

小学数学

概念教学：

行与思

林武◎著

XIAOXUE SHUXUE
GAINIAN JIAOXUE:
XING-YU-SI



教育科学出版社
Educational Science Publishing House

小学数学

概念教学： 行与思

林武◎著

XIAOXUE SHUXUE
GAINIAN JIAOXUE
XING YU SI

教育科学出版社

出版人 所广一
责任编辑 郑莉
版式设计 宗沅雅轩 孙欢欢
责任校对 贾静芳
责任印制 曲凤玲

图书在版编目 (CIP) 数据

小学数学概念教学: 行与思/林武著. —北京: 教育科学出版社, 2014. 3
ISBN 978-7-5041-8291-3

I. ①小… II. ①林… III. ①小学数学课—教学研究
IV. ①G623.502

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2014) 第 031294 号

小学数学概念教学: 行与思

XIAOXUE SHUXUE GAINIAN JIAOXUE: XING YU SI

出版发行 教育科学出版社

社 址 北京·朝阳区安慧北里安园甲 9 号 市场部电话 010-64989009

邮 编 100101 编辑部电话 010-64981357

传 真 010-64891796 网 址 <http://www.esph.com.cn>

经 销 各地新华书店

制 作 北京博祥图文设计中心

印 刷 北京中科印刷有限公司 版 次 2014 年 3 月第 1 版

开 本 169 毫米×239 毫米 16 开 印 次 2014 年 3 月第 1 次印刷

印 张 13.25 印 数 1—3 000 册

字 数 177 千 定 价 29.80 元

如有印装质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换。

序一

且行且思做教师

任 勇

前些天，我打开邮箱收到一份 word 稿——《小学数学概念教学：行与思》，心想：谁又在研究这个旧课题？随意打开，一看原来是福州市钱塘小学林武校长的新作。细看标题有“行与思”三字，忽觉课题似有新意，引发我继续往下读。往下一读，看了目录，才知这不是一篇普通的论文，而是一本书！

好家伙！写数学概念教学已属不易，写相对概念较少的小学数学概念教学更具挑战！

平心而论，数学教师写数学解题、数学方法、数学思想、数学思维者多，甚至写数学学习、数学文化者也不少，而能静下心来写数学概念教学，没有一定的学术功底，没有在教学中的行思所悟，没有远见、境界和坚守，是无法迎接这个挑战的。

一个实证，笔者在写《中学数学学习法》一书时，曾翻阅关于数学教育教学方面的文献，查阅“数学概念教学”内容，一是发现这方面的文献不多，二是觉得在“数学概念教学”章节或片段里，就那么干巴巴的几条，能“参考”处极少。所以我感到我书中的“数学概念的学习”一节最难写，也最晚才写出来，写出后连我自己都不是很满意。

即便到了今天，我以为涉及“数学概念教学”方面的文献仍然不多，但林武校长却在“行与思”中多有自己的收获。关于“数学概念的含义解读”，



他能另眼看数学概念的发展，正眼看数学概念的本质，定眼看数学概念的特性，“眼力非凡”！关于“概念教学的独特价值”，他能论述出学科价值、数概念及形概念的独特价值，更不容易的是探索了“概念教学的价值实现”！关于“概念教学的支撑理论”，他研究了认知心理学、发展心理学和教育心理学的重要研究成果，为“教学行思”奠定了理论基础。书中还分析了概念教学误区的“五重五轻”，即重操作轻语言、重结论轻过程、重内涵轻外延、重抽象轻表象、重建构轻应用，剖析深刻。令我眼睛一亮的是“概念教学的典型关系”一章，他把外延与内涵、前连与后延、表达与理解、形象与抽象、一般与特殊、描述与定义、过程与结果、映衬与正说、引入与深化等关系，论述得淋漓尽致。书中还有概念教学的常见模式和经典案例，让读者看到了一个生动的新颖的可学的“概念教学”。

我们常说教师要“学思并重”，我觉得教师还应在“学思并重”的基础上“行思并重”。通过教师从“行中思”来发展专业知能，达到行中有思、思中有行、行而后思、思而后行的境界，成为有思想的教师。

“学而不思则罔，思而不学则殆”告诉我们：只学习而不动脑筋思考，就会茫然不解；只凭空思考而不学习，就会疑惑不解。

我思故我在。人是靠思想直立的，没有“思”是不行的，仅有“思”是不够的，因此还必须在“思”的基础上进行“研”——我“研”故我智。

“学与思”、“思与研”还不够，还要践行，走向且思且研且行的境界，不断追求成为教育工作的“有思想有智慧的行动者”。

林武校长的研究，让我看到了一个践行着“且行且思”数学教育教学的生动样本。

（任勇，厦门市教育局副局长，数学特级教师，苏步青教育奖一等奖获得者）

序二

小学数学教学之重——概念教学

方运加

教育部在2013年6月16日出版的《求是》杂志上以直白的话“提高质量：教育发展的核心任务”为大标题撰文，道出了我们郁结心中十余年的话。这个显然的教育改革任务，多年来被难以计数的弯弯绕式的话语所遮蔽，尤其是数学教育领域，许多年了，数学教学的着眼点、着力点均远离“提高质量”，普遍忽视概念的作用和概念的学习，“自始至终皆情境，欢天喜地一课游”的数学课极为普遍。

正是在这样的形势下，林武校长虽校务繁忙，却仍带领老师们从教学着手，下功夫搞清小学数学教学改革发展的核心问题，编著了《小学数学概念教学：行与思》。这本书有助于小学数学教师树立科学的、实事求是的课堂教学理念，有助于落实“提高质量”这一核心任务，还可据此评价数学课堂教学质量。

“提高质量”就要去浮华、抓落实、不搞弯弯绕，用力提高教师的教学能力和专业水平。从这本书中不难看出，整体上提高数学教师的专业水平是林校长亲力而为之努力目标，他作为学校的管理者，用心抓教师的专业素质，抓得准啊！

林校长的书聚焦于小学数学概念教学，趁这个机会，我也想体验一堂课的教学准备过程，备备课。于是行动起来，选最简单的数字1进行教学准备，假设自己将要教学小学数学最初的一节课“1的认识”。



第一步，我将自己对“1的认识”之所知列了个单子。推敲后，发现自己因读过一些较深入的有关数的理论的书，故对数字1的理论认识并不弱，缺的是对1的教学方面的认识。这里，要搞清1的理论层面的意义和1的初学者认识的意义是不同的，这主要体现在概念水平的不同和定义方式及内容的不同。第二步，我有目的地查阅3有关1的教学经验材料以及幼儿心理方面的书。最后，因工作需要，我对数学课标以及教材或教辅方面的内容较为熟悉。有了上述基础和准备再加上刻意思考，形成了如下所述有关1的教学思路。现引以为序，敬请斧正！

眼下，就算是幼儿园小班三四岁的幼儿都会说1、2、3；会区别1个还是2个小朋友；能数1个、2个、3个，甚至更多；会用遥控器按出中央14台（少儿频道）。他们是神童？其中肯定会有，但这个现象与是否是神童关系不大。现在的家长们文化水平整体上比过去高多了，对独生子女的期望值大多了，抓早教，教孩子读数、数数、算数成了常态，致使现在的许多小学数学教师惊呼：“孩子们都会了，我们还教什么？”

小学数学教什么？这是一个远未完全搞清楚的问题。就拿数字1来说，3岁小孩子都会认、读、用，甚至会写，一年级数学教师还有值得下功夫之处吗？

有！我们对1的认识仍存在很大的空白。譬如，若问个问题：“1是什么？”作为数学教师，你清楚吗？你能用一两句话说清楚吗？如若教师都不清楚或讲不清楚，小孩子能想清楚吗？事情就是这样的：数从1开始，无人不识1，若问1为何，说清不容易！

对于1这个数字，3或4岁幼儿，5岁小童，6岁小学生，教数学的教师，其认识水平是不同的，或者说他们头脑中1的概念水平是不同的。面对1，有条件反射式的态度、有感觉层面的反应，也有知觉层面的认识；有被动识别，亦有主动认识。在所有这些情况中，概念层面的认识是最高水平，尽管这个层面的认识也不一定准确或科学。

“1是什么”求问的是概念层面的回答，有答不准的、答不对的、答不出的，这些都比不愿想、不愿答要强。

学习小学数学，一开始学习数字1，学生应该从中学得什么？这是数学

教师必须搞明白的。否则，就算是对1这个被认为极其简单的数学知识，教师也只能是糊涂着教，学生则是糊涂着学。这个状况可能会一直这么持续下去，谁都不会感觉到孩子们缺失了养成教育的最重要的内容：对任何所学知识，能够积极主动形成概念层面的认识，习惯于定义概念。而这本来是每节数学课都应该有的内容。

我们的数学课追求“淡化概念”已使数学营养尽失。教师教学1之前，学生从生活经验、从家教、从幼教那里获知了“什么是1”，知道了不少事关1的事物，例如1个同学、1个月饼、1块糖、1件玩具、1瓶饮料，但对于“1是什么”并不求知，顶多知道“1是个数”。我们的数学课习惯于教“什么是1”，不倡导教“1是什么”。小学数学课中教学1，教师本应该注意从概念层面来讲授，应该意识到1是一个数学概念，1是有定义的。教师在帮助学生理解“1是什么”的时候，应该有个意识，知道自己是在教学数字1的概念，而不仅仅是1这个数字。

连1都是一个数学概念，那数学中还有什么不是概念？没有！数学中的每个事项包括每个符号、每个名词都涉及概念，概念若不清，就难以准确应用，就听不懂讲的是什么，不知道学的是什么，就难以形成新的概念，就有可能产生“学困生”。那数学教学岂不成了概念教学？没错！差不多每节数学课都有概念教学，不是学习新概念，就是复习、应用学过的概念。掌握并运用概念是数学教学的常态，教数学课，若没有这个意识，那就是糊涂着教啦。

你可能会说：1是概念、2是概念、3也是概念，这一个一个都是数概念，都得教，都得学，哪有完啊。自然数有无穷多个，光学自然数就学不完啊！

不是这样的！数学有个好处，学习了1、2、3等数概念，就不难引导学生发现，自然数是个有开始，通过加1，不断生成更大的自然数的没有结尾的过程。数学家们不满足一个一个地揭示某类事物，而是力求寻找这一个个事物之间有什么联系，有什么生成关系，找出事物生成的关键，然后从整体上定义这类事物。他们变一个数一个数的定义为从整体上定义；为此，他们在20世纪初推出了自然数集合的概念，这个概念仍然离不开对1的定义。表述自然数概念的公理中有“后继元”和“前继元”这两个概念，实质上就是“加



1”和“减1”的过程。例如1是2的“前继元”，而3是2的后继元，1和2之间、2和3之间都不再有其他的数；每个自然数都拥有后继元，但1是首元素，它不是任何元素的后继元，1是自然数集合中唯一没有前继元的元素。

我们现在的数学课本说0是自然数，那么，0才应该是首元素啊！0自己没有前继元，0是1的前继元，而1是0的后继元啊！有这个疑问是很棒的，说明你懂得了首元素的含义。

自然数的定义中强调了这个集合有首元素，而首元素是什么则未具体规定，这意味着，首元素是1还是0并无大碍，二者都可以。这个事实提醒我们，在小学阶段将0包括在自然数里，是自找麻烦，很不明智的。可以省事而不省事，这与数学的精神不符。自然数是从1开始还是从0开始，从数学教育的角度看，应以方便学生学习为要来进行选择，这样做并不会产生逻辑上的困难。不选0的好处起码是：最小的一位数为何？这便有了1这个准确答案。若将0算作自然数，虽没有什么不对，但引来的是无休止的、毫无意义的争论。将0作为自然数并定义其为最小的一位数，会令许多学生困惑。这样定义等于什么也没说，因为面对一张没写任何数字的白纸，你不能说这张纸上没有自然数，因为0是无所不在的，人们只是为了省事，没将这个“鸭蛋”涂满纸罢了。让学生脑子里老惦记着这个事，不烦吗？0在小学数学中最好不具有独立意义，待到中学阶段学习整数、有理数时再定义它，会自然得多。自然数0对小学数学教学带来的不是好处，而是困惑或麻烦。这是个教训，应该被纠正。

在小学阶段将1作为最小的自然数，其好处是长远的。暂不说其对自然数定义本身的作用，仅凭其“万物归一”的特性就值得考虑。不知大家注意到没有，自2013年始，每年的6月17日是国务院设立的“全国低碳日”。何为低碳，如何计算每个人的碳排放量，这是非常关键的。我国居民生活的能耗（衣、食、住、行、用、服务）占全国能源消费总量的40%以上。这个计算就是把全国的碳排放总量看作100，换言之，也相当于从比值角度看成1。

每个家庭直接能耗产生的碳排放由四部分构成：用电量、用水量、用气量、耗油量。科学家们搞清楚了发1度电要向大气排放0.785公斤二氧化碳（简称“碳排放”），每吨水的碳排放量是0.91公斤，每立方米气的碳排放量是

0.19 公斤，每公升油的碳排量是 2.7 公斤。搞清楚了每 1 度电、每 1 吨水、每 1 立方米气、每 1 公升油的碳排量，每 1 个家庭的碳排量就容易计算出来了。不难看出，节水、节电、节气、节油是目前减少碳排量最主要的途径。

看看，在我们的生活中，处处都有以 1 为起点，以 1 为整体，以 1 为标准的应用。那数字 1 是什么呢？这就是我们必须讨论的“1 的定义”。

数字 1 可因由不同的需要予以定义。例如，可以用集合的方法先定义空集合 $\emptyset$ ，再定义以 $\emptyset$ 为元素的单元素集合 $\{\emptyset\}$ ，这个单元素集合的基数是 1。这个定义的好处在于单元素集合具有广泛的代表性，对是什么不做具体规定，这使得 1 这个概念具有广泛的应用性和代表性。

还可以定义自然数的首元素为 1，即 1 是自然数的首元素。不是说自然数的首元素也可以是 0 吗？对！自然数这个集合的元素间有个最重要的性质就是有开头没结尾——有开头的具体含义就是有首元素，首元素是什么并不重要，可以是 0，也可以是 1，还可以是其他。这个知识我们刚刚讨论过，这里不再多说。

至此，我们给出了 1 的比较科学的定义（实际上还不够严格，还有漏洞可钻），这应该是读师范数学专业时接触过的定义。但我们还没有讨论小学一年级数学课如何讲 1、如何定义 1，方为妥当。是的，前之所说，乃教师须知。面对一年级小学生，如何讲 1 的概念？若不能直接从 1 的定义开始，那如何从概念角度让学生认识 1？数学课教学 1，当然要讲 1 的概念，可大多数学生都已知 1 且能用 1，教师讲什么呢？

我认为可以从 1 的基数性质和序数性质着手教学，即先让小学生说说他们熟悉的 1 是什么。小学生会说 1 是 1 个苹果，1 是 1 个人，1 是 1 个雪糕，1 是 1 只羊，1 是 1 本书；还有可能说 1 是我排第 1，1 是一年级，1 是第一高楼，1 是冠军。这些就是小学生头脑中的 1 的概念，直观、具体、可靠，是值得教师呵护的思想；而且它们与 1 的严格定义并不矛盾，符合单元素集合的特征，都属于单元素集合，顶多是语法表述上有些别扭。但这正是建立在已知基础上的对 1 的认识，教师应该随着学生所说在黑板上画出 1 个苹果、1 个人、1 个雪糕、排在第 1 的学生、拿着冠军奖杯的运动员等，待学生说够。更要注意那些没说话的小学生，引导他们也说出“1 是什么”，这十分重要！唯

如此，“是什么？”才会是伴随他们终身的疑问。对于能用主谓结构说出一句“1是……”的学生，无论对错，都没有关系，重要的是让学生学着给1下定义，在这个过程中形成1的概念。学生之所说，由教师在黑板上做了记录，这犹如富矿，教师要运用这个资源引导学生发现这些“1的事物”的共同特点是什么。此时最需要教师的引导，通过这个引导过程寻找这么多事物的相同之处，不仅从像不像、是不是的角度，还可以从数量上看，这些东西都只有1个，所以才说1个苹果、1个人……于是学生明白了，“1原来就是1个东西”，凡1个东西都可以用“1”来表达数量。至此，这节课关于1的教学目的就算是达到了。

学生的“1就是1个东西”或“1就是1个物”的认识是对数字1的初级认识，这个认识已经是概念性的了，已经是脱离具体的物了。进一步认识“1就是一个数”，还需要有一个过程。这节课关于1的概念性的认识是极其重要的铺垫。真正认识到1是一个数概念而不是物概念，尚须通过对1的后继元2、2的后继元3的学习后，在教学1、2、3之间的关系时，同样让学生在前述1的认识过程下，通过对2、3的类似认识过程来巩固学生对概念下定义的习惯（正确的下定义是将来的事，小学是习惯养成的阶段，不必在严格性上下过多的功夫）。这样就促使了学生从概念角度认识1、2、3。下面的事就简单了，学生的这个习惯已小有养成，再通过学成1、2、3的规律，学习其他1位数已不成问题，只需在书写上对学生有所要求就可以了。

下一个关键点是对10的认识（这个时候给出不独立的0，重点强调其在表达位值、进位上的作用，较为妥当。前提是0暂不算作自然数），可以让学生试着定义10是最小的两位数——至于如何定义其他两位数，可以像认识1那样，让学生说出某个具体的两位数是什么。同时，应该让学生注意到：用10个数码就可以表示许多的数这件事是很了不起的。因为，若不用数码而用小棍，则要有多少个数，就得用多少根小棍。不用小棍、不用手指头，而用写数字的方法数数、计数，省了很大的事啦。总之，教师在教学中，要设法通过具体的数概念以及一位数、二位数的概念，让学生体会到数学的智慧所在。

有些教师教数学，轻视概念，不注意数学知识的特点，不挖掘数学的智

慧,使得数学的营养尽失。有专家说什么教数学不能仅仅教知识;教师不能重知识轻能力;应该让学生在生活学习生活的数学;教师应该创造用数学的情境,有了这个情境,再通过课堂上的合作学习,学生的能力就提高了。这都是胡说!数学知识是知识与能力的高度统一,且首先反映在对概念的形成、理解和运用上;其次反映在运算上;最后,在小学数学应用题的解决上得到鲜明的体现。这些专家不知道:只有挖掘了数学知识中的智慧养分才能提高学生的能力,而这些养分蕴含于概念和方法之中,是要通过概念教学、概念分析,通过让学生试着下定义的方式才能使学生获益。任何花架子都不能有效地提高学生的数学思考能力,教师的作用正在于此。初学数学的学生,就算是天才,也无法独自挖掘数学知识中的智慧。从这个意义上讲,学前的孩子能够数数、认数,但并未掌握哪怕最基本的数学知识。

数学教学就是概念教学,数学是由概念之砖构成的大厦,教师只有科学地认识了所教数学中的每一个概念,才可能有意识地从发展学生能力的角度来发挥数学概念的育人作用。为此,老师们应该不断提高自己的专业水平。

最后,我想再强调一下:我实在想不出小学或中学数学教学中有什么内容能够脱离开概念及其教学。

(方运加,首都师范大学数学科学学院副教授,《中小学数学》常务副主编,中国教育学会数学教育研究发展中心主任)

目录

第1章	数学概念的含义解读	
第1节	另眼看数学概念的发展	3
第2节	正眼看数学概念的本质	8
第3节	定眼看小学数学概念的特性	18
第2章	概念教学的独特价值	
第1节	概念教学的学科价值	25
第2节	数概念及形概念的独特价值	39
第3节	概念教学的价值实现	45
第3章	概念教学的支撑理论	
第1节	认知心理学的主要研究成果	53
第2节	发展心理学的主要研究成果	60
第3节	教育心理学的主要研究成果	64

第4章 概念教学的常见误区

- 第1节 重操作轻语言 75
- 第2节 重结论轻过程 82
- 第3节 重内涵轻外延 89
- 第4节 重抽象轻表象 97
- 第5节 重建构轻应用 103

第5章 概念教学的典型关系

- 第1节 外延与内涵 111
- 第2节 前连与后延 118
- 第3节 表达与理解 123
- 第4节 形象与抽象 129
- 第5节 一般与特殊 136
- 第6节 描述与定义 142
- 第7节 过程与结果 147
- 第8节 映衬与正说 155
- 第9节 引入与深化 161

第6章 概念教学的常见模式

- 第1节 概念形成教学模式 167
- 第2节 概念同化教学模式 172
- 第3节 概念同化教学改进模式 178
- 第4节 概念教学的七阶段模式 184
- 第5节 APOS 理论概念教学模式 191

第 1 章

数学概念的含义解读

概念是思维的核心，在小学数学教材中，数学概念随处可见。有“数”的概念，如“自然数”计的“整数”、“小数”、“负数”等；有“形”的概念，如“直线”、“线段”、“三角形”、“垂直”等；有“统计”的概念，如“统计图”、“统计表”、“平均数”等；有“关系”的概念，如“加法”、“乘法”、“方程”等。数学概念是数学知识的“细胞”，是一切数学规则的研究、表达与应用的基础，是构造数学大厦的基石。

在小学数学教学中，教师应当如何来认识和把握数学概念？在数学发展的历程中，在哲学家、心理学家、逻辑学家等人的眼里，这些数学概念又是什么样的呢？不同时期、不同角度的表述，有什么相同点和不同点？本章试图通过哲学、心理学、逻辑学等角度，借助数学史料、教学实例等素材，借给读者一双这样的“慧眼”，使读者能把数学概念看得“清清楚楚、明明白白、真真切切”，以期在后续的思考中有较为多元、丰富且清晰的表象。

- 第1节 另眼看数学概念的发展
- 第2节 正眼看数学概念的本质
- 第3节 定眼看小学数学概念的特性

第1节 另眼看数学概念的发展

一、从数学发展的历程看数学概念

德国数学家 H. 汉克尔于 1884 年在《近百年来数学的进化》一书中提出：“在大多数的学科里，一代人的建筑为下一代人所拆毁，一个人的创造为另一个人所破坏。唯独数学，每一代人的创造都是在古老的大厦之上再添加一层楼。”^[1]从标志着数学走向成熟的《几何原本》开始，两千多年来，数学的发展大体可以分为三个阶段。

(1) 17 世纪以前是数学发展的初级阶段，其内容主要是常量数学，如初等几何、初等代数。

(2) 从文艺复兴时期开始，数学发展进入了第二个阶段，即变量数学阶段，产生了微积分、解析几何、高等代数。

(3) 从 19 世纪开始，数学获得了巨大的发展，进入了近代数学阶段，产生了实变函数、泛函分析、非欧几何、拓扑学、近世代数、计算数学、数理逻辑等新的数学分支。

可以说，每一次数学大厦的添砖加瓦、重塑新楼，总是伴随着新的数学概念的提出与深化。因此，从某种意义上来说，数学概念是建成数学大厦不可缺少的基石。但是数学概念一经提出和验证之后，是否就是准确无误的“真理”？

王章雄在《数学的思维与智慧》一书中描述了这么一个数学家的故事^[2]：