. 1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 121500 号

策划编辑 杜 燕 赵文斌
责任编辑 唐 蕾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
网 址 http://hitpress. hit. edu. cn
印 刷 东北林业大学印刷厂
开 本 787mm×960mm 1/16 印张 13.25 字数 288 千字
版 次 2011 年 6 月第 1 版 2011 年 6 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-3314-4
定 价 29. 80 元

前　言

Lebesgue 测度与积分是“实变函数”中的核心内容，其思想方法适于处理无穷（可列）次过程，因而用来解决各种分析问题就变得非常简单. 但是这种简单是有代价的，就是对无穷现象更为细致的认识，尤其要把握集合各种各样的分解和合成，而这些都是数学分析中所未见到的. “实变函数的每一道习题都似乎是一个挑战，它们似乎没有关联，一道题一个方法”，初学者常常会有如此的感慨.

笔者曾讲授过多个版本的实变函数，也常感受到学生们的无奈，故而一直试图总结出若干方法用来指导解决相关的问题. 本书即是围绕方法展开，在某一方法下罗列出若干问题. 每个问题，包括书后的习题，都给出了详尽的解答，尽量做到通俗易懂和一题多解.

本书共分五章，每章第一节都是一些必备的基础知识，事实上这里也包括了笔者对部分知识的评注和总结以及对容易犯错地方的提示，这些来源于笔者多年的教学经验. 随后的各节用来论述本章涉及的某类问题，尽量做到对相关的命题及例题作出适当编排，以便读者容易产生联想. 每章的习题都列到该章的最后，以便读者综合运用掌握的方法来解决问题.

笔者选择的问题都是从最简单情形开始的，渐次递进，使随后稍复杂的想法和技巧都显得顺其自然，这是笔者想达到的，也希望读者能够感受到. 本书包括了若干流行实变函数教科书书后习题以及部分院校实变函数研究生试题.

当然学习是从模仿开始的，有些问题也有一定的难度，不知如何下手，即便如此，使用本书时，笔者还是希望读者能尽量独立地解决问题，在扎实提高能力的同时，也能体会到成功的喜悦！

欢迎读者提出宝贵意见，笔者将不胜感激！

编　者

2011 年 6 月 16 日

目　　录

第1章

集合运算与 $\mathbf{R}^n$ 中的点集、可数集与集合的基数、可测集

1.1 基本概念及主要定理

1.1.1 集合及其运算

1. 具有一定性质的对象的全体称为一个集合. 设 A,B 是两个集合,若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,则称集合 A 与 B 相等或相同,记 $A=B$.

2. 设 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 为一集合族,$\forall\alpha\in I,A_\alpha\subset X$,称集合

$$\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha=\{x\in X:\exists\alpha\in I,\text{使 } x\in A_\alpha\}$$

为集族 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 的并集;称集合

$$\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha=\{x\in X:\forall\alpha\in I,x\in A_\alpha\}$$

为集族 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 的交集.

3. 对任意集合 A 及集合族 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$,如下运算规律成立.

$$A\cap(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in I}(A\cap A_\alpha)$$

$$A\cup(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha)=\bigcap_{\alpha\in I}(A\cup A_\alpha)$$

4. (De Morgan 定律)

$$(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha)^c=\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha^c,\quad (\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha)^c=\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha^c$$

利用 $A\backslash B=A\cap B^c$ 及上面的等式,容易证明

$$A\setminus(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha)=\bigcap_{\alpha\in I}(A\setminus A_\alpha),A\setminus(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in I}(A\setminus A_\alpha)$$

5. 设 A,B 是两个集合，称 $A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$ 为 A 与 B 的对称差.

6. 设$\{A_k\}$是一个集合列，若 $A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_k\supset\cdots$，则称此集合列为递减集合列，此时称其交集 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 为集合列$\{A_k\}$的极限集(极限)，记为$\lim\limits_{k\to\infty}A_k$；若$\{A_k\}$满足 $A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_k\subset\cdots$，则称此集合列为递增集合列，此时称其并集 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 为$\{A_k\}$的极限集(极限)，记为$\lim\limits_{k\to\infty}A_k$.

设$\{A_n\}$是集合列. 令 $B_n=\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}A_k$，则易知 $B_1\supset B_2\supset\cdots\supset B_n\supset\cdots$，称

$$\lim_{n\to\infty}B_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k$$

为$\{A_k\}$的上极限集(上限集)，记为$\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}A_k$，即

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}A_k=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k$$

类似的，称集合 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{\infty}A_k$ 为$\{A_k\}$的下极限集(下限集)，记为$\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}A_k$，即

$$\underline{\lim_{k\to\infty}}A_k=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k$$

若集合列$\{A_k\}$的上、下限集相等，则说$\{A_k\}$的极限存在并等于上限集或下限集，记为$\lim\limits_{k\to\infty}A_k$.

若$\{A_k\}$为单调递增(减)集合列，易知其上、下限集一定相等，且等于 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$(或 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k$).

有下列事实：

(1) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\{x\mid\forall n,\exists k\geqslant n,x\in A_k\}$.

(2) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\{x\mid\exists n_0,\forall k\geqslant n_0,x\in A_k\}$.

集合列$\{A_k\}$的上、下限集有如下明显的关系：

(1) $\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}A_k\subset\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}A_k$.

(2) $E\setminus\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}(E\setminus A_n)$.

(3) $E\setminus\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(E\setminus A_n)$.

其中 E 为 $\mathbf{R}^n$ 的任一子集.

7. 设 X,Y 是两个集合，称 $X\times Y=\{(x,y)\mid x\in X,y\in Y\}$ 为 X 与 Y 的直积集.

8. 设 $A\subset X$，作映射$\chi_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A\\0, & x\in X\setminus A\end{cases}$，称$\chi_A:X\to\mathbf{R}^1$ 是定义在 X 上的 A 的特征函数.

特征函数尽管定义简单，但在本课程中非常重要. 它常将集合运算转化为函数的运算.

1.1.2 可数集与集合的基数

1. 设 A,B 是两个集合，若存在一个从 A 到 B 上的一一映射，则称集合 A 与 B 对等，记为 $A\sim B$. 若集合 A 与集合 B 对等，则称 A 与 B 的基数或势是相同的，记为 $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$. 若 $A\sim C\subset B$，则称 $\overline{\overline{A}}\leqslant\overline{\overline{B}}$；若 $A\sim C\subset B$ 但 A 不与 B 对等，则称 $\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}}$.

2. (Cantor－Bernstein) 若集合 X 与 Y 的某个真子集对等，Y 与 X 的某个真子集对等，则 $X\sim Y$. 特别的，若 $A\subset B\subset C$，且 $A\sim C$，则 $A\sim B\sim C$.

3. (无最大基数定理) 设 A 是任意集合，$M=P(A)$ 是 A 的所有子集组成的集合，则 $\overline{\overline{M}}>\overline{\overline{A}}$.

4. $\mathbf{N}^*$ 为正整数集，记 $\overline{\overline{\mathbf{N}^*}}=\aleph_0$. 若 $A\sim\mathbf{N}^*$，则称 A 为可列集. 有限集与可列集统称为可数集(或至多可列集). 可数集有如下性质：

(1) 任意无限集必包含一个可列子集.

(2) 若 $A_n(n=1,2,\cdots)$ 是可数集，则并集 $A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 也是可数集.

(3) 设 $A_k(k=1,2,\cdots,n)$ 是可数集，则 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$ 是可数集.

(4) 设 A 是无限集且其基数为 α，若 B 是可数集，则 $A\cup B$ 的基数仍为 α.

5. 区间 $(0,1)$ 不是可列集：记 $\overline{\overline{(0,1)}}=c$，有 $\overline{\overline{(0,1)}}=c>\aleph_0=\overline{\overline{\mathbf{N}^*}}$. 若 $A\sim(0,1)$，则称 A 具有连续基数. 设 $\{A_k\}$ 是集合列，且每个 A_k 的基数都是连续基数，则其并集 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 以及集合 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n\times\cdots=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots):x_n\in A_n(n=1,2,\cdots)\}$ 都具有连续基数.

6. 以 $2^{\aleph_0}$ 来记可数集的所有子集所构成的集合的基数，则有 $2^{\aleph_0}=c$.

1.1.3 $\mathbf{R}^n$ 中的距离及特殊点集、一般集合上的连续函数

1. 设 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\in\mathbf{R}^n$，令 $|x|=\sqrt{\xi_1^2+\cdots+\xi_n^2}$，称 $|x|$ 为 x 的模(范数)或长度.

2. 设 $x,y\in\mathbf{R}^n$，称

$$d(x,y)=|x-y|=\sqrt{(\xi_1-\eta_1)^2+(\xi_2-\eta_2)^2+\cdots+(\xi_n-\eta_n)^2}$$

为 x 与 y 间的距离. 距离具有如下性质：

(1) $d(x,y)\geqslant 0$，$d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$.

(2) $d(x,y)=d(y,x)$.

(3) $d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(y,z)$.

3. 设 $x\in\mathbf{R}^n$，E 是 $\mathbf{R}^n$ 中的非空点集，称

$$d(x,E)=\inf\{|x-y|:y\in E\}$$

为点 x 到 E 的距离；若 E_1,E_2 是 $\mathbf{R}^n$ 中的非空点集，称

$$d(E_1,E_2)=\inf\{|x-y|:x\in E_1,y\in E_2\}$$

为 E_1 与 E_2 之间的距离. 也可等价定义为

$$\inf\{d(x,E_2):x \in E_1\}$$

或

$$\inf\{d(E_1,y):y \in E_2\}$$

注 对任一非空集 $E \subset \mathbf{R}^n$，距离函数 $f(x)=d(x,E)$ 为 $\mathbf{R}^n$ 上的一致连续函数. 这是由于 $\forall x,y \in \mathbf{R}^n$，总有 $|d(x,E)-d(y,E)| \leqslant |x-y|$ 成立.

4. 设 $E \subset \mathbf{R}^n$. 若 $E' \subset E$(即 E 包含 E 的一切极限点)，则称 E 为闭集. 记 $\overline{E}=E \cup E'$ 为 E 的闭包，则 E 为闭集 $\Leftrightarrow E=\overline{E} \Leftrightarrow E=\{x \in \mathbf{R}^n: \forall \delta>0, B(x,\delta) \cap E \neq \varnothing\}$.

闭集有如下性质.

(1) $\mathbf{R}^n$, $\varnothing$ 皆为闭集.

(2) 若 $F_1,F_2,\cdots,F_n$ 是闭集，则 $\bigcup\limits_{k=1}^{n} F_k$ 是闭集.

(3) 若 $\{F_\alpha:\alpha \in I\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个闭集族，则 $\bigcap\limits_{\alpha \in I} F_\alpha$ 是闭集.

注 若集合 E 的任一个开覆盖都有一个有限的子覆盖，则称 E 为紧集，$\mathbf{R}^n$ 中一个集合 E 为紧集当且仅当 E 为有界闭集.

5. 设 $G \subset \mathbf{R}^n$. 若 $G^c=\mathbf{R}^n \backslash G$ 是闭集，则称 G 为开集. 记 $\mathring{E}$ 为 E 的内点的全体，称为 E 的内核，则 E 为开集 $\Leftrightarrow E=\mathring{E} \Leftrightarrow \forall x \in E, \exists \delta>0$，使 $B(x,\delta) \subset E$.

开集有如下性质：

(1) $\mathbf{R}^n$, $\varnothing$ 皆为开集.

(2) 若 $\{G_\alpha:\alpha \in I\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个开集族，则其并集 $G=\bigcup\limits_{\alpha \in I} G_\alpha$ 是开集.

(3) 若 $G_k(k=1,2,\cdots,m)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的开集，则 $G=\bigcap\limits_{k=1}^{m} G_k$ 是开集.

注 $\mathbf{R}^1$ 中的非空开集可唯一地表示为可数个互不相交的开区间的并集；$\mathbf{R}^n$ 中的非空开集是可列个互不相交的半开闭矩体的并集；若记 $\Gamma=\{B(x,\frac{1}{k}):x$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的有理点，k 是自然数$\}$，则 $\mathbf{R}^n$ 中任一开集 G 也可表为 Γ 中某些开集的并集.

6. 设 $E=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} G_k$，其中 G_k 是 $\mathbf{R}^n$ 中的开集，则称 E 为 G_δ 集；若 $F=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k$，其中 F_k 是 $\mathbf{R}^n$ 中的闭集，则称 F 为 F_σ 集.

设 $\Gamma \subset P(X)$，若满足以下条件，则称 Γ 是一个 σ-代数.

(1) $\varnothing \in \Gamma$.

(2) 若 $A \in \Gamma$，则 $A^c \in \Gamma$.

(3) 若 $A_k \in \Gamma(k=1,2,\cdots)$，则 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \Gamma$.

由 $\mathbf{R}^n$ 中的一切开集构成的开集族生成的 σ-代数(即包含开集族的最小的 σ-代数) 称为 Borel σ-代数，记为 B. 称 B 中的元素为 Borel 集.

闭集、开集、F_σ 集、G_δ 集都是 $\mathbf{R}^n$ 中的 Borel 集. Borel 集的余集，Borel 集合列的交集、并集

以及上、下极限集都是 Borel 集.

7. Cantor(康托) 集与 Cantor 函数:

将$[0,1]$三等分,去掉中间的$\frac{1}{3}$,记留下部分为

$$F_1=\left[0,\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},1\right]=F_{1,1}\cup F_{1,2}$$

再将两部分各自三等分并各去掉中间部分,记留下部分为

$$F_2=\left[0,\frac{1}{9}\right]\cup\left[\frac{2}{9},\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},\frac{7}{9}\right]\cup\left[\frac{8}{9},1\right]=F_{2,1}\cup F_{2,2}\cup F_{2,3}\cup F_{2,4}$$

如此进行下去,得到集合列$\{F_n\}$,其中

$$F_n=F_{n,1}\cup F_{n,2}\cup\cdots\cup F_{n,2^n},n=1,2,\cdots$$

作集合 $C=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}F_n$,则称 C 为 Cantor 集. Cantor 集有如下性质:

(1)C 是非空有界闭集.

(2)$C=C'$,即 C 是完全集.

(3)C 无内点.

(4)Cantor 集的基数是连续基数 c,即 $\overline{\overline{C}}=c$.

(5)Cantor 集是可测集,其测度 $m(C)=0$.

$\forall x\in C$,存在 $\alpha_i,\alpha_i=0,1(i=1,2,\cdots)$,使 $x=2\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{\alpha_i}{3^i}$,定义

$$\varphi(x)=\varphi\left(2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\alpha_i}{3^i}\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\alpha_i}{3^i}$$

且令

$$\Phi(x)=\sup\{\varphi(y):y\in C,y\leqslant x\},\forall x\in[0,1]$$

则称 $\Phi(x)$ 为 Cantor 函数. $\Phi(x)$ 是$[0,1]$上的单调上升的连续函数.

8. 设 $f(x)$ 是 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上的实值函数,$x_0\in E$. 如果对 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,当 $x\in E\cap B(x_0,\delta)$ 时,有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$,则称 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续,称 x_0 为 f 的一个连续点. 若 f 在 E 上每一点连续,则称 f 在 E 上连续. 记 E 上连续函数的全体为 $C(E)$,即 $C(E)=\{f:f$ 在 E 上连续$\}$.

由定义容易知道若 f 在 $\mathbf{R}^n$ 上连续,则 f 在 $\mathbf{R}^n$ 的任意子集上都连续. 一般的,若 f 在集合 E 上连续则一定在子集 $F\subset E$ 上连续,反之常常不成立.

注意到 $\forall x\in C$,Cantor 函数 $\Phi(x)=\varphi(x)$,因此,$\varphi(x)$ 是 C 到$[0,1]$上的连续函数且 $\varphi([0,1])=[0,1]$. 任取$[0,1]$中的一个不可测集 A,则 $\varphi^{-1}(A)\subset C$. 由于 $m(C)=0$,所以 $\varphi^{-1}(A)$ 一定是测度为零的可测集,这说明连续函数不保持集合的可测性.

连续函数具有如下事实.

(1) 设 E 是 $\mathbf{R}^n$ 中的紧集,$f\in C(E)$,则:

①f 在 E 上有界.

②$\exists x_0 \in E, y_0 \in E$,使 $f(x_0)=\inf f(E), f(y_0)=\sup f(E)$.

③f 在 E 上一致连续.

容易知道,若 $E \subset \mathbf{R}^n$ 上的连续函数列$\{f_k(x)\}$一致收敛于 $f(x)$,则 $f(x)$ 是 E 上的连续函数.

(2)(连续延拓定理) 若 F 是 $\mathbf{R}^n$ 中的闭集,$f(x)$ 是定义在 F 上的连续函数且 $|f(x)| \leqslant M(x \in F)$,则存在 $\mathbf{R}^n$ 上的连续函数 $g(x)$,满足

$$|g(x)| \leqslant M, g(x)=f(x), x \in F$$

(3)f 是 $\mathbf{R}^n$ 上的连续函数当且仅当对任意开集 $G \subset \mathbf{R}^1$

$$f^{-1}(G)=\{x \in \mathbf{R}^n : f(x) \in G\}$$

为 $\mathbf{R}^n$ 中的开集. f 是 $E \subset \mathbf{R}^n$ 上的连续函数当且仅当对任意开集 $G \subset \mathbf{R}^1$,存在开集 $O \subset \mathbf{R}^n$,使

$$O \cap E=f^{-1}(G)=\{x \in E : f(x) \in G\}$$

注 E 上的连续函数 f 是与 E 紧密相关的. 例:函数 $f(x)=\begin{cases}1, & x \in \mathbf{Q} \\ 0, & x \in \mathbf{R}^1 \setminus \mathbf{Q}\end{cases}$,则 $f \in C(\mathbf{Q})$ 及 $f \in C(\mathbf{R}^1 \setminus \mathbf{Q})$,但 $f \notin C(\mathbf{R}^1)$.

1.1.4 可 测 集

1. 设 I 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个(有限) 矩体,其边长分别为 $l_1, l_2, \cdots, l_n$,规定其体积 $|I|$ 为

$$|I|=l_1 l_2 \cdots l_n$$

设 $E \subset \mathbf{R}^n$ 若$\{I_k\}$是 $\mathbf{R}^n$ 中的可数个开矩体,且有 $E \subset \bigcup_{k \geqslant 1} I_k$,则称$\{I_k\}$为 E 的一个 L-覆盖. 称

$$m^*(E)=\inf\left\{\sum_{k \geqslant 1} |I_k| : \{I_k\} \text{ 为 } E \text{ 的 } L\text{-覆盖}\right\}$$

为点集 E 的 Lebesgue 外测度. Lebesgue 外测度有如下性质:

(1) 非负性: $\forall E \subset \mathbf{R}^n, m^*(E) \geqslant 0$ 且 $m^*(\varnothing)=0$.

(2) 单调性:若 $A \subset B$,则 $m^*(A) \leqslant m^*(B)$.

(3) 次可加性: $m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n)$.

(4) 距离可加性:若 $d(A,B)>0$,则 $m^*(A \cup B)=m^*(A)+m^*(B)$.

(5) 平移不变性:设 $E \subset \mathbf{R}^n, x_0 \in \mathbf{R}^n$,令 $E+\{x_0\}=\{x+x_0 : x \in E\}$,则

$$m^*(E+\{x_0\})=m^*(E)$$

2. 设 $E \subset \mathbf{R}^n$,若对任意的点集 $T \subset \mathbf{R}^n$ 有

$$m^*(T)=m^*(T \cap E)+m^*(T \cap E^c)$$

则称 E 为 Lebesgue 可测集,其中 T 称为试验集. 这一等式称为 Carathodory 条件. 可测集的全体称为可测集类,简记为 μ. 可测集有如下性质:

(1)$\varnothing$ 为可测集.

(2) 若 E 为可测集,则 E^c 为可测集.

(3) 若 E_1 为可测集,E_2 为可测集,则 $E_1 \cup E_2$,$E_1 \cap E_2$ 及 $E_1 \backslash E_2$ 皆为可测集.

(4) 若 $E_i(i=1,2,\cdots)$ 为可测集,则其并集也为可测集,若有 $E_i \cap E_j = \varnothing(i \neq j)$ 则

$$m(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i)$$

称该性质为测度的"可数可加性".

以上性质也说明了可测集类是一个 σ-代数. 由于开集一定是可测集,故 Borel 集一定是可测集.

3. 若 E 是可测集,则对任给的 $\varepsilon > 0$,有:

(1) 存在包含 E 的开集 G,使得 $m(G \backslash E) < \varepsilon$.

(2) 存在包含于 E 的闭集 F,使得 $m(E \backslash F) < \varepsilon$.

进而有:

(3)$E = H \backslash Z_1$,其中 H 是 G_δ 集,$m(Z_1) = 0$.

(4)$E = K \cup Z_2$,其中 K 是 F_σ 集,$m(Z_2) = 0$.

这说明对任一可测集 E,存在包含 E 的 G_δ 集 H,使 $m(H) = m(E)$;存在包含于 E 的 F_σ 集 K,使 $m(E) = m(K)$. 所以 Lebesgue 可测集类 μ 与 Borel 集类 B 仅差一个测度为 0 的集合类.

由于任意有界可测集总能包含在一个矩体里,其测度不大于该矩体的体积,因而一定是有限的;测度有限的集合不一定是有界集,例如 $\mathbf{R}^n$ 中的有理点集测度为零但无界.

若 E 含有内点 x_0,其外测度一定不为零. 事实上,由于存在 $\delta > 0$,使 $B(x_0, \delta) \subset E$,而可做一个矩体 $I_0 \subset B(x_0, \delta)$,所以 $m^*(E) \geqslant m(B(x_0, \delta)) \geqslant |I_0| > 0$.

$\mathbf{R}^n$ 中的不可测集是存在的. 实际上,对任意可测集 $E \subset \mathbf{R}^n$,若 $m(E) > 0$,则 E 中一定存在一个不可测的子集.

称上面(3) 中的 H 为 E 的等测包,(4) 中的 K 为 E 的等测核. 事实上,对任意集 $E \subset \mathbf{R}^n$ 同样存在包含 E 的 G_δ 集 H,使 $m(H) = m^*(E)$,亦称 H 为 E 的等测包. 这个性质可以将有些外测度的问题转化成测度问题去解决.

4. 集合列的极限集与测度的关系.

(1) 设 $\{E_k\}$ 为递增可测集列 $E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_k \subset \cdots$,则 $m(\lim\limits_{k\to\infty} E_k) = \lim\limits_{k\to\infty} m(E_k)$.

(2) 设 $\{E_k\}$ 为递减可测集列 $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \cdots \supset E_k \supset \cdots$ 且 $m(E_1) < \infty$,则

$$m(\lim_{k\to\infty} E_k) = \lim_{k\to\infty} m(E_k)$$

(3) 设 $\{E_k\}$ 为任一个可测集列,则有

$$m(\varliminf_{k\to\infty} E_k) \leqslant \varliminf_{k\to\infty} m(E_k)$$

特别的,若存在 k_0 及集合 E,$m(E) < \infty$,而当 $k \geqslant k_0$ 时,恒有 $E_k \subset E$,则有

$$m(\overline{\lim_{k\to\infty}}E_k) \geqslant \overline{\lim_{k\to\infty}}m(E_k)$$

亦即一定有

$$m(\underline{\lim_{k\to\infty}}E_k) \leqslant \underline{\lim_{k\to\infty}}m(E_k) \leqslant \overline{\lim_{k\to\infty}}m(E_k) \leqslant m(\overline{\lim_{k\to\infty}}E_k)$$

这说明若集合列$\{E_k\}$存在极限，且满足存在k_0及集合E，$m(E)<\infty$，使当$k\geqslant k_0$时，恒有$E_k\subset E$，则$\{m(E_k)\}$亦存在极限，且$m(\lim\limits_{k\to\infty}E_k)=\lim\limits_{k\to\infty}m(E_k)$.

1.2 集合的运算及其分解

在实分析中，关注的集合运算主要是无穷交(并)运算，而其中最重要的当属集合列的交(并)运算(可列运算). 这主要是因为诸如这样一些事实的需要，比如：可数个可数集的并仍为可数集，可数个可测集的交(并)仍然可测，可数个零测集的并仍是零测集，可测函数列的极限仍是可测函数以及若干个极限与积分的交换定理等. 也正是这些结论的存在，使得可以将一个集合分解成可列个相对简单集合的交(并)，以达到简化问题的目的.

本节主要讨论两个问题：一是在整个知识体系中起着重要作用的集合分解的问题，二是集合列的极限问题(上极限集和下极限集).

1.2.1 集合常用的分解方法

经常采用如下的分解：

1. 记$B_k=B(0,k)$，则$\mathbf{R}^n=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}B_k$，从而对任意集合$E\subset\mathbf{R}^n$，若记$E_k=E\cap B_k$，则一定有$E=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k$，即任一个集合都可以表成可数个有界集的并集.

2. 记$T_{\frac{1}{k}}=\left[\dfrac{1}{k},+\infty\right)$，则$(0,+\infty)=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}T_{\frac{1}{k}}$，从而对任意集合$E\subset(0,+\infty)$，若记$E_k=E\cap T_{\frac{1}{k}}$，则一定有$E=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k$，即任一个正数集都可以表成可数个下界大于零的集合的并集.

例 1 设X是由$\mathbf{R}^1$中某些互不相交的正测集形成的集族，试证明X是可数的.

分析 首先将X进行第一次分解，记$X_k=\{A:m(A\cap[-k,k])>0,A\in X\}$，容易知道$\{X_k\}$是单调增加集列，且$X=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}X_k$. 下面只需证$X_k$是可数的. $\forall A\in X_k$，若记$A_k=A\cap[-k,k]$，则$m(A_k)>0$，且$\forall A,B\in X_k$，若$A\neq B$，一定有$A_k\cap B_k=\varnothing$. 由于A和A_k是一一对应的，因此不妨设X_k就是由这些A_k组成的(仍将A_k称为A). 现在将问题转化成证明X_k可数，除了原有的条件($\forall A,B\in X_k$，若$A\neq B$，则$A\cap B=\varnothing$)外，还比原来增加了条件：$\forall A\in X_k$，$A\subset[-k,k]$且$mA>0$.

现在还不能直接证明X_k是可数的，还需将X_k分解. 记$X_k^{\frac{1}{n}}=\left\{A\in X_k:m(A)>\dfrac{1}{n}\right\}$，则

容易证明 $X_k=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}X_k^{\frac{1}{n}}$，从而要证 X_k 是可数的只需证 $X_k^{\frac{1}{n}}$ 是可数的. 证明 $X_k^{\frac{1}{n}}$ 是可数的比原来又增加了条件：$\forall A\in X_k^{\frac{1}{n}}, m(A)>\dfrac{1}{n}$. 注意到 $X_k^{\frac{1}{n}}$ 中的集合都是互不相交的，都含于区间 $[-k,k]$ 中而测度又都大于固定的数 $t=\dfrac{1}{n}$，所以 $X_k^{\frac{1}{n}}$ 中的集合最多不超过 $2k\div\dfrac{1}{n}=2kn$ 个，即 $X_k^{\frac{1}{n}}$ 为有限集. 至此命题得证！

将证明的详细过程留给读者.

当然视具体情况还会有各种各样的可数分解. 比如：$(0,+\infty)=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(k-1,k]$，$(c,+\infty)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left[c+\dfrac{1}{n},+\infty\right)$，等等，以及上述情况的各种变化. 分解的关键是要将集合分解为至多可列个集合的并（交）.

例 2　设 $E\subset(0,+\infty)$ 中的点不能以数值大小加以排列，则 $E'\neq\varnothing$.

分析　本题适于用反证法. 只需证若 $E'=\varnothing$，则 E 中的点一定能以数值大小加以排列. 注意到有限数集能以大小排列，将集合 E 采取如下分解：记 $E_k=E\cap(k-1,k]$，则 $E=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k$.

证明　反证，设 $E'=\varnothing$. $\forall k$，记 $E_k=E\cap(k-1,k]$，由于 $E'=\varnothing$，必有 $E_k{}'=\varnothing$，而 E_k 为有界集，因而由 Weierstrass 定理，E_k 一定是有限集，从而 E_k 中的点一定能以数值大小加以排列. 注意到 $E=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k$，$E_k\cap E_{k'}=\varnothing(k\neq k')$，因而 $\forall x,y\in E$，若 $x\in E_{k_1}$，$y\in E_{k_2}$，当 $k_1<k_2$ 时，则有 $x<y$，且 y 在前 x 在后，其顺序与大小一致，反之亦然；若 $k_1=k_2$，由前面所证 x,y 也能按大小顺序排列. 这个结果与已知矛盾！所以 $E'\neq\varnothing$，命题得证！

例 3　设对任意正整数 k，$F_k(x)$ 是集合 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上的可测函数. 记 $\mathbf{N}$ 为自然数集，若 ψ：$E\to\mathbf{N}$ 是可测函数，则函数 $F_{\psi(x)}(x)$ 一定是 E 上的可测函数.

分析　只需证 $\forall t\in\mathbf{R}^1$，集合 $E_t=\{x\in E:F_{\psi(x)}(x)>t\}$ 为可测集. 已知 $F_k(x)$，$\psi(x)$ 是可测函数，从而 $\forall k$，集合 $\{x\in E:F_k(x)>t\}$ 和 $\{x\in E:\psi(x)=k\}$ 都是可测集. 只需将 E_t 用这些集合表示出来就可以了.

证明　$\forall t\in\mathbf{R}^1$，记 $E_t=\{x\in E:F_{\psi(x)}(x)>t\}$ 及 $\psi(E_t)=\{k_i\}\subset\mathbf{N}$，则一定有

$$E_t=\bigcup_{k\in\{k_i\}}(\{x\in E:F_k(x)>t\}\cap\{x\in E:\psi(x)=k\})$$

事实上，$\forall k\in\{k_i\}$ 及 $x\in\{x\in E:F_k(x)>t\}\cap\{x\in E:\psi(x)=k\}$，有 $\psi(x)=k\in\{k_i\}$ 及 $F_k(x)>t$，从而一定有 $F_{\psi(x)}(x)=F_k(x)>t$，即 $x\in E_t$；若 $x\in E_t$，则 $F_{\psi(x)}(x)=F_k(x)>t$，同时 $\psi(x)=k\in\{\psi(E_t)\}=\{k_i\}$，所以 $x\in\{x\in E:F_k(x)>t\}\cap\{x\in E:\psi(x)=k\}$.

注意到 $F_k(x)$，$\psi(x)$ 都是可测函数，从而 $\forall k$，集合 $\{x\in E:F_k(x)>t\}$ 和 $\{x\in E:\psi(x)=k\}$ 都是可测集，所以 E_t 是可测集，函数 $F_{\psi(x)}(x)$ 是 E 上的可测函数.

1.2.2 集合的极限(上极限集,下极限集)

关于集合列的极限集,记住如下几点是必要的.

1. 集合运算表达式

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}A_k=\lim_{n\to\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k$$

与

$$\underline{\lim_{k\to\infty}}A_k=\lim_{n\to\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k$$

2. 极限集的元素的性质,即

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\{x\mid\forall n,\exists k\geqslant n,x\in A_k\}$$

与

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\{x\mid\exists n_0,\forall k\geqslant n_0,x\in A_k\}$$

3. 上、下极限集与集合的交、并的关系

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\subset\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n\subset\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$$

通过对集合列的极限(上极限,下极限)的定义和研究,使人们对一个集合列的极限运算有了进一步的认识,从而可以利用集合列的极限来研究更为复杂的运算.

例 4 设 f 及 $f_k(k=1,2,\cdots)$,是定义在集合 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上的实值函数,记 $D=\{x\in E:f_k(x)\to f(x)\}$,则

$$D=\bigcap_{s=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}\{x\in E:|f_k(x)-f(x)|<\frac{1}{s}\}$$

分析 若记 $E_{k,s}=\{x\in E:|f_k(x)-f(x)|<\frac{1}{s}\}$,则只需证明 $D=\bigcap\limits_{s=1}^{\infty}\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}E_{k,s}$. 由于已经知道$\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}E_k$ 的组成,这样表达会使问题变得简单.

证明 $\forall x\in D$,由于$\lim\limits_{k\to\infty}f_k(x)=f(x)$,因此 $\forall\ \frac{1}{s}>0$,一定存在 N,当 $k>N$ 时,有 $|f_k(x)-f(x)|<\frac{1}{s}$,即 $k>N$ 时,$x\in E_{k,s}$,从而 $x\in\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}E_{k,s}$,所以 $x\in\bigcap\limits_{s=1}^{\infty}\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}E_{k,s}$;反之 $\forall x\in\bigcap\limits_{s=1}^{\infty}\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}E_{k,s}$,$\forall\ \frac{1}{s}>0$,$x\in\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}E_{k,s}$,从而存在 N,$k>N$ 时便有 $x\in E_{k,s}$,亦即 $|f_k(x)-f(x)|<\frac{1}{s}$,所以 $x\in D$. 综上命题成立!

例 5 设$\{A_k\}$是一个集列,试证明:

(1) $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}A_k=\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}A_{2k-1}\cup\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}A_{2k}$.

(2) $\varliminf\limits_{k\to\infty}A_k=\varliminf\limits_{k\to\infty}A_{2k-1}\cap\varliminf\limits_{k\to\infty}A_{2k}$.

证明　(1) 由于显然 $\varlimsup\limits_{k\to\infty}A_{2k-1}\subset\varlimsup\limits_{k\to\infty}A_k$ 以及 $\varlimsup\limits_{k\to\infty}A_{2k}\subset\varlimsup\limits_{k\to\infty}A_k$,故

$$\varlimsup_{k\to\infty}A_{2k-1}\cup\varlimsup_{k\to\infty}A_{2k}\subset\varlimsup_{k\to\infty}A_k$$

反之,$\forall x\in\varlimsup\limits_{k\to\infty}A_k$,若 $x\notin\varlimsup\limits_{k\to\infty}A_{2k-1}\cup\varlimsup\limits_{k\to\infty}A_{2k}$,则 $x\notin\varlimsup\limits_{k\to\infty}A_{2k-1}$,一定存在 k_0,当 $k>k_0$ 时,$x\notin A_{2k-1}$;$x\notin\varlimsup\limits_{k\to\infty}A_{2k}$,一定存在 k_1,当 $k>k_1$ 时,$x\notin A_{2k}$. 取 $K=\max\{k_0,k_1\}$,则当 $k>2K$ 时,便有 $x\notin A_k$,此与 $x\in\varlimsup\limits_{k\to\infty}A_k$ 矛盾! 从而 $x\in\varlimsup\limits_{k\to\infty}A_{2k-1}\cup\varlimsup\limits_{k\to\infty}A_{2k}$,结论成立.

(2) 由(1) 知

$$\varlimsup_{k\to\infty}A_k{}^c=\varlimsup_{k\to\infty}A_{2k-1}{}^c\cup\varlimsup_{k\to\infty}A_{2k}{}^c$$

故

$$(\varliminf_{k\to\infty}A_k)^c=(\varliminf_{k\to\infty}A_{2k-1})^c\cup(\varliminf_{k\to\infty}A_{2k})^c$$

从而一定有

$$\varliminf_{k\to\infty}A_k=\varliminf_{k\to\infty}A_{2k-1}\cap\varliminf_{k\to\infty}A_{2k}$$

上述情形显然可以推广为多个子列的情形.

特殊情形:若子集列 $\{A_{2k-1}\}$ 与 $\{A_{2k}\}$ 都存在极限,则

$$\varliminf_{k\to\infty}A_k=\lim_{k\to\infty}A_{2k-1}\cap\lim_{k\to\infty}A_{2k}$$

以及

$$\varlimsup_{k\to\infty}A_k=\lim_{k\to\infty}A_{2k-1}\cup\lim_{k\to\infty}A_{2k}$$

例 6　求 $\{E_n\}$ 的上、下极限集,其中

$$E_1=\left[0,\frac{1}{2}\right]$$

$$E_2=\left[0,\frac{1}{2^2}\right]\cup\left[\frac{2}{2^2},\frac{3}{2^2}\right]$$

$$E_3=\left[0,\frac{1}{2^3}\right]\cup\left[\frac{2}{2^3},\frac{3}{2^3}\right]\cup\left[\frac{4}{2^3},\frac{5}{2^3}\right]\cup\left[\frac{6}{2^3},\frac{7}{2^3}\right]$$

$$\vdots$$

$$E_n=\left[0,\frac{1}{2^n}\right]\cup\left[\frac{2}{2^n},\frac{3}{2^n}\right]\cup\cdots\cup\left[\frac{2^n-2}{2^n},\frac{2^n-1}{2^n}\right]$$

$$\vdots$$

分析　做这类问题类似于求数列的极限,要先找到集列的变化规律,随后看其趋势. 通过对 E_1,E_2,E_3 及 E_n 的观察,发现 E_n 可以这样得到:首先将$[0,1)$ 分成 2^{n-1} 等份,得到 2^{n-1} 个长度为$\frac{1}{2^n}$ 左闭右开小区间$\{I_t\}(t=1,2,\cdots,2^{n-1})$,随后将每个 I_t 两等分并去掉其右边一份(开区间),将留下的 2^{n-1} 个小闭区间并起来就得到了 E_n. 注意到对任意的 $n\in\mathbf{N}$,都有 $|E_n|=\frac{1}{2^n}\times 2^{n-1}=\frac{1}{2}$,因此 E_n 最终不能充满$[0,1]$. $\{E_n\}$ 显然不是单调集.