

二集三

三角數理卷六 原書以此至第八卷爲附卷

英國海麻士輯

英國 傅蘭雅 口譯
金匱 華衡芳 筆述

此卷專論對數

對數之理

第一款 如有式 $a^x = b^y$ 其甲爲任何正負之數則天之各同

數爲與卯相配之各對數而其甲爲對數之底

從此例則卯之甲底對數可作 $\log a$ 以明之

所以 $\log a$ 與 $\log b$ 皆爲指明卯甲天三數相關之式

第二款 凡正號之數可用任何非一之正號數之乘方以得之

卽如于 $a^x = b^y$ 式內令甲爲大于一之正數則以天迭代從

○至無窮所能有之各實數則其卯能有從○至無窮之各同數

若天爲負數而等于一則 $a^{-x} = b^{-y}$ 如令人有從○至無窮

之各同數則卯可有從一至○之各同數
所以天從下遞變至 ∞ 則 $\log a$ 從○遞變至 ∞ 卽爲凡所能有之正號之數

如甲小于一而將前式變之爲 $a^{-x} = b^{-y}$ 則從已證明之理

因 $a^{-x} = b^{-y}$ 則天變爲各數其 $\log a$ 與 $\log b$ 皆可變爲各正數

第三款 凡對數之底不能爲一亦不能爲負

因一之各乘方皆爲一而負數之各方或爲正或爲負或爲虛不能有挨次而下之數則其數必有不全之處所以一與負數俱不能爲對數之底

惟正號之數其各乘方恆爲正數所以除一之外皆能爲對數之底

第四款

因 $a^x = b^y$ 又 $a^z = b^w$ 或 $a^x = b^y$ 依甲之大小于一而異則從以上

所有之界說可見無論何種對數其底之對數必爲一其一之對數必爲○其○之對數或爲1或爲下依其

底之大小于一而異故

底若大于一則從^{卯一甲}式可知真數愈增則對數亦愈增

又可知凡大于一之數其對數為正凡小于一之數其

對數為負

底若小于一則其例與前相反凡真數之大于一者其對數為負小于一者其對數為正

設于^{卯一甲}之式中令甲為任何正號之數卯為已知之數

則天之所配算學級數可求至任何相近幾與卯等于底之整方數無異

如^{卯一甲}與^{卯一甲}其對數必為整數二與三惟卯若不適

等于底之整方則其對數必為奇零

第五款 若令甲為不變之數而以卯遞代從一而增之

正整數于^{卯一甲}式中求得其天之各同數依次序列之即

得甲底之對數表

惟因對數之底甲可用任何正號之數為之故對數表

可用無窮幅數然無論有任一幅對數若以常乘數乘

其各對數可變為他底之一幅對數

第六款 有甲底之對數表欲變之為乙底之對數表只

須以常乘數^{對乙}一乘之即得

令卯為任何數其在甲底乙底兩表中所配之對數為

天與地則^{天甲}所以^{地乙}而^{天甲}即^{地乙}

卯為任何數其甲底之對數為天若以^{對乙}一乘之即得

卯在乙底之表中相配之對數其常乘數^{對乙}為乙底

之表根與甲底之表根之比例數

又如^{天一}則^{卯一甲}而^{地一}所以^{對甲}

第七款 茲將對數性情中最要之理顯之

凡相乘積之對數等于各本數之對數之和

令天地為寅卯二數之甲底對數則^{天甲}故以此兩

式相乘得^{天甲}則依界說^{地一}惟因^{天甲}故^{地一}

此例無論寅與卯有何同數其式必為真所以若變其

卯為

則

$\begin{matrix} \text{對寅} & \text{對卯} & \text{對巳} \\ \text{對寅} & \text{對卯} & \text{對巳} \end{matrix}$

因用此法可推至任若干數相乘

所以得公例云任若干數相乘積之對數等于各乘數之對數相加

第八款 任何數約得之數其對數等于實之對數中減

去法之對數

因

$\begin{matrix} \text{天甲} & \text{地甲} & \text{天乙} \\ \text{寅} & \text{卯} & \text{辰} \\ \text{卯} & \text{辰} & \text{巳} \\ \text{對寅} & \text{對卯} & \text{對辰} \end{matrix}$

所以

第九款 任何數之某乘方其對數等于本方邊之對數

與其方指數相乘

因

則

所以

其未為任何正負整分各數

第十款 任何數之某方根其對數等于以根指數約其本數之對數

因

則

所以

$\begin{matrix} \text{天甲} & \text{地甲} & \text{天乙} \\ \text{寅} & \text{卯} & \text{辰} \\ \text{卯} & \text{辰} & \text{巳} \\ \text{對寅} & \text{對卯} & \text{對辰} \end{matrix}$

第十一款 所以凡欲將兩數相乘或約者可在對數表

中檢得兩數之對數或相加或相減則其對數之和數

較數必為兩真數乘得約得之數之對數故可再于本

表中檢得其乘得約得之真數

如欲知任何數之某乘方或某方根則可在對數表中

檢得本數之對數而以方指數根指數乘之約之再檢

表中之對數有與乘約所得之對數相等者則其對數

之真數即為所求之方或根

由此可見若所設所求之數不出乎表之限尋常之對

數為則可以加減之法代乘約又可以乘約代乘方開

方

凡算式中乘約之數最繁者用對數能得簡易因有數

種算法用對數易推之若不用對數而用尋常之乘約

開方則其數之繁幾非人力所能為此對數能變繁為

簡之證也然尋常之各數相加或各數相減者又無法

能用對數更使其簡易

第十二款 對數之幅數雖有無窮然算學家常用之表

祇有兩種一為訥白爾對數一為十進對數

算學中凡遇最深之幾何理大抵皆用訥對推之因訥

對之底為不能推盡之數故恆以戊字代之截取其八

位之數爲二七一八二八一八

十進之對數因爲算學中所常用故又謂之常對數其對數之底爲一。恆以甲字代之因此數同于常數進位之底故其表比他表更能完備

常對數亦從訥對推出其所用之常乘數卽爲常對之根

觀某書第六款

式則其理自明矣

$$\begin{aligned} & \text{對}_{10} 1 = 0 \\ & \text{對}_{10} 2 = 0.30103 \\ & \text{對}_{10} 3 = 0.47712 \\ & \text{對}_{10} 4 = 0.60206 \\ & \text{對}_{10} 5 = 0.69897 \\ & \text{對}_{10} 6 = 0.77815 \\ & \text{對}_{10} 7 = 0.84510 \\ & \text{對}_{10} 8 = 0.90309 \\ & \text{對}_{10} 9 = 0.95424 \end{aligned}$$

此書中所有論對數之式每以對代而推算之時每用對代如有不合此例者必隨處明言之如此則雖不記其底數亦不慮混淆矣因訥對與常對各有一定之用處故也

論常對數之性情

第十三款 常對數之表凡遇真數非爲十之乘方處其對數俱爲不盡之數故表中只能列其略數而以小分數明之

所以其對數爲一位整數以下俱爲小數若其真數小于二則其對之全同數卽一位整數與必爲負

惟表中所列者祇有正號之對數而無負對數茲設二法能將一切數之對數卽真數小于一之正對數也俱能在一表中包括之其表中祇列正對數之小數而不列其整數凡對數在定位之點以前者爲整數亦謂之首數在定位之點以後者爲小數

第十四款 負對數有法能變之但令其首數爲負

令負對數爲其其卯爲首數丁爲小數因

$$\begin{aligned} & \text{對}_{10} 1 = 0 \\ & \text{對}_{10} 2 = 0.30103 \\ & \text{對}_{10} 3 = 0.47712 \\ & \text{對}_{10} 4 = 0.60206 \\ & \text{對}_{10} 5 = 0.69897 \\ & \text{對}_{10} 6 = 0.77815 \\ & \text{對}_{10} 7 = 0.84510 \\ & \text{對}_{10} 8 = 0.90309 \\ & \text{對}_{10} 9 = 0.95424 \end{aligned}$$

新小數丁不爲負所以負號之全對數可變之爲但有首數爲負之數其法祇須將首數加一而以小數減一之數加之

反之若有首數獨爲負之數亦能變之使全爲負數法將其小數如前變之而以一減其首數卽得

如 $\text{對}_{10} 1 = 0$ 其負號不寫于首數之旁而寫于首數

$$\begin{aligned} & \text{對}_{10} 2 = 0.30103 \\ & \text{對}_{10} 3 = 0.47712 \\ & \text{對}_{10} 4 = 0.60206 \\ & \text{對}_{10} 5 = 0.69897 \\ & \text{對}_{10} 6 = 0.77815 \\ & \text{對}_{10} 7 = 0.84510 \\ & \text{對}_{10} 8 = 0.90309 \\ & \text{對}_{10} 9 = 0.95424 \end{aligned}$$

之上其意謂祇有首數與此號有相關也此爲簡寫之

之法若從詳寫則當作 如欲將此數仍變爲全負數

則

則其式爲

$$\begin{aligned} T &= 2 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 0 \cdot -1 \\ T &= 1 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 0 \cdot -1 \\ T &= 1 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 0 \cdot -1 \\ T &= 1 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 0 \cdot -1 \end{aligned}$$

以上已證明無論何數之對數俱可用正號之小數茲欲論用何法能定其首數及正負

第十五款 凡真數從定位之點起其左有卯位則常對之首數爲正 凡真數若爲小數從定位之點起至第一箇有數之位其間有卯位爲○則其常對之首數爲正而負

因真數有卯位則必在正與一之間其○爲有卯位之最小數所以本數之對數在○之對數與一之對數之間即必在正與卯之間故必爲正與小數相和而成而其首數爲正

若真數爲小數則從第一箇有數之位至定位之點其間有卯位爲○而其數必在一與二之間因二爲有卯箇。位在定位之點至第一位有數之間之最小分數所以其數之對數必在二與三之對數之間即在正與一之間此對數若用正號之小數明之必爲正與小數相加故其首數爲負而等于正即等于從定位之點至第一位有數之處之位數

第十六款 用對數之時凡遇負對數常用祇有首位爲負之數入算乃此書之常例也然用此法明負對則以

任何數乘之或約之之時其間有數件異事不可不知茲設數例以明之

設對數祇有首位爲負而欲以他數乘之則必勿忘其首對與小數有相反之號

即如

$$\begin{aligned} T &= 3 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 0 \cdot -1 \\ T &= 1 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 0 \cdot -1 \\ T &= 1 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 0 \cdot -1 \end{aligned}$$

設對數祇有首位爲負而欲以他數約之則必將其首數改之使其約得之首數爲整數亦改其正數以就之

如欲以三約之必令

$$\begin{aligned} T &= 7 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 0 \cdot -1 \\ T &= 7 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 0 \cdot -1 \\ T &= 7 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 0 \cdot -1 \end{aligned}$$

題 用對數求之方根

已知

$$\begin{aligned} \text{對} &= 1 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 0 \cdot -1 \\ \text{對} &= 1 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 0 \cdot -1 \\ \text{對} &= 1 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 0 \cdot -1 \\ \text{對} &= 1 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 0 \cdot -1 \\ \text{對} &= 1 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 0 \cdot -1 \\ \text{對} &= 1 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 0 \cdot -1 \\ \text{對} &= 1 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 0 \cdot -1 \\ \text{對} &= 1 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 0 \cdot -1 \end{aligned}$$

即求得之方根爲

$$1 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 0 \cdot -1$$

第十七款 常對數內首數之別惟在真數大小于定位

之點之位數而其小數則相同

如令啣為任何整真數啣為其對數之首數丁為其對

數之小數則 若令^對_啣則其有數之位與啣同但其單

位之數移上寅位則 其首數為^對_啣其小數與^對_啣之

小數相同

又如令真數之小分數為^對_啣則其有數之位與啣相

同惟其數移下寅位故

若所設之分數大于一則啣大于一而大于一寅即其

啣不小于一寅故 其首數啣為正而小數與^對_啣之小

數同

惟所設之分數小于一則啣小于一所以^對_啣小于一寅而

此式之對數以但有首數為負之數明之其小數

與^對_啣之小數同

第十八款 從以上諸說可見常對之底與數目進位之

底相同則有便益之處如下

真數無論為整為分一視其數即能知對數之首數當

為若干故首數可不必列于表中

因表中之對數不列首數故表中之任一數皆可為數

目相同大小不同之各數所公用

如表中之 本為^對_啣之對數亦能為

各數之對數之小數則其 無論升降若干位俱可

以用表中之 為對數之小數所以對數表內所列之

小數本專為某數之對數而設者可供無窮他數之用

祇須定其首數而已

若對數之底與算數進位之底不同者則其表不能有此簡便通用之法也

如訥白爾對數其而

$\log A = 1.6931547$
 $\log A = 0.6931547$
 $\log A = 1.6931547$
 $\log A = 0.6931547$
 $\log A = 1.6931547$
 $\log A = 0.6931547$

所以其

$\log A = 1$
 $\log A = 0$
 $\log A = 1$
 $\log A = 0$

在表中必各列一對數其求小分數之對數最簡便之法必變為常分數而求其母子兩對數之較

用對數表之法

第十九款 對數表內以真數從一起至若干數為限與其各對數之小數並列為表其首數恆不列于表中常用之對數表有從一至十萬之各數其真數以五位為限其對數之小數推至七位

凡用對表以推算者其事其有兩種 一為有任何真數欲從表得其對數 二為有任何對數欲從表得其真數

第二十款 設有任何數欲從表得其對數

無論其叩為整數為分數為小數其對數之首數俱易定其為何數

若其叩除小數之外整數不大于五位者則其對數之

小數檢表即得

若其叩除小數之外整數之位不在表之限內謂整數多于一五

也者 則必將其定位之點移之使其整數能在表之限

內而檢其對數之小數

令叩內所有整數之一分為卯而小數為丁令丑為卯

對之小數房為卯與丑兩數之對數較表中常列此較數即有

比例式 故必以天之同數天加于丑方能得卯之對

數小數此亦為所設小數之對數小數

以上之法其理簡而易明即如真數之等相較者若與

對數之等相較者相配則對數之較數與真數之較數

恆有比例故知上法絕無錯誤

觀第二十三款所列之對數表可知真數遞加則對數

之較略近于常數其真數愈大則對數之較愈近于常

數故用以上之比例式以求其數若叩為數之極大者

則不其再差 此即謂對數之長數與真數之長數略

有比例其理為用對數時最要之事也若能用之謹慎

雖表之界限甚小亦易推得其界外之各數

一題 有真數三四五六七求其對數

于第二十三款所載之一頁對數表內之哪行檢其真數三四五六于○行內檢得其前三位數五三八于七行內檢

得其後四位數六六一七另加首數即得

對三四五六七 四五六六六七一

二題 有真數三四五六七八九求其對數

此數只能令其五位為整則若但論其整數對仰之

例丁 四五七八八九

小數而不計其首數即得

對三四五六七 五三八六六一七

惟丁之大于其數

三四五六七

為八而之對數大于所有之

三四五六七

之對數為

三四五六七

即一六

為七位小數之末三位若以為對數之長數與真數之長數有比例而以第二箇對數中所欲加之數為

天則其比例式為所以

$$\frac{0.89}{1.26} = \frac{1.26}{2.00} \quad \frac{0.89}{1.26} = \frac{1.26}{2.00}$$

若棄其小于七

位之數一則得所以

天一一二

而

對三四五六七八九 五三八六六一七 1.000 二五三八六六七二九 對三四五六七八九 六五三八六六七二九

又有一法可省其與八九相乘之事因觀表中下列有較數之比例分數此即為較數之十分之一十分之二即以一三至九之各數乘之之各積數而尾數之外其小于五者棄之大于五者以一

收之則可取八與九所對之數徑得

一〇八 〇九 〇九

又所以

得其推算之式可列之如

$$0.89 = 1.26 - 0.37$$

對三四五六七八九 五三八六六一七 對三四五六七

$$1.26 - 0.37 = 0.89$$

$$0.89 - 0.37 = 0.52$$

對三四五六七八九 六五三八六六七二九

夫真數之長數與對數之長數雖可勉強相比究非真有比例也惟真數甚大而長數小則所差者極微而可不計故所設之數其右邊截去之位愈少愈佳謂必取表限中所能容之最大數也 若卯大于十萬而丁小于一則有法能證其比例之差不入七位小數之內

與每位相配之較得
八九八七
 二六〇八
 二六〇九
 二六〇八
 二六〇八
 以此各數加入表

中檢得之數又加首數即得八五三八六七三〇爲所求之對數

觀此可知末一箇比例數即從其七與對數之第七位小數已不相關所以凡截真數之尾作小數而多于三位者則第四位與以下各位皆可作爲〇

若卯內有小數則不問其小數而視卯如全爲整數依第十九款之例其對數之小數當不變又因其首數爲

易知之數可加于其前如

對三四五六七八九
 一五三八六七二九
 對〇〇三四五六七八九
 一五三八六七二九

第二十一款 所以真數若多于五位而不在常表之限內者其求對數之法如下

先求其首五位真數之對數小數宛如真數爲小數而不論其定位之點以求其對數者然又于較數行內取其向上之較從比例之分數取其與第六位相配之分第七位之十分之一相配之分第八位之百分之一相配之分依各分而得比例數將各數依位與首五位之對數小數相加即得有六七八位真數之對數小數再審真數之大小知應加某數爲首

第二十二款 用表之第一件事爲有對數咄而欲用檢表之法得其相配之真數

若其咄之小數丑表中有此數則祇須取其相配之真數而所有之首數能定其單位之點

若所設之對數其丑不在表中可于表中檢其略小于丑之數丑命其真數爲卯又取咄相配之數即丑之命其與丑相較之數爲房又令丑丑之較中爲房則得比

例式而原天將此分數化爲小分而與卯相加則得

一數其對數之小數爲丑故從此能得所求之數惟必依前法審其首數以定單位之點

若所設之對數全為負必先化之使其小數為正而後如上法求之

一題 有對數五五三八六六一七求其真數

命所設之數為咄于表之。行內檢得略小于咄之

之小數者為

五三八五七三上

此數與咄行之

三四五六

相對觀二十三再

表

橫看至第七行得咄之末四位小數所以將七加

六六一七

于之後得

三四五六

因首數為五故所求之數為

三四五六七〇

二題 有對數二五三八六七二九求其真數

依前法檢表知所設之小數必在

五三八六六七一

之間其

五三八六六七

所

五三八六六七

配之真數為

三四五六七

惟因所設之小數大于

五三八六六七一

其較為一

則知所配之真數必比

三四五六七

稍大若將

三四五六七

加一則對數

之較為依中比例之理可令長數為天而

一五六 一一二 一二天

則其

一二六 二〇八九 一一二

所以若不論其位數之大小則所求之數為

三四五六七八九

惟因所設之首數為二故知所求之數必為

三四五六七八九

如用有比例分數之表則可省其以約之事因

觀較數

一一六

之比例分數其小于一之數為

一一二

此數與

八相配又其餘數一若于右加以〇而為一即與其

與九相配之數一所差無幾所以可定其一與九相

配而一與〇相配所以可徑得其所求之數為

三四五六七八九

如前依其首數以定位即得所求之數為

三四五六七八九

其算

式列之如下

三四五六七八九

〇五三八六六一七

三四五六七

〇八

〇〇九

三四五六七八九

三題 有對數 求其真數

(一) 六八二八

先化為 乃依前法得所求之數為

理一五五三八五七一六

五五五五五五五五

第二十三款 所以凡有對數欲求真數而表中無此真數者其法如下

不論其首數但于表中檢略小于所設之小數而取其相配之五位真數又求其對數之較為房再于較數行內求其上一數之對之較又在比例分數內查得小于房之數為已取其所配之數為第六位小數再將已與房相減而求其午此為較數房多十倍而以午所配之數為第七位小數再將午與房相減而在其較數之十倍之小一箇比例數取其所配之數為第八位小數如是求得七八位真數乃從所設之首數以定其位茲恐學者尚未明故于對數表內錄出一篇以為式

比例分 一六六 二五五 三六六 四六六 五六六 六六六 七六六 八六六 九六六

對數 一六六 二五五 三六六 四六六 五六六 六六六 七六六 八六六 九六六

九 九三二四 一八四〇 三六六五 五五五五 六六六八 八六六六 九六六六 九六六六

	〇	一	二	三	四	五	六	七	八
三三三	三三三〇	三三三一	三三三二	三三三三	三三三四	三三三五	三三三六	三三三七	三三三八
三三三	三三三九	三三四〇	三三四一	三三四二	三三四三	三三四四	三三四五	三三四六	三三四七
三三三	三三四八	三三四九	三五五〇	三五五一	三五五二	三五五三	三五五四	三五五五	三五五六
三三三	三五五七	三五五八	三五五九	三五六〇	三五六一	三五六二	三五六三	三五六四	三五六五
三三三	三五六六	三五六七	三五六八	三五六九	三五七〇	三五七一	三五七二	三五七三	三五七四
三三三	三五七五	三五七六	三五七七	三五七八	三五七九	三五八〇	三五八一	三五八二	三五八三
三三三	三五八四	三五八五	三五八六	三五八七	三五八八	三五八九	三五九〇	三五九一	三五九二
三三三	三五九三	三五九四	三五九五	三五九六	三五九七	三五九八	三五九九	三六〇〇	三六〇一
三三三	三六〇二	三六〇三	三六〇四	三六〇五	三六〇六	三六〇七	三六〇八	三六〇九	三六一〇
三三三	三六一一	三六一二	三六一三	三六一四	三六一五	三六一六	三六一七	三六一八	三六一九
三三三	三六二〇	三六二一	三六二二	三六二三	三六二四	三六二五	三六二六	三六二七	三六二八
三三三	三六二九	三六三〇	三六三一	三六三二	三六三三	三六三四	三六三五	三六三六	三六三七
三三三	三六三八	三六三九	三六四〇	三六四一	三六四二	三六四三	三六四四	三六四五	三六四六
三三三	三六四七	三六四八	三六四九	三六五〇	三六五一	三六五二	三六五三	三六五四	三六五五
三三三	三六五六	三六五七	三六五八	三六五九	三六六〇	三六六一	三六六二	三六六三	三六六四
三三三	三六六五	三六六六	三六六七	三六六八	三六六九	三六七〇	三六七一	三六七二	三六七三
三三三	三六七四	三六七五	三六七六	三六七七	三六七八	三六七九	三六八〇	三六八一	三六八二
三三三	三六八三	三六八四	三六八五	三六八六	三六八七	三六八八	三六八九	三六九〇	三六九一
三三三	三六九二	三六九三	三六九四	三六九五	三六九六	三六九七	三六九八	三六九九	三七〇〇

表之哪行中列前四位真數其第五位真數在哪之橫

行中 其〇行中有 各真數之對數小數其

首三位之數為下數所公用故不重列他行亦然

即如第五行內為 各真數之對數小數之後

四位而其前三位與〇行同故不重列所以其對數之

七位小數為

五五五五五五五五
五五五五五五五五
五五五五五五五五

表中有比〇更小之意因其數之前三位見于〇行中

第二十四款

法將所欲減之各對數取其餘數與他對數相加而將所得之和數依用負對數之法而減去若干十取餘數之法將末位之數與十相減他位各與九相減則所得之數名曰對餘數

茲列一算式以明其理式中所用之各數俱從上二篇表中所檢得者也

論指數及對數之級數

第二十五款 茲欲將^甲化爲級數依天之各乘方自小

而大序之卽將任何數依其對數增大之各方成級數也其各法如下

天 = $\frac{\frac{3}{5} \quad \frac{4}{5}}{(三、四、五、二、六)} \quad \frac{\frac{5}{5} \quad \frac{6}{5}}{(三、四、五、六、七)}$
 $\frac{\frac{1}{5} \quad \frac{2}{5}}{(三、四、五、一、七)} \quad \frac{\frac{3}{5} \quad \frac{4}{5}}{(三、四、五、九、八)}$
 $\frac{5}{5}$ 對 (三、四、五、一、七) = 二四二一一四八五
 $\frac{2}{5}$ 對 (三、四、五、九、八) = 〇〇三一一七〇八九
 $\frac{4}{5}$ 對 (三、四、五、二、九) = 九一九二七八〇七
 $\frac{1}{5}$ 對 (三、四、五、六、七) = 九八九二二六六七

二〇 對天 = 一五三七九〇五八
 三四五〇六 〇五三七八九四六
 一一二
 〇九 一一三
 天 = 三四五〇六九

因_天則_{天甲}爲一其級數一項必爲一又因_十所以其

[illegible]

爲天他方之倍數此皆爲未定之數所以與天之大小無相關求其同數之法用^{人甲}之變式人所共知之理

于上級數中將天變爲地將天變爲地則得兩式

一爲也一爲也惟因也必有也之形所以

爲

甲^天—¹—²—³—⁴—⁵—⁶—⁷—⁸—⁹—¹⁰—¹¹—¹²—¹³—¹⁴—¹⁵—¹⁶—¹⁷—¹⁸—¹⁹—²⁰—²¹—²²—²³—²⁴—²⁵—²⁶—²⁷—²⁸—²⁹—³⁰—³¹—³²—³³—³⁴—³⁵—³⁶—³⁷—³⁸—³⁹—⁴⁰—⁴¹—⁴²—⁴³—⁴⁴—⁴⁵—⁴⁶—⁴⁷—⁴⁸—⁴⁹—⁵⁰—⁵¹—⁵²—⁵³—⁵⁴—⁵⁵—⁵⁶—⁵⁷—⁵⁸—⁵⁹—⁶⁰—⁶¹—⁶²—⁶³—⁶⁴—⁶⁵—⁶⁶—⁶⁷—⁶⁸—⁶⁹—⁷⁰—⁷¹—⁷²—⁷³—⁷⁴—⁷⁵—⁷⁶—⁷⁷—⁷⁸—⁷⁹—⁸⁰—⁸¹—⁸²—⁸³—⁸⁴—⁸⁵—⁸⁶—⁸⁷—⁸⁸—⁸⁹—⁹⁰—⁹¹—⁹²—⁹³—⁹⁴—⁹⁵—⁹⁶—⁹⁷—⁹⁸—⁹⁹—¹⁰⁰—¹⁰¹—¹⁰²—¹⁰³—¹⁰⁴—¹⁰⁵—¹⁰⁶—¹⁰⁷—¹⁰⁸—¹⁰⁹—¹¹⁰—¹¹¹—¹¹²—¹¹³—¹¹⁴—¹¹⁵—¹¹⁶—¹¹⁷—¹¹⁸—¹¹⁹—¹²⁰—¹²¹—¹²²—¹²³—¹²⁴—¹²⁵—¹²⁶—¹²⁷—¹²⁸—¹²⁹—¹³⁰—¹³¹—¹³²—¹³³—¹³⁴—¹³⁵—¹³⁶—¹³⁷—¹³⁸—¹³⁹—¹⁴⁰—¹⁴¹—¹⁴²—¹⁴³—¹⁴⁴—¹⁴⁵—¹⁴⁶—¹⁴⁷—¹⁴⁸—¹⁴⁹—¹⁵⁰—¹⁵¹—¹⁵²—¹⁵³—¹⁵⁴—¹⁵⁵—¹⁵⁶—¹⁵⁷—¹⁵⁸—¹⁵⁹—¹⁶⁰—¹⁶¹—¹⁶²—¹⁶³—¹⁶⁴—¹⁶⁵—¹⁶⁶—¹⁶⁷—¹⁶⁸—¹⁶⁹—¹⁷⁰—¹⁷¹—¹⁷²—¹⁷³—¹⁷⁴—¹⁷⁵—¹⁷⁶—¹⁷⁷—¹⁷⁸—¹⁷⁹—¹⁸⁰—¹⁸¹—¹⁸²—¹⁸³—¹⁸⁴—¹⁸⁵—¹⁸⁶—¹⁸⁷—¹⁸⁸—¹⁸⁹—¹⁹⁰—¹⁹¹—¹⁹²—¹⁹³—¹⁹⁴—¹⁹⁵—¹⁹⁶—¹⁹⁷—¹⁹⁸—¹⁹⁹—²⁰⁰—²⁰¹—²⁰²—²⁰³—²⁰⁴—²⁰⁵—²⁰⁶—²⁰⁷—²⁰⁸—²⁰⁹—²¹⁰—²¹¹—²¹²—²¹³—²¹⁴—²¹⁵—²¹⁶—²¹⁷—²¹⁸—²¹⁹—²²⁰—²²¹—²²²—²²³—²²⁴—²²⁵—²²⁶—²²⁷—²²⁸—²²⁹—²³⁰—²³¹—²³²—²³³—²³⁴—²³⁵—²³⁶—²³⁷—²³⁸—²³⁹—²⁴⁰—²⁴¹—²⁴²—²⁴³—²⁴⁴—²⁴⁵—²⁴⁶—²⁴⁷—²⁴⁸—²⁴⁹—²⁵⁰—²⁵¹—²⁵²—²⁵³—²⁵⁴—²⁵⁵—²⁵⁶—²⁵⁷—²⁵⁸—²⁵⁹—²⁶⁰—²⁶¹—²⁶²—²⁶³—²⁶⁴—²⁶⁵—²⁶⁶—²⁶⁷—²⁶⁸—²⁶⁹—²⁷⁰—²⁷¹—²⁷²—²⁷³—²⁷⁴—²⁷⁵—²⁷⁶—²⁷⁷—²⁷⁸—²⁷⁹—²⁸⁰—²⁸¹—²⁸²—²⁸³—²⁸⁴—²⁸⁵—²⁸⁶—²⁸⁷—²⁸⁸—²⁸⁹—²⁹⁰—²⁹¹—²⁹²—²⁹³—²⁹⁴—²⁹⁵—²⁹⁶—²⁹⁷—²⁹⁸—²⁹⁹—³⁰⁰—³⁰¹—³⁰²—³⁰³—³⁰⁴—³⁰⁵—³⁰⁶—³⁰⁷—³⁰⁸—³⁰⁹—³¹⁰—³¹¹—³¹²—³¹³—³¹⁴—³¹⁵—³¹⁶—³¹⁷—³¹⁸—³¹⁹—³²⁰—³²¹—³²²—³²³—³²⁴—³²⁵—³²⁶—³²⁷—³²⁸—³²⁹—³³⁰—³³¹—³³²—³³³—³³⁴—³³⁵—³³⁶—³³⁷—³³⁸—³³⁹—³⁴⁰—³⁴¹—³⁴²—³⁴³—³⁴⁴—³⁴⁵—³⁴⁶—³⁴⁷—³⁴⁸—³⁴⁹—³⁵⁰—³⁵¹—³⁵²—³⁵³—³⁵⁴—³⁵⁵—³⁵⁶—³⁵⁷—³⁵⁸—³⁵⁹—³⁶⁰—³⁶¹—³⁶²—³⁶³—³⁶⁴—³⁶⁵—³⁶⁶—³⁶⁷—³⁶⁸—³⁶⁹—³⁷⁰—³⁷¹—³⁷²—³⁷³—³⁷⁴—³⁷⁵—³⁷⁶—³⁷⁷—³⁷⁸—³⁷⁹—³⁸⁰—³⁸¹—³⁸²—³⁸³—³⁸⁴—³⁸⁵—³⁸⁶—³⁸⁷—³⁸⁸—³⁸⁹—³⁹⁰—³⁹¹—³⁹²—³⁹³—³⁹⁴—³⁹⁵—³⁹⁶—³⁹⁷—³⁹⁸—³⁹⁹—⁴⁰⁰—⁴⁰¹—⁴⁰²—⁴⁰³—⁴⁰⁴—⁴⁰⁵—⁴⁰⁶—⁴⁰⁷—⁴⁰⁸—⁴⁰⁹—⁴¹⁰—⁴¹¹—⁴¹²—⁴¹³—⁴¹⁴—⁴¹⁵—⁴¹⁶—⁴¹⁷—⁴¹⁸—^{419</}

爲同方

第二十六款 上款所得天甲之級數既無論天爲何數

將兩邊各方之項詳之而化 其地則得 因此式

$$\begin{array}{ccccccc} \begin{array}{c} \text{二} \\ \text{三} \\ \text{四} \end{array} & \begin{array}{c} \text{二} \\ \text{三} \\ \text{四} \end{array} & \begin{array}{c} \text{二} \\ \text{三} \\ \text{四} \end{array} & \begin{array}{c} \text{二} \\ \text{三} \\ \text{四} \end{array} & \begin{array}{c} \text{二} \\ \text{三} \\ \text{四} \end{array} & \begin{array}{c} \text{二} \\ \text{三} \\ \text{四} \end{array} & \begin{array}{c} \text{二} \\ \text{三} \\ \text{四} \end{array} \end{array}$$

必合于理則可令 即 所以得 此式若依常

$$\begin{array}{ccccccc} \text{二} & \text{三} & \text{四} & \text{五} & \text{六} & \text{七} & \text{八} \end{array}$$

法以戊代其右邊級數則爲 而其 所以爲

$$\begin{array}{ccccccc} \text{二} & \text{三} & \text{四} & \text{五} & \text{六} & \text{七} & \text{八} \end{array}$$

無論天爲何數必合則天之同方各倍數 故

$$\begin{array}{ccccccc} \text{二} & \text{三} & \text{四} & \text{五} & \text{六} & \text{七} & \text{八} \end{array}$$

有以戊爲底之一幅對數中甲之對數即 所以得

$$\begin{array}{ccccccc} \text{二} & \text{三} & \text{四} & \text{五} & \text{六} & \text{七} & \text{八} \end{array}$$

可從此得 將此各同數代入其本級數

$$\begin{array}{ccccccc} \text{二} & \text{三} & \text{四} & \text{五} & \text{六} & \text{七} & \text{八} \end{array}$$

中得 其 此式所明之級數有數種最要之

$$\begin{array}{ccccccc} \text{二} & \text{三} & \text{四} & \text{五} & \text{六} & \text{七} & \text{八} \end{array}$$

性情于後款解之又可見 甲之級數內其與天恆

可得

$$\begin{array}{ccccccc} \text{二} & \text{三} & \text{四} & \text{五} & \text{六} & \text{七} & \text{八} \end{array}$$

此兩式在深算學中爲用甚廣其式以

若有指數之式 令 又 即可得 又

$$\begin{array}{ccccccc} \text{二} & \text{三} & \text{四} & \text{五} & \text{六} & \text{七} & \text{八} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \text{二} & \text{三} & \text{四} & \text{五} & \text{六} & \text{七} & \text{八} \end{array}$$

訥對為主而明任何數若卯為大于天之第二箇整數則級數從其第卯項起為斂級數因各項從其前項變之至整數小于一而恆變小也其(三)式以本數明其訥

對如以卯代甲即得

$$\text{對卯} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

又因 則

$$\text{對甲} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

此式中若

$$\text{對甲} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

卯大于二則各項之數漸增大而為發級數惟有數種巧法能變其形使為甚速之斂級數

如將其卯以_卯代之則_卯可以_寅代之其級數

變為 若其卯大于二可取寅為大數至得_卯大

$$\text{對甲} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

第二十七款

于一之數為甚小如令_寅則求卯之平方根至未次即得_卯之同數然此法用以推算對數不勝其繁更有簡捷之法俟後論之

戊之同數

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

為無界限之級數因

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

小千無窮項

之幾何級數_{此式之總數為一}所以其戊必在二與三之間若以為戊之同數可用有窮之分數明之設其數為

卯寅則

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

將左右兩邊以乘之得

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

其卯為整

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

數惟因

小于一幾何級數

此式之總數為

此

則可知若將小于一之分數與其卯相加而云其和

必可為整數則于理不合也所以可知其戊必為無盡

之數

若將級數之數項變為無盡之小數因其各項之數為

次第相生以三約第二項之數即得第三項以四約

其第三項之數即得第四項順是以下依此類推故得

戊之同數為

又有法能攷知但用級數卯項之和與戊之同數之差

其限為全項之和數即

依此法證之知其差必小

于

惟因求

之級數時又得一箇級數亦能以

本數為主而明其對數茲因此式為算學中最要之式

故更用他法證之

第二十八款

求將

化為以天之各方詳之之級數

凡

不能化為有

之形因令

則

變為無窮

故也惟

則能變得此形之級數因

之時其式亦

能為○所以其式中不能有與天相關之項又不能

有天之負方之項則得○式如下

(一) 若變其天爲地則得

惟因

一天地 = (天) (地)

故

$$\text{對甲}(\text{上}|\text{天}|\text{地}) = \text{對甲}(\text{上}|\text{天})|\text{對甲}(\text{上}|\text{地})$$

若將(一)式中之天變爲 $\frac{1}{\text{天}}$ 地則得

所以又可從此

$$\text{数}_1 \left(\frac{\text{上天}}{\text{下地}} \right) = \frac{\text{上天}}{\text{下地}} \left| \frac{(-1)}{\text{吃地}} \right| \dots$$

式得

此爲

之第二式因兩式中地之同方倍數

$$\frac{1}{\text{甲}}(\frac{1}{\text{天}}\frac{1}{\text{地}}) = \frac{1}{\text{甲}}\frac{1}{\text{天}}\frac{1}{\text{地}}\frac{1}{\text{地}}$$

一上 讲 (一上 地)
哩 之

必相等故可將

兩邊各以^上乘之又化之得

啞[二]天[三]啞天[四]天[五]

甲₁二₁天₁二₂三₂天₂三₃四₃天₃……

因天爲未定之數故可令

$$74 \div 2 = 37$$

二九 | 三〇

三時四時

前

$$T = T_0 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} T_0$$
$$w_1 \bar{w}_2 = \frac{1}{2} \text{ (mod } p)$$
$$\pi = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

所以得

此式因無論天爲何數必合于理則令

$$\text{卦}_{\text{甲}}(-\text{上}) = \text{甲}(\text{天} \mid \text{二} \mid \text{三} \mid \text{四} \mid \dots)$$

一天一甲

依第二十六款之理得

所以得

$$\text{對}_q \text{甲} = \text{---} \text{甲} [\text{甲} - \text{---} (\text{甲}) \text{---} (\text{甲}) \text{---}] \text{---} \text{對}_q \text{甲}$$
$$\text{射甲}(\text{一}) \xrightarrow{\text{射甲}} (\text{天} \text{二} \text{天} \text{三} \text{天} \text{四} \text{天} \dots)$$

第二十九款

又有一法能不用

之詳式面徑得其倍數呬